Периодические решения дифференциально-разностных автономных систем с одной степенью свободы

В. В. Мисак

В работе [1] периодические решения квазилинейных автономных систем с одной степенью свободы строятся при помощи метода малого параметра с использованием переменных Ван дер Поля [2]. В данной заметке устанавливается, что метод, разработанный в статье [1], может быть распространен на дифференциально-разностные уравнения частного вида. Отметим, что в работе [3] периодические решения такого вида уравнений найдены при помощи метода вспомогательных систем С. Н. Шиманова [4, 5].

Пусть задана нелинейная колебательная система, которая описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \mu f[x(t), x(t-\tau), \dot{x}(t), \dot{x}(t-\tau), \mu]. \tag{1}$$

Здесь f — аналитическая функция от своих аргументов, μ — малый безразмерный положительный параметр, τ — положительная постоянная величина.

Как известно [4], период колебаний автономной системы (1) зависит от параметра μ и может быть представлен в виде

$$T = \frac{2\pi}{\omega}[1 + \mu\bar{\alpha}(\mu)],$$

где $\bar{\alpha}(\mu) = \alpha_1 + \alpha_2\mu + \alpha_3\mu^2 + \ldots$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ — неизвестные постоянные коэффициенты, подлежащие определению; $\frac{2\pi}{\omega}$ — период решения порождающего уравнения ($\mu = 0$).

В уравнении (1) сделаем замену независимой переменной по формуле

$$t_1 = \frac{t\omega}{1 + \mu\bar{\alpha}}.$$

Тогда получим

$$\ddot{x}(t_1) + \alpha^2 x(t_1) = \mu\frac{\alpha^2}{\omega^2} f\left[x(t_1), x(t_1-\delta), \frac{\omega}{\alpha}\dot{x}(t_1), \frac{\omega}{\alpha}\dot{x}(t_1-\delta), \mu\right], \tag{2}$$

где

$$\alpha = 1 + \mu\bar{\alpha} = 1 + \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots; \qquad \delta = \frac{\tau\omega}{1 + \mu\alpha}.$$

Заметим, что

$$\delta = \tau\omega[1 - \alpha_1\mu + (\alpha_1^2 - \alpha_2)\mu^2 + \ldots].$$

По переменной t_1 искомое периодическое решение будет иметь период, не зависящий от μ и равный 2π. Это решение будет также аналитическим относительно μ и его следует искать в виде ряда

$$x(t_1) = x_0(t_1) + \mu x_1(t_1) + \mu^2 x_2(t_1) + \ldots$$

с периодическими периода 2π коэффициентами $x_i(t_1)$.

В силу автономности уравнения (2) начальное значение можно принять равным [6]

$$\dot{x}(0) = 0.$$

Заменим уравнение (2) системой

$$\begin{gathered} \dot{x}(t_1) = y(t_1), \\ \dot{y}(t_1) = -\alpha^2 x(t_1) + \mu \frac{\alpha^2}{\omega^2} f \left[x(t_1), x(t_1-\delta), \frac{\omega}{\alpha} y(t_1), \frac{\omega}{\alpha} y(t_1-\delta), \mu \right]. \end{gathered} \tag{3}$$

Решение порождающей системы имеет вид

$$\begin{gathered} x(t_1) = a\cos t_1 + b\sin t_1, \\ y(t_1) = -a\sin t_1 + b\cos t_1. \end{gathered} \tag{4}$$

Будем искать решение уравнений (3) в том же виде (4), но считая теперь a и b не константами, а некоторыми, пока неизвестными функциями времени t_1. В переменных $a(t_1)$ и $b(t_1)$ уравнения (3) представятся следующим образом

$$\begin{gathered} \dot{a}(t_1) = (\alpha^2-1)[a(t_1)\cos t_1 + b(t_1)\sin t_1]\sin t_1 - \mu\frac{\alpha^2}{\omega^2} f\{a(t_1)\cos t_1 + b(t_1)\sin t_1, \\ a(t_1-\delta)\cos(t_1-\delta) + b(t_1-\delta)\sin(t_1-\delta), \frac{\omega}{\alpha}[-a(t_1)\sin t_1 + \\ + b(t_1)\cos t_1, \frac{\omega}{\alpha}[-a(t_1-\delta)\sin(t_1-\delta) + b(t_1-\delta)\cos(t_1-\delta)], \mu\}\sin t_1; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \dot{b}(t_1) = -(\alpha^2-1)[a(t_1)\cos t_1 + b(t_1)\sin t_1]\cos t_1 + \mu\frac{\alpha^2}{\omega^2} f\Big\{a(t_1)\cos t_1 + b(t_1)\sin t_1, \\ a(t_1-\delta)\cos(t_1-\delta) + b(t_1-\delta)\sin(t_1-\delta), \frac{\omega}{\alpha}[-a(t_1)\sin t_1 + b(t_1)\cos t_1], \\ \frac{\omega}{\alpha}[-a(t_1-\delta)\sin(t_1-\delta) + b(t_1-\delta)\cos(t_1-\delta)], \mu\Big\}\cos t_1. \end{gathered}$$

Периодическое решение системы (5) ищем в виде рядов

$$a(t_1) = a_0(t_1) + \mu a_1(t_1) + \mu^2 a_2(t_1) + \ldots; \quad b(t_1) = b_0(t_1) + \mu b_1(t) + \mu^2 b_2(t_1) + \ldots$$

Из предыдущего следует, что $b_n(0) = 0$. Обозначим $a_n(0) = A_n$, имеем $a_0(t_1) = A_0$, $b_0(t_1) = 0$. Тогда

$$x_0(t_1) = A_0\cos t_1. \tag{6}$$

Запишем выражение для функции

$$F(t_1, \mu) = f[x(t_1), x(t_1-\delta), z(t_1), z(t_1-\delta), \mu],$$

$$\left(z(t_1) = \frac{\omega}{\alpha} y(t_1), z(t_1-\delta) = \frac{\omega}{\alpha} y(t_1-\delta) \right).$$

ее первой и второй частной производной по параметру μ при $\mu = 0$.

$$F(t_1, 0) = f\,[A_0 \cos t_1, A_0 \cos (t_1 - \tau\omega), -\omega A_0 \sin t_1, -\omega A_0 \sin (t_1 - \tau\omega), 0], \quad (7)$$

$$\frac{\partial F(t_1, 0)}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial x(t_1)}{\partial \mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1)}{\partial \mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial \mu}\right)_0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 F(t_1, 0)}{\partial \mu^2} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1)}{d\mu}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1)\, \partial x(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{\partial x(t_1)}{d\mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1)\, \partial z(t_1)}\right)_0 \times$$

$$\times \left(\frac{dx(t_1)}{d\mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1)\, \partial z(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1)}{d\mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1 - \delta)\, \partial z(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 \left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1 - \delta) \partial z(t_1 - \delta)}\right)_0 \times$$

$$\times \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z(t_1 - \delta)\, \partial z(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{\partial \mu}\right)_0 \times$$

$$\times \left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1)\, \partial \mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x(t_1 - \delta)\, \partial \mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z(t_1)\, \partial \mu}\right)_0 \left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z(t_1 - \delta)\, \partial \mu}\right)_0 \cdot \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1)}\right)_0 \cdot \left(\frac{d^2 x(t_1)}{d\mu^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1 - \delta)}\right)_0 \left(\frac{d^2 x(t_1 - \delta)}{d\mu^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1)}\right)_0 \times$$

$$\times \left(\frac{d^2 z(t_1)}{d\mu^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1 - \delta)}\right)_0 \cdot \left(\frac{d^2 z(t_1 - \delta)}{d\mu^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \mu^2}\right)_0, \quad (9)$$

где

$$\left(\frac{dx(t_1)}{d\mu}\right)_0 = x_1(t_1), \qquad \left(\frac{dx(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 = x_1(t_1 - \tau\omega) + \omega\tau\alpha_1 \cdot \frac{dx_0(t_1 - \tau\omega)}{dt_1},$$

$$\left(\frac{dz(t_1)}{d\mu}\right)_0 = \omega\,[y_1(t_1) - \alpha_1 y_0(t)], \qquad \left(\frac{dz(t_1 - \delta)}{d\mu}\right)_0 = \omega\left[\omega\tau\alpha_1 \cdot \frac{dy_0(t_1 - \tau\omega)}{dt_1} -\right.$$

$$\left. - \alpha_1 y_0(t_1 - \tau\omega) + y_1(t_1 - \tau\omega)\right],$$

$$\left(\frac{d^2 x(t_1)}{d\mu^2}\right)_0 = x_2(t_1),$$

$$\left(\frac{d^2 x(t_1 - \delta)}{d\mu^2}\right)_0 = \omega^2\tau^2\alpha_1^2 \cdot \frac{d^2 x_0(t_1 - \tau\omega)}{dt_1^2} - 2\omega\tau(\alpha_1^2 - \alpha_2) \cdot \frac{dx_0(t_1 - \tau\omega)}{dt_1} +$$

$$+ 2\omega\tau\alpha_1 \cdot \frac{dx_1(t_1 - \tau\omega)}{dt_1} + 2x_2(t_1 - \tau\omega),$$

$$\left(\frac{d^2 z(t_1)}{d\mu^2}\right)_0 = 2\omega\left[(\alpha_1^2 - \alpha_2)\, y_0(t_1) - \alpha_1 y_1(t_1) + y_2(t_1)\right],$$

$$\left(\frac{d^2 z(t_1-\delta)}{d\mu^2}\right)_0 = \omega\left[\omega^2\tau^2\alpha_1^2\cdot\frac{d^2 y_0(t_1-\tau\omega)}{dt_1^2} - 2\omega\tau(2\alpha_1^2-\alpha_2)\cdot\frac{dy_0(t_1-\tau\omega)}{dt_1} + \right.$$

$$\left. + 2(\alpha_1^2-\alpha_2)\, y_0(t_1-\tau\omega) + 2\omega\tau\alpha_1\cdot\frac{dy_1(t_1-\tau\omega)}{dt_1} - 2\alpha_1 y_1(t_1-\tau\omega) + 2y_2(t_1-\tau\omega)\right].$$

Символ $(\ )_0$ обозначает, что значения соответствующих частных производных зависят от аргументов $A_0\cos t_1$, $A_0\cos(t_1-\tau\omega)$, $-\omega A_0\sin t_1$, $-\omega A_0\sin(t_1-\tau\omega)$, 0, а обыкновенные производные вычислены при $\mu=0$.

Для неизвестных функций $a_1(t_1)$ и $b_1(t_1)$ получаем выражения

$$a_1(t_1) = \alpha_1 A_0\sin^2 t_1 - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{t_1} F(s,0)\sin s\,ds + A_1,$$

$$b_1(t_1) = -\alpha_1 A_0(t_1 + \sin t_1\cos t_1) + \frac{1}{\omega^2}\int_0^{t_1} F(s,0)\cos s\,ds. \tag{10}$$

Условия 2π — периодичности функций $a_1(t_1)$ и $b_1(t_1)$ состоят в выполнении следующих равенств

$$\int_0^{2\pi} F(t_1,0)\sin t_1\,dt_1 = 0, \tag{11}$$

$$2\pi\alpha_1 A_0 - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{2\pi} F(t_1,0)\cos t_1\,dt_1 = 0. \tag{12}$$

Пусть A_0—некратный корень уравнения (11). Тогда из уравнения (12) можно определить α_1 и, следовательно,

$$x_1(t_1) = A_1\cos t_1 - \alpha_1 A_0 t_1\sin t_1 + \frac{1}{\omega^2}\left[\sin t_1\int_0^{t_1} F(s,0)\cos s\,ds - \cos t_1\int_0^{t_1} F(s,0)\sin s\,ds\right]. \tag{13}$$

Коэффициенты a_2 и b_2 вычисляются по формулам

$$a_2(t_1) = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_2)A_0\sin^2 t_1 + 2\alpha_2\int_0^{t_1}(a_1\cos s + b_1\sin s)\sin s\,ds -$$

$$-\frac{2\alpha_1}{\omega^2}\int_0^{t_1} F(s,0)\sin s\,ds - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{t_1}\frac{\partial F(s,0)}{\partial\mu}\sin s\,ds + A_2,$$

$$b_2(t_1) = -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_2)A_0(t_1 + \cos t_1\sin t_1) - 2\alpha_1\int_0^{t_1}(a_1\cos s\,ds +$$

$$+ b_1\sin s\,ds)\cos s\,ds + \frac{2\alpha_1}{\omega^2}\int_0^{t_1} F(s,0)\cos s\,ds + \frac{1}{\omega^2}\int_0^{t_1}\frac{\partial F(s,0)}{\partial\mu}\cos s\,ds.$$

Функции $a_2(t_1)$, $b_2(t_1)$ будут периодическими с периодом 2π, если [1]

$$2\pi^2\alpha_1^2 A_0 - \frac{\alpha_1}{\omega^2}\int_0^{2\pi} t_1 F(t_1, 0)\cos t_1 dt_1 - \frac{1}{\omega^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F(t_1, 0)}{\partial\mu}\sin t_1 dt_1 = 0, \quad (14)$$

$$2\pi^2\alpha_1^2 A_0 - 2\pi\alpha_2 A_0 - 2\pi\alpha_1 A_1 -$$

$$-\frac{\alpha_1}{\omega^2}\int_0^{2\pi} t_1 F(t_1, 0)\sin t_1 dt_1 + \frac{1}{\omega^2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F(t_1, 0)}{\partial\mu}\cos t_1 dt_1 = 0. \quad (15)$$

Константа A_1, входящая линейно в уравнение (14), имеет коэффициент, равный

$$-\frac{1}{\omega^2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1)}\right)_0 \cos t_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1-\delta)}\right)_0 \cos(t_1 - \tau\omega) -\right.$$

$$\left.-\omega\left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1)}\right)_0 \sin t_1 - \omega\left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1-\delta)}\right)_0 \sin(t_1-\tau\omega)\right]\sin t_1 dt_1.$$

С другой стороны

$$\frac{dP}{dA_0} = \frac{d}{dA_0}\left(\int_0^{2\pi} F(t_1, 0)\sin t_1 dt_1\right) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1)}\right)_0 \cos t_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x(t_1-\delta)}\right)_0 \cos(t_1-\tau\omega) -\right.$$

$$\left.-\omega\left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1)}\right)_0 \sin t_1 - \omega\left(\frac{\partial f}{\partial z(t_1-\delta)}\right)_0 \sin(t_1-\tau\omega)\right]\sin t_1 dt_1.$$

По предположению A_0 не является кратным корнем уравнения (11), следовательно, $\frac{dP}{dA_0} \neq 0$. Последнее означает, что уравнение (14) разрешимо относительно A_1. Зная A_1 из равенства (15) можно определить α_2.

Для функции $x_2(t_1)$ имеем

$$x_2(t_1) = A_0\cos t_1 - 2\alpha_1 A_1 \cos t_1 + \left(\frac{3}{2}\alpha_1^2 - \alpha_2\right)A_0 t_1 \sin t_1 + 2\alpha_1 x_1(t_1) -$$

$$-2\alpha_1\left[\sin t_1\int_0^{t_1} x_1(s)\cos s ds - \cos t_1\int_0^{t_1} x_1(s)\sin s ds\right] +$$

$$+\frac{1}{\omega^2}\left[\sin t_1\int_0^{t_1}\frac{\partial F(s, 0)}{\partial\mu}\cos s ds - \cos t_1\int_0^{t_1}\frac{\partial F(s, 0)}{\partial\mu}\sin s ds\right]. \quad (16)$$

Коэффициенты A_2 и α_3 могут быть найдены из условий периодичности (31) и (32) работы [1] для функций $a_3(t_1)$ и $b_3(t_1)$, если считать, что $F(t_1, 0)$, $\frac{\partial F(t_1, 0)}{\partial\mu}$ и $\frac{\partial^2 F(t_1, 0)}{\partial\mu^2}$ даны формулами (7), (8) и (9), а α_1, α_2, A_0, A_1 соответственно определены из равенств (12), (15), (11), (14) настоящей статьи.

Мы можем, следовательно, вычислять константы A_0, A_1, α_1, α_2, α_3. Зная эти величины, можно определить функции $x_0(t_1)$, $x_1(t_1)$ и $x_2(t_1)$ по формулам (6), (13), (16).

Продолжая расчет таким образом, можно найти периодическое решение и поправку к периоду с любой степенью точности.

Рассмотрим пример статьи [1] в дифференциально-разностной постановке. Имеем

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \mu (p - q x^2(t)) \dot{x}(t - \tau) \qquad (p > 0, \; q > 0).$$

Произведя замену переменной $t\omega = t_1(1 + \mu\bar{\alpha})$, получим

$$f[x(t_1), x(t_1 - \delta), z(t_1), z(t_1 - \delta), \mu] = (p - q x^2(t_1) z(t_1 - \delta).$$

Для функции $F(t_1, 0)$ получаем выражение

$$F(t_1, 0) = -\omega A_0 (p - q A_0^2 \cos^2 t_1) \sin(t_1 - \tau\omega).$$

Из условий периодичности (11), (12) для $a_1(t_1)$ и $b_1(t_1)$ находим

$$A_0^2 = \frac{4p}{q}, \qquad \alpha_1 = -\frac{p \sin \tau\omega}{\omega}.$$

Функция $x_1(t_1)$, вычисленная по формуле (13), имеет вид

$$x_1(t_1) = A_1 \cos(t_1) + \frac{pA_0 \cos \tau\omega}{2\omega} \sin^3 t_1 - \frac{pA_0 \sin \tau\omega}{\omega} \sin^2 t_1 \cos t_1 (1 + \cos^2 t_1).$$

Условия (14) и (15) дают

$$A_1 = \frac{pA_0}{\omega} \left(\frac{51}{8} \sin \tau\omega + \pi \operatorname{tg} \tau\omega \cdot \sin \tau\omega - \frac{5}{16} \operatorname{tg} \tau\omega \right),$$

$$\alpha_2 = \left(\pi - \frac{35}{16} \right) \frac{p^2 \sin^2 \tau\omega}{\omega^2} - (4 + \cos \tau\omega) \frac{p^2}{16\omega^2} + \left(\frac{4A_1}{A_0} - p\tau \cos \tau\omega \right) \frac{p \sin \tau\omega}{\omega}.$$

Ограничиваясь двумя приближениями, будем иметь

$$x(t_1) = A_0 \cos t_1 + \mu \frac{pA_0}{\omega} \left[\left(\frac{43}{8} + \pi \operatorname{tg} \tau\omega - \frac{5}{16 \cos \tau\omega} \right) \sin \tau\omega \cdot \cos t_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cos \tau\omega \cdot \sin^3 t_1 + \sin \tau\omega \cdot \cos^5 t_1 \right] + \ldots,$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left\{ 1 - \mu \frac{p \sin \tau\omega}{\omega} + \mu^2 \left[\left(\pi - \frac{35}{16} \right) \frac{p^2 \sin^2 \tau\omega}{\omega^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - (4 + \cos \tau\omega) \frac{p^2}{16\omega^2} + \frac{p \sin \tau\omega}{\omega} \left(\frac{4A_1}{A_0} - p\tau \cos \tau\omega \right) \right] + \ldots \right\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Проскуряков, К построению периодических решений автономных систем с одной степенью свободы, ПММ, 21, 4, 1957.
2. А. А. Андронов, А. А. Витт и С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
3. К. М. Цой, Периодические колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием, Изв. высш. уч. зав., Радиофизика, 7, 6, 1964.
4. С. Н. Шиманов, Колебания квазилинейных автономных систем с запаздыванием, Изв. высш. уч. завед., Радиофизика, 3, 3, 1960.
5. С. Н. Шиманов, К теории колебаний квазилинейных систем с запаздыванием, ПММ, 23, 5, 1959.
6. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1956.

Поступила 17.VI 1965 г.

Киев