Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом с помощью рядов

Д. И. Мартынюк

Систематическое изучение дифференциально-функциональных уравнений в области аналитических функций, когда независимое переменное принимает комплексные значения, берет начало с конца XIX века. Ло [1] установил для системы дифференциально-функциональных уравнений

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_1} = f_i(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_n, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n),$$

где

$$\tilde{y}_i = y_i(\varphi_{1i}(x_1, \ldots, x_p), \varphi_{2i}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_{pi}(x_1, \ldots, x_p))$$

аналог теоремы Коши—Ковалевской. Изуми [2] для уравнения

$$y^{(m)}(x) + a_1(x)\, y^{(m-1)}(\omega_1(x)) + \ldots + a_m(x)\, y(\omega_m(x)) = f(x),$$

в предположении, что $\omega_i(0) = 0$, $|\omega_i(x)| < 1$ и $a_i(x)$, $\omega_i(x)$, $f(x)$ аналитичны при $|x| < 1$, анонсировал теорему о существовании аналитического решения в области $|x| < 1$. Исследования Леонтьева, Миролюбова, Солдатова [6] посвящены линейным уравнениям порядка n с полиномиальными коэффициентами. Обзор литературы, посвященной специальным видам дифференциально-функциональных уравнений 1-го порядка в области аналитических функций имеется в [3, 4, 5]. Настоящая заметка посвящена вопросу существования и единственности аналитического решения дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, которое является аналогом обыкновенного дифференциального уравнения с изолированными особенностями 1-го рода [7].

1. Рассмотрим уравнение

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{ks}(t)\, t^k x^{(k)}(p_s t) = 0, \tag{1}$$

где t — комплексная переменная, p_s — действительные постоянные $1 = p_0 > p_1 > \ldots > p_m$, существует такая окрестность G точки $t = 0$, что все функции $a_{ks}(t)$ аналитичны в G

$$a_{ks}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{ksp} t^p, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n;\ s = 0, 1, \ldots, m); \qquad a_{n0}(t) = 1.$$

Если $a_{ksp} = 0$ $(p = 1, 2, \ldots)$, то уравнение (1) аналогично уравнению Эйлера [8].

Решение уравнения (1) будем искать в виде ряда

$$x(t, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r t^{\lambda+r} \quad (g_0 \neq 0). \tag{2}$$

Определим число λ и коэффициенты g_r таким образом, чтобы ряд (2) был решением дифференциального уравнения (1).

Легко видеть, что

$$L\left(\sum_{r=0}^{\infty} g_r t^{\lambda+r}\right) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r L(t^{\lambda+r}) = \sum_{r=0}^{\infty} g_r t^{\lambda+r} D(t, \lambda + r),$$

где

$$D(t, \lambda + r) = \sum_{s=0}^{m} [(\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n + 1) a_{ns}(t) \exp[-(\lambda + r - n)\tau_s] + \ldots + (\lambda + r) a_{1s}(t) \exp[-(\lambda + r - 1)\tau_s] + a_{0s}(t) \exp[-(\lambda + r)\tau_s]], \tag{3}$$

если $p_s = \exp(-\tau_s)$.

Теперь представим $D(t, \lambda + r)$ в окрестности $t = 0$ в виде степенного ряда

$$D(t, \lambda + r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu(\lambda + r) t^\nu, \tag{4}$$

где

$$D_\nu(\lambda + r) = \sum_{s=0}^{m} [(\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n + 1) a_{ns\nu} \exp[-(\lambda + r - n)\tau_s] + \ldots + (\lambda + r) a_{1s\nu} \exp[-(\lambda + r - 1)\tau_s] + a_{0s\nu} \exp[-(\lambda + r)\tau_s]]. \tag{5}$$

Подставив в уравнение (1) ряд (2), и используя (4), получим

$$\sum_{r=0}^{\infty} (g_r D(\lambda + r) + g_{r-1} D_1(\lambda + r - 1) + \ldots + g_0 D_r(\lambda)) t^{\lambda+r} = 0. \tag{6}$$

Для того чтобы ряд (2) удовлетворял дифференциальному уравнению (1), коэффициенты при каждой степени t должны быть равными нулю. Таким образом, для определения коэффициентов получаем рекуррентную систему

$$\begin{aligned} &g_0 D_0(\lambda) = 0, \\ &g_0 D_1(\lambda) + g_1 D_0(\lambda + 1) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_0 D_{n-1}(\lambda) + g_1 D_{n-2}(\lambda + 1) + \ldots + g_{n-1} D_0(\lambda + n - 1) = 0, \\ &g_0 D_n(\lambda) + g_1 D_{n-2}(\lambda + 1) + \ldots + g_n D_0(\lambda + n) = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как коэффициент $g_0 \neq 0$, то из первого уравнения системы (7) следует, что число λ должно быть корнем уравнения

$$\sum_{s=0}^{m} [\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)\, a_{ns0} \exp[-(\lambda-n)\tau_s] + \ldots + a_{0s0} \exp(-\lambda\tau_s)]. \tag{8}$$

Пусть корни уравнения (8) различны и среди них нет таких, которые отличаются на целое число (в этом случае $D_0(\lambda+r+1) \neq 0$ ни при каком значении λ). Тогда из рекуррентной системы (7) коэффициенты g_r можно определить как функции λ.

Функция $g_r(\lambda)$ имеет вид

$$g_r(\lambda) = \frac{h_r(\lambda)\, g_0(\lambda)}{D_0(\lambda+1)\, D_0(\lambda+2)\ldots D_0(\lambda+r)} \qquad (r = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

где $h_r(\lambda)$—целая функция вида

$$(-1)^r h_r(\lambda) = \begin{vmatrix} D_1(\lambda+r-1) & D_2(\lambda+r-2)\ldots D_{r-1}(\lambda+1) & D_r(\lambda) \\ D_0(\lambda+r-1) & D_1(\lambda+r-2)\ldots D_{r-2}(\lambda+1) & D_{r-1}(\lambda) \\ 0 & D_0(\lambda+r-2)\ldots D_{r-3}(\lambda+1) & D_{r-2}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \quad \ldots D_0(\lambda+1) & D_1(\lambda) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Таким образом, каждому λ, которое является корнем уравнения (8), соответствует определенный ряд, который является формальным решением уравнения (1).

2. Докажем сходимость ряда (2).

При сделанных предположениях относительно корней уравнения (8) из (6) получим

$$g_{r+1} = -\frac{1}{D_0(\lambda+r+1)} (g_r D_1(\lambda+r) + g_{r-1} D_2(\lambda+r-1) + \ldots + g_0 D_{r+1}(\lambda)).$$

Обозначим абсолютное значение функций $D_r(\lambda)$ и $g_r(\lambda)$ через $F_r(\lambda)$ и $G_r(\lambda)$ соответственно. Тогда

$$G_{r+1} \leqslant \frac{1}{F_0(\lambda+r+1)} (G_r F_1(\lambda+r) + G_{r-1} F_2(\lambda+r-1) + \ldots + G_0 F_{r+1}(\lambda)). \tag{11}$$

Обозначим через Γ—радиус наибольшего круга с центром в начале, внутри которого функции $a_{ks}(t)$ $(k = 0, \ldots, n;\ s = 1, 2, \ldots, m)$ аналитические. Тогда ряд

$$D(t, \lambda+r) = \sum_{\nu=0}^{\infty} D_\nu(\lambda+r)\, t^\nu \tag{13}$$

и ряд

$$D'(t, \lambda+r) = \sum_{\nu\ 0}^{\infty} (\nu+1)\, D_{\nu+1}(\lambda+r)\, t^\nu, \tag{14}$$

полученный почленным дифференцированием ряда (13) по t, будет сходиться при $|t| < \Gamma$. Пусть $M(\lambda+r)$ будет верхней границей $D'(t, \lambda+r)$ на круге $|t| = R = \Gamma - \varepsilon$, где ε—малое положительное число. Используя интегральную теорему Коши, можно доказать, что $F_{r+1}(\lambda+r) < M(\lambda+r) R^{-r}$

и, следовательно,

$$G_{r+1} < \frac{1}{F_0(\lambda + r + 1)} (G_r M(\lambda + r) + G_{r-1} M(\lambda + r - 1) R^{-1} + G_0 M(\lambda) R^{-r}). \quad (15)$$

Обозначив правую часть неравенства (15) через b_{r+1}, получим

$$b_{r+1} = \frac{G_r M(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} + \frac{b_r F_0(\lambda + r)}{R F_0(\lambda + r + 1)}. \quad (16)$$

Из (15) следует, что $G_r < b_r$, а значит

$$b_{r+1} < b_r \left(\frac{M(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} + \frac{1}{R} \frac{F_0(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} \right). \quad (17)$$

Введем величины c_r посредством рекуррентных формул

$$c_{r+1} = c_r \left(\frac{M(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} + \frac{1}{R} \frac{F_0(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} \right). \quad (18)$$

Таким образом,

$$G_{r+1} < b_{r+1} < c_{r+1}. \quad (19)$$

Из (3) следует

$$D'(t, \lambda + r) = (\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n) a'_{n-1,1}(t) + \ldots$$

$$\ldots + (\lambda + r) a'_{10}(t) + a'_{00}(t) + \sum_{s=1}^{m} [(\lambda + r)(\lambda + r - n + 1) a'_{ns}(t) \times$$

$$\times \exp[-(\lambda + r - n)\tau_s] + \ldots + a'_{0s}(t) \exp[-(\lambda + r)\tau_s]].$$

Следовательно,

$$M(\lambda + r) = \max |D'(t, \lambda + r)| \leqslant M_{n-1,1} |(\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n)| +$$

$$+ \ldots + |\lambda + r| M_{10} + M_{00} + \sum_{s=1}^{m} [(\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n + 1) \times$$

$$\times M_{ns} \exp[-(\lambda + r - n)\tau_s] + \ldots + M_{0s} \exp[-(\lambda + r)\tau_s]],$$

где

$$M_{ks} = \max |a'_{ks}(t)|.$$

Очевидно, что

$$D_0(\lambda + r) = (\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n + 1) + \ldots + a_{000} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} [(\lambda + r)(\lambda + r - 1) \ldots (\lambda + r - n + 1) a_{ns0} \exp[-(\lambda + r - n)\tau_s] + \ldots$$

$$\ldots + a_{0s0} \exp[-(\lambda + r)\tau_s].$$

Легко видеть, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} = 0, \qquad \lim_{r \to \infty} \frac{F_0(\lambda + r)}{F_0(\lambda + r + 1)} = 1.$$

Отсюда следует, что $\lim_{r \to \infty} \frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{1}{R}$ и ряд $\sum_{r=0}^{\infty} c_r t^r$ имеет радиус сходимости R, а так как $G_r < c_r$, то радиус сходимости ряда $\sum_{r=0}^{\infty} g_r t^r$ не меньше R.

3. Можно указать и другую рекуррентную систему, которая служит для определения функций $g_r(\lambda)$. С этой целью введем обозначения

$$G_r(\lambda) = \frac{g_r(\lambda)}{D_0(\lambda)\, g_0(\lambda)}, \tag{20}$$

$$G(t, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} G_r(\lambda)\, t^{\lambda+r} = \frac{x(t, \lambda)}{D_0(\lambda)\, g_0(\lambda)}. \tag{21}$$

Функции $G_r(\lambda)$, если λ считать переменной величиной, полностью определяются из требования, чтобы удовлетворялось уравнение $L(x) = t^\lambda$.

Кроме того, $G_0(\lambda)$ при $t = 0$ должно принимать значение

$$G_0(\lambda) = (D_0(\lambda))^{-1}. \tag{22}$$

Функции $G_r(\lambda)$ должны находиться из тождества

$$\sum_{r=0}^{\infty} G_r(\lambda)\, D(t, \lambda + r)\, t^{\lambda+r} = t^\lambda. \tag{23}$$

Таким образом, для функций $G_r(\lambda)$ существуют такие же рекуррентные формулы, как и для $g_r(\lambda)$ (7).

Но относительно λ (7) есть тождество. Подставляя вместо λ значения $\lambda + 1$, $\lambda + 2$, $\lambda + 3$, $\lambda + 4, \ldots$, получим следующие уравнения

$$\begin{cases} G_r(\lambda)\, D_0(\lambda + r) + G_{r-1}(\lambda)\, D_1(\lambda + r - 1) + \ldots + D_r(\lambda)\, G_0(\lambda) = 0, \\ G_{r-1}(\lambda + 1)\, D_0(\lambda + r) + \ldots + G_0(\lambda + 1)\, D_{r-1}(\lambda + 1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_1(\lambda + r - 1)\, D_0(\lambda + r - 1) + G_0(\lambda + r - 1)\, D_0(\lambda + r - 1) = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Умножив уравнения (24) на $D_0(\lambda)$, $D_1(\lambda), \ldots, D_{r-1}(\lambda)$ и сложив, получаем

$$\begin{gathered} F_r D_0(\lambda + r) + F_{r-1} D_1(\lambda + r - 1) + \ldots + D_0(\lambda)\, G_0(\lambda)\, D_r(\lambda) = \\ = D_0(\lambda + r)\, D_r(\lambda)\, G_0(\lambda + r), \end{gathered} \tag{25}$$

где для сокращения положено

$$D_0(\lambda)\, G_r(\lambda) + D_1(\lambda)\, G_{r-1}(\lambda + 1) + \ldots + D_r(\lambda)\, G_0(\lambda + r) = F_r. \tag{26}$$

Из (22), (24), (25) следует

$$\begin{gathered} F_1 = D_0(\lambda)\, G_1(\lambda) + D_1(\lambda)\, G_0(\lambda + 1) = \\ = \frac{G_1(\lambda)}{G_0(\lambda)} + \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda + 1)} = \frac{G_1(\lambda)\, D_0(\lambda + 1) + G_0(\lambda)\, D_1(\lambda)}{G_0(\lambda)\, D_0(\lambda + 1)} = 0. \end{gathered}$$

Аналогично можно показать, что $F_r = 0$ $(r = 2, 3, \ldots)$.

Равенство (25) примет вид

$$D_0(\lambda) G_r(\lambda) + D_1(\lambda)\, G_{r-1}(\lambda + 1) + \ldots + D_r(\lambda)\, G_0(\lambda + r) = 0. \tag{27}$$

Это и есть искомая рекуррентная формула.

Умножая (27) на $t^{\lambda+r}$ и суммируя по r, получаем

$$\sum_{r=0}^{\infty} D_r(\lambda)\, G(t, \lambda + r) = t^\lambda. \tag{28}$$

4. Пример. Рассмотрим уравнение

$$L(x) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} (a_{ks} + b_{ks} t) t^k \; x^{(k)}(p_s t) = 0, \tag{29}$$

где a_{ks}, b_{ks}, p_s — постоянные, $1 = p_0 > p_1 > \ldots > p_m$.

Из (28) получаем выражение

$$D_0(\lambda) G(t, \lambda) + D_1(\lambda) G(t, \lambda + 1) = t^\lambda, \tag{30}$$

в котором

$$D_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} a_{ks} \lambda (\lambda - 1) \ldots (\lambda - k + 1) \exp[-(\lambda - k) \tau_s], \tag{31}$$

$$D_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{s=0}^{m} b_{ks} \lambda (\lambda - 1) \ldots (\lambda - k + 1) \exp[-(\lambda - k) \tau_s], \tag{32}$$

где $p_s = \exp(-\tau_s)$.

Из (30) получаем

$$G(t, \lambda) = \frac{t^\lambda}{D_0(\lambda)} - \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} G(t, \lambda + 1). \tag{33}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered} G(t, \lambda + 1) = \frac{t^{\lambda+1}}{D_0(\lambda + 1)} - \frac{D_1(\lambda + 1)}{D_0(\lambda + 1)} G(t, \lambda + 2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G(t, \lambda + k) = \frac{t^{\lambda+k}}{D_0(\lambda + k)} - \frac{D_1(\lambda + k)}{D_0(\lambda + k)} G(t, \lambda + k + 1). \end{gathered} \tag{34}$$

Используя (34), равенство (33) можно записать в виде

$$G(t, \lambda) = \sum_{r=0}^{p} \frac{(-1)^r D_1(\lambda) D_1(\lambda + 1) \ldots D_1(\lambda + r - 1)}{D_0(\lambda) D_0(\lambda + 1) \ldots D_0(\lambda + r - 1) D_0(\lambda + r)} \cdot t^{\lambda + r} +$$

$$+ (-1)^{p+1} \frac{D_1(\lambda) D_1(\lambda + 1) \ldots D_1(\lambda + p)}{D_0(\lambda) D_0(\lambda + 1) \ldots D_0(\lambda + p)} G(t, \lambda + p + 1). \tag{35}$$

Ряд (35)—сходящийся, значит его остаток должен быть при больших p величиной как угодно малой. Отсюда вытекает, что

$$G(t, \lambda) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{D_1(\lambda) D_1(\lambda + 1) \ldots D_1(\lambda + r - 1)}{D_0(\lambda) D_0(\lambda + 1) \ldots D_0(\lambda + r - 1)} \frac{t^{\lambda + r}}{D_0(\lambda + r)}. \tag{36}$$

Автор пользуется случаем выразить благодарность А. Д. Мышкису за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. L e a u, Sur les équations fonctionnelles, C. R. Acad. Sc., Paris, 1894, 119.
2. S. I z u m i, On the Theory of the Linear Functional Differential Equations, Tôhoku Math. Journ., 30, 1929.
3. А. Д. М ы ш к и с, Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, УМН, т. IV, 5 (33), 1949.
4. А. Д. М ы ш к и с, Дополнительные библиографические материалы к статье «Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом», УМН, т. V, 2 (36), 1950.

5. В. Хан, Обзор теории дифференциально-разностных уравнений с постоянными и переменными отклонениями, Сб. переводов, Математика, 5 : 6, 1961.
6. А. М. Зверкин, Г. А. Каменский, С. Б. Норкин, Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом, УМН, т. 17, 2 (104), 1962.
7. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИИЛ, М., 1958.
8. Л. Э. Эльсгольц, Уравнения с отклоняющимся аргументом, аналогичные уравнению Эйлера, Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Ун-т дружбы народов, 1, 1962.

Поступила 17.VIII 1965 г.
Киев