Выделение из заданного графа подграфов некоторых типов

Н. П. Хоменко, О. Н. Гаврилюк

1. Ниже будут рассматриваться конечные простые (без петель и кратких ребер) неориентированные графы. Через $a_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \dots, \alpha^{(0)})$ будем обозначать вершины, а через $a_i^{(0)} a_j^{(0)}$ $(i, j = 1, 2, \dots, \alpha^{(0)})$ — ребра такого графа G.

Максимальным полным подграфом графа будем называть такой его подграф, который содержит наибольшее количество вершин, каждая пара которых соединена ребром. Обозначим его через H_n, где n — количество вершин подграфа.

Через $A = [a_{ij}]$ обозначим матрицу соседства вершин графа G. Это симметрическая матрица порядка $\alpha^{(0)}$, причем диагональные элементы являются степенями соответствующих вершин.

Однозначное отображение f [1] простой ломаной $L_m = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ в граф G, относящее вершине $a_l \in L_m$ вершину $a_{i_l}^{(0)} \in G$ $(l = 0, 1, \dots, m)$ называется *замыкающим гомоморфизмом* L_m в G с последовательностью значений

$$a_i^{(0)},\ a_{i_1}^{(0)},\ a_{i_2}^{(0)}, \dots, a_{i_{m-1}}^{(0)},\ a_i^{(0)}, \tag{1}$$

если

а) $f(a_0) = f(a_m) = a_i^{(0)}$;

б) при $f(a_q) \neq f(a_{q+1})$ ребру $a_q a_{q+1} \in L_m$ относится ребро $f(a_q) f(a_{q+1}) \in G$, $q = 0, 1, 2, \dots, m-1$;

в) при $f(a_p) = f(a_{p+1})$ ребру $a_p a_{p+1} \in L_m$ относится вершина $a_{i_p}^{(0)} = a_{i_{p+1}}^{(0)} \in G$.

Замыкающий гомоморфизм будет называться полным, если для него выполнены условия а), б) и

в′) $f(a_p) \neq f(a_q)$ при $p \neq q$, $p, q = 0, 1, \dots, m$; но $p \neq m$, если $q = 0$; $p \neq 0$, если $q = m$.

Полным прообразом вершины $a_p^{(0)}$ при f называется совокупность вершин и ребер из L_m, которую f отображает в $a_p^{(0)}$.

Полным прообразом ребра $a_p^{(0)} a_{p+1}^{(0)}$ при f будем называть совокупность ребер из L_m, которую f отображает в $a_p^{(0)} a_{p+1}^{(0)}$.

Произведения

$$a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i} \quad (i, i_1, \dots, i_{m-1} = 1, 2, \dots \alpha^{(0)}) \tag{2}$$

элементов матрицы A соседства вершин графа G ставятся во взаимно однозначное соответствие последовательностям (1) значений гомоморфизма L_m в G.

Показателем степени m графа G относительно вершин называется число

$$C_m^{(0)}(G) = \sum_{i, i_1, \dots, i_{m-1} = 1}^{\alpha^{(0)}} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{m-1} i}.$$

Как известно [1], число сомножителей произведения (2), равных a_{pp}, равно количеству ребер в полном прообразе вершины $a_p^{(0)}$ относительно замыкающего гомоморфизма $f(L_m) \in G$ с последовательностью значений (1), а число ненулевых слагаемых показателя $C_m^{(0)}(G)$ графа G степени m относительно вершин равно количеству ненулевых замыкающих гомоморфизмов L_m в G.

Теорема 1. *Если некоторый индекс сомножителей произведения* (2) *встречается в* (2) $2r$ $(r > 1)$ *раз, тогда замыкающий гомоморфизм* f *пере-*

водит r вершин ломаной L_m в одну и ту же вершину графа G

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$a_{ll_1}a_{l_1l_2}\dots a^1_{l_ik}a^1_{kl_{i+1}}\dots a_{l_jl_{j+1}}a_{l_{j+1}l_{j+2}}\dots a^r_{l_hk}a^r_{kl_{h+1}}\dots a_{l_{m-1}l}\neq 0.$$

По определению матрицы соседства вершин графа, сомножителям $a^1_{l_ik}$, $a^1_{kl_{i+1}};\dots;$ $a^r_{l_hk}a^r_{kl_{h+1}}$ соответствуют ребра $a^{(0)}_{l_i}\,a^{(0)}_k$, $a^{(0)}_k\,a^{(0)}_{l_{i+1}};\dots;$ $a^{(0)}_{l_h}\,a^{(0)}_k$, $a^{(0)}_k\,a^{(0)}_{l_{h+1}}$. Тогда по определению замыкающего гомоморфизма

$$a^{(0)}_{l_i}\,a^{(0)}_k=f(a_{i-1}a_i),\ a^{(0)}_k\,a^{(0)}_{l_{i+1}}=f(a_ia_{i+1});$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a^{(0)}_{l_h}\,a^{(0)}_k=f(a_{j-1}a_j),\ a^{(0)}_k\,a^{(0)}_{l_{h+1}}=f(a_ja_{j+1}).$$

Т. е. отображение f замыкающего гомоморфизма относит r вершин простой ломаной L_m одной и той же вершине $a^{(0)}_k$ графа G.

Теорема 2. *Если произведение* (2) *содержит $k\,(k>1)$ сомножителей, соответствующих одному и тому же ребру $a^{(0)}_p\,a^{(0)}_q$ графа G, то полный прообраз этого ребра относительно замыкающего гомоморфизма $f(L_m)$ в G состоит из k ребер ломаной L_m.*

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$a_{lm}a_{mq}\dots a^1_{pq}\dots a^{k-1}_{qp}\dots a_{st}\dots a^{k-j}_{pq}\dots a^k_{qp}\dots a_{vl}.$$

В последовательности (1) значений замыкающего гомоморфизма L_m в G сомножителям $a^1_{pq},\dots,a^{k-i}_{qp},\dots,a^{k-j}_{pq},\dots,a^k_{qp}$ соответствуют члены $a^{(0)}_{i_p}$, $a^{(0)}_{i_q};\dots;$ $a^{(0)}_{i_q}$, $a^{(0)}_{i_p};\dots;$ $a^{(0)}_{i_p}$, $a^{(0)}_{i_q};\dots;$ $a^{(0)}_{i_q}\,a^{(0)}_{i_p}$. По определению отображения f замыкающего гомоморфизма L_m в G

$$f(a^1_u)=a^{(0)}_{i_p},\ f(a^1_{u+1})=a^{(0)}_{i_q};\dots;\ f(a^{k-i}_s)=a^{(0)}_{i_q},\ f(a^{k-i}_{s+1})=a^{(0)}_{i_p};$$

$$\dots f(a^{k-j}_h)=a^{(0)}_{i_p},\ f(a^{k-j}_{h+1})=a^{(0)}_{i_q};\dots;\ f(a^k_z)=a^{(0)}_{i_q},\ f(a^k_{z+1})=a^{(0)}_{i_p}.$$

Т. е. полный прообраз ребра $a^{(0)}_{i_p}\,a^{(0)}_{i_q}$ графа G состоит из k ребер $a^1_u\,a^1_{u+1},\dots$ $\dots a^{k-i}_s\,a^{k-i}_{s+1},\dots,a^{k-j}_h\,a^{k-j}_{h+1},\dots,a^k_z\,a^k_{z+1}$ ломаной L_m.

Следствием изложенного выше является

Теорема 3. *Число полных замыкающих гомоморфизмов L_m в G равно количеству тех слагаемых суммы*

$$C^{(0)}_m(G)=\sum_{i,i_1,i_2,\dots,i_{m-1}=1}^{\alpha^{(0)}}a_{ii_1}a_{i_1i_2}\dots a_{i_{m-1}i},$$

которые останутся после исключения из нее:

а) *слагаемых, равных нулю;*

б) *слагаемых, у которых некоторый индекс сомножителей встречается $2r\ (r>1)$ раз и после приведения подобных членов.*

2. Выделение полных максимальных подграфов. 1) Запишем матрицу A соседства вершин графа G. По диагонали этой матрицы найдем вершины наибольшей степени. Предположим, что наибольшая степень равна p.

Если граф содержит $p+1$ или больше вершин степени p, то вычисляем показатель $C^{(0)}_{p+1}(G)$ графа G степени $_{p+1}$ относительно вершин. Количество полных замыкающих гомоморфизмов L_{p+1} в G равно числу слагаемых суммы $C^{(0)}_{p+1}(G)$, удовлетворяющих теореме. 3. Таким образом, мы получим g $(p+1)$-угольников, существующих в графе G. Индексы элементов соответствующих слагаемых показателя $C_{p+1}^{(0)}(G)$ указывают вершины, на которых расположены эти $(p+1)$-угольники.

Каждый из g $(p+1)$-угольников дополним до полного графа.

Обозначим через G_i $(i=1, 2, \ldots, g)$ граф, полученный в результате добавления к одному из упомянутых полных графов, оставшихся от графа G, $\alpha^0-(p+1)$ изолированных вершин. Для каждого из построенных графов G_i записываем матрицу соседства вершин. Полученную матрицу сравниваем с матрицей A соседства вершин данного графа G.

Если при сравнении окажется, что на месте хотя бы одного нуля матрицы A заданного графа G стоит единица в матрице соседства вершин графа G_i, то в полученном графе G_i содержатся ребра, отличные от ребер графа G. Т. е. в графе G нет полного подграфа, построенного на этих $p+1$ вершинах. Если этого не случится, то в графе G существует подграф H_{p+1}. Так будут найдены все полные подграфы графа G.

2) Предположим, что вершин степени p содержится в графе G меньше, чем $p+1$. В этом случае рассматриваем вершины степени $k\,(k \geqslant p-i)$, если их количество $l \geqslant p-i+1$ при наименьшем натуральном числе i, для которого выполняется это неравенство. Вычисляем показатель $C_{p-i+1}^{(0)}(G)$ и дальше поступаем так, как в предыдущем случае.

3) Пусть $C_{p+1}^{(0)}(G)=0$. Это означает, что в графе G не существует $(p+1)$-угольников, а тем более не существует и полных подграфов H_{p+1}. В этом случае поступаем согласно 2). Из изложенного выше следует теорема.

Теорема 4. *Если p — наибольшая степень вершин графа G, для которой выполняются условия*:

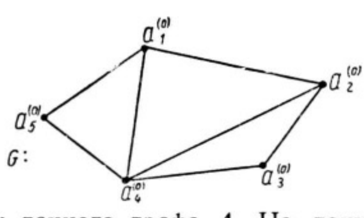
а) *количество вершин степени p и вершин высших степеней (если они существуют) больше или равно $p+1$ (p — наивысшая, степень для которой выполняется это условие)*;

б) *число слагаемых, удовлетворяющих теореме* 3, *показателя $C_{p+1}^{(0)}(G)$ отлично от нуля*;

в) *хотя бы одна из матриц соседства вершин графов $G_i (i=1, 2, \ldots g)$ не содержит единиц на месте нулей матрицы A соседства вершин графа G, то количество таких матриц равно числу полных максимальных подграфов графа G, а индексы элементов соответствующих слогаемых показателя $C_{p+1}^{(0)}(G)$ указывают вершины, на которых в графе G имеются такие подграфы.*

П р и м е р. Для этого графа G матрица A соседства вершин имеет вид

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$



Наивысшая степень вершин у данного графа 4. Но такую степень имеет только одна вершина. Итак, $p=4$ не удовлетворяет условию теоремы 4. Вершин степени 3 и больше имеется только три, что так же не удовлетворяет условию теоремы 4.

$p=2$. Вычисляем $C_3^{(0)}(G)$:

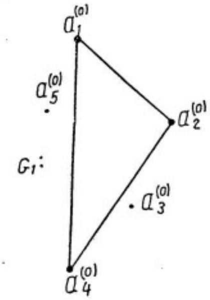
$$C_3^{(0)}(G)=\sum_{i,i_1,i_2=1}^{5} a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i}=\sum_{i,i_1}^{5}(a_{ii_1}a_{i_11}a_{1i}+a_{ii_1}a_{i_12}a_{2i}+a_{ii_1}a_{i_13}a_{3i}+$$
$$+a_{ii_1}a_{i_14}a_{4i}+a_{ii_1}a_{i_15}a_{5i}),$$

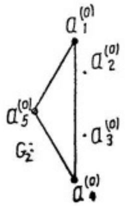
после выполнения операций согласно теореме 3 получим: $6a_{12}a_{24}a_{41}+$ $+4a_{14}a_{45}a_{51}+5a_{23}a_{34}a_{42}$.

Итак, граф G может содержать три полных подграфа H_3 на вершинах $\{a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_4^{(0)}\}$; $\{a_1^{(0)}, a_4^{(0)}, a_5^{(0)}\}$; $\{a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, a_4^{(0)}\}$.

На этих вершинах строим графы G_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$:

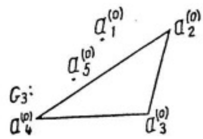
а) $\{a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}\}$: $A_а = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;





б) $\{a_1^{(0)}, a_4^{(0)}, a_5^{(0)}\}$; $A_б = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$;

в) $\{a_1^{(0)}, a_3^{(0)}, a_4^{(0)}\}$: $A_в = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.



Ни в одной из этих матриц не появились единицы на месте нулей в A. Значит, в заданном графе имеем три полных максимальных подграфа H_3, построенных, соответственно, на вершинах

$$\{a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_4^{(0)}\};\quad \{a_1^{(0)}, a_4^{(0)}, a_5^{(0)}\};\quad \{a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, a_4^{(0)}\}.$$

Выделение гамильтоновых циклов. *Гамильтонов цикл* — это цикл, проходящий через каждую вершину графа один и только один раз.

Отсюда, для выделения гамильтоновых циклов из заданного графа G нужно рассматривать отображение f полного замыкающего гомоморфизма простой ломаной $L_{\alpha^{(0)}} = (a_0, a_1, \ldots, a_{\alpha^{(0)}})$ в графе G. Число гамильтоновых циклов в графе G равно количеству слагаемых суммы

$$C_{\alpha^{(0)}}^{(0)}(G) = \sum_{i, i_1, \ldots, i_{\alpha^{(0)}-1}=1}^{\alpha^{(0)}} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{\alpha^{(0)}-1} i},$$

удовлетворяющих условиям теоремы 3; порядок индексов элементов каждого из таких слагаемых указывает путь прохождения гамильтоновых циклов.

3. Выделение гамильтоновых контуров. 1) Теперь будут рассматриваться ориентированные конечные графы без петель. Пусть вершинами такого графа G будут $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \ldots, a_{\alpha^{(0)}}^{(0)}$. Обозначим через a_{ij} число дуг, идущих из $a_i^{(0)}$ в $a_j^{(0)}$. Квадратная матрица $\mathfrak{A} = [a_{ij}]$ порядка $\alpha^{(0)}$ называется матрицей смежности ориентированного графа G. Диагональные элементы матрицы $\mathfrak{A}$ равны нулю, так как рассматривается граф без петель.

Контур $\mu = [a_0^{(0)}, a_1^{(0)}, \ldots, a_{\alpha^{(0)}}^{(0)}]$ называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую вершину и при том по одному разу (с тем лишь исключением, что $a_0^{(0)} = a_{\alpha^{(0)}}^{(0)}$).

Рассмотрим простую ориентированную ломаную L_m с дугами

$$[a_0 a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{m-1} a_m].$$

Однозначное отображение f простой ориентированной ломаной L_m в ориентированный граф G, относящее вершине $a_l \in L_m$ вершину $a_{i_l}^{(0)} \in G$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, m)$, будем называть *замыкающим гомоморфизмом* L_m в G с последовательностью значений

$$a_i^{(0)}, a_{i_1}^{(0)}, a_{i_2}^{(0)}, \ldots, a_{i_{m-1}}^{(0)}, a_i^{(0)}, \tag{3}$$

если

а) $f(a_0) = f(a_m) = a_i^{(0)}$;

б) при $f(a_q) \neq f(a_{q+1})$ дуге $a_q a_{q+1} \in L_m$ относится дуга $f(a_q) f(a_{q+1}) \in G$, $q = 0, 1, 2, \ldots, m-1$;

в) при $f(a_p) = f(a_{p+1})$ дуге $a_p a_{p+1} \in L_m$ относится вершина $a_{i_p}^{(0)} a_{i_{p+1}}^{(0)} \in G$.

Замыкающий гомоморфизм f будем называть полным, если для него выполняются условия а), б) и

в') $f(a_p) \neq f(a_q)$ при $p \neq q$, $p, q = 0, 1, \ldots, m$, но $p \neq m$, если $q = 0$ и $p \neq 0$ если $q = m$.

Произведения

$$a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{m-1} i} \quad (i, i_1, \ldots, i_{m-1} = 1, 2, \ldots, \alpha^{(0)}) \tag{4}$$

элементов матрицы $\mathfrak{A}$ смежности графа G ставятся во взаимно однозначное соответствие последовательностям (3) значений гомоморфизма L_m в G. *Показателем степени* m графа G относительно вершин называется целое число

$$C_m^{(0)}(G) = \sum_{i, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}=1}^{\alpha^{(0)}} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{m-1} i}.$$

Полным прообразом вершины $a_p^{(0)}$ при f называется совокупность вершин и дуг из L_m, которую f отображает в $a_p^{(0)}$.

Аналогично доказанному в [1] можно показать, что число сомножителей произведения (4), равных a_{pp}, равно количеству дуг в полном прообразе вершины $a_p^{(0)}$ относительно замыкающего гомоморфизма $f(L_m) \in G$ с последовательностью значений (3) и, аналогично доказательству теоремы 1, показать, что если некоторый индекс сомножителей произведения (4) встречается в (4) $2r$ $(r > 1)$ раз, то замыкающий гомоморфизм f переводит r вершин ломаной L_m в одну и ту же вершину графа G.

Из изложенного выше следует теорема.

Теорема 5. *Число полных замыкающих гомоморфизмов ориентированной ломаной L_m в ориентированный граф G равно количеству слагаемых суммы*

$$C_m^{(0)}(G) = \sum_{i, i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}=1}^{\alpha^{(0)}} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \ldots a_{i_{m-1} i}$$

после исключения из нее:

а) *слагаемых, равных нулю;*

б) *слагаемых, у которых некоторый индекс сомножителей встречается $2r$ $(r > 1)$ раз,*

и после приведения подобных членов.

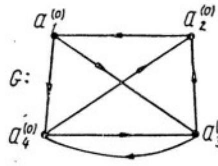
2) Для выделения гамильтоновых контуров записываем матрицу $\mathfrak{A}$ смежности заданного графа G. Число слагаемых сумм

$$C^{(0)}_{\alpha^{(0)}}(G)=\sum_{i,i_1,i_2,\ldots,i_{\alpha^{(0)}-1}=1}^{\alpha^{(0)}} a_{ii_1}a_{i_1i_2}\ldots a_{i_{\alpha^{(0)}-1}i},$$

отвечающих условиям теоремы 5, равно количеству гамильтоновых контуров в G; индексы элементов каждого слагаемого указывают путь прохождения контуров.

Пример:

$$\mathfrak{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&1&0\end{bmatrix};$$



$$C^{(0)}_4(G)=\sum_{i,i_1,i_2,i_3=1}^{4} a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}a_{i_3i}=\sum_{i,i_1,i_2=1}^{4}(a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_21}a_{1i}+a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_22}a_{2i}+$$

$$+a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_23}a_{3i}+a_{ii_1}a_{i_1i_2}a_{i_24}a_{41}),$$

после выполнения операций теоремы 5, получим $3a_{42}a_{21}a_{13}a_{34}+4a_{32}a_{21}a_{14}a_{43}$.

Таким образом, мы получили гамильтоновы контуры

$$\{a_1^{(0)}, a_3^{(0)}, a_4^{(0)}, a_2^{(0)}, a_1^{(0)}\}; \qquad \{a_1^{(0)}, a_4^{(0)}, a_3^{(0)}, a_2^{(0)}, a_1^{(0)}\}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Лихтенбаум, Теорема двойственности для неособенных графов, УМН, т. XIII, вып. 5 (83), 1958.

Поступила 16.IV 1966 г.
Киев