Об одном классе изометрических преобразований симплектического или ортогонального векторного пространства

И. К. Цикунов

В работах [6, 7] уже рассматривалась задача о строении изометрических преобразований в невырожденных билинейно-метрических пространствах с ортогональной или симплектической метрикой над произвольным полем характеристики $\neq 2$. Приведенная там теорема сведения позволяет при решении данной задачи ограничиться изучением всего лишь трех специальных классов этих преобразований.

В данной заметке приводятся результаты более подробного рассмотрения одного из упомянутых классов преобразований.

Итак, пусть V — невырожденное билинейно-метрическое пространство с ортогональной или симплектической метрикой над некоторым полем K характеристики $\neq 2$ [1], A — изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом $(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$, где $\nu = 1$ при симплектической метрике пространства V, $\nu = 0$ — при ортогональной (знак в полиноме берется или везде верхний, или везде нижний). Такое ограничение на степень характеристического полинома, а, следовательно, и на размерность пространства V, не является искусственным, поскольку для других степеней не существует невырожденных билинейно-метрических пространств с указанной метрикой. Этот факт доказан в статье [6], там же для пространств такого типа введено обозначение: $U(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$.

Строение только что определенных изометрических преобразований можно легко выяснить, воспользовавшись результатами Ю. Б. Ермолаева [5]. Однако, возникает задача взаимодействия этих преобразований, когда пространства $U(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$ объединяются в ортогональную сумму $V = U_1(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp U_2(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$, поскольку, вообще говоря, нет однозначности разложения. При помощи введения понятия индикаторной матрицы задача решается для произвольного совершенного поля K характеристики $\neq 2$ (ограничение взято из работы Ю. Б. Ермолаева [5]).

Определение 1. *Пусть* Γ — *некоторая матрица Грама невырожденного билинейно-метрического пространства* V *над некоторым совершенным полем* K *характеристики* $\neq 2$, A — *изометрическое преобразование этого пространства с характеристическим полиномом* $f(\lambda) = (\lambda \pm 1)_1^{2k-\nu+1} \cdot (\lambda \pm 1)_2^{2k-\nu+1} \cdot \ldots \cdot (\lambda \pm 1)_l^{2k-\nu+1}$ ($(\lambda \pm 1)_i^{2k-\nu+1}$ — *элементарные делители*), *тогда матрицу*

$$X = \frac{1}{(\pm 2)^{2k-\nu}} \begin{pmatrix} (d_1, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_1) & (d_1, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_2) & \ldots\ldots & (d_1, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_l) \\ (d_2, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_1) & (d_2, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_2) & \ldots\ldots & (d_2, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_l) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (d_l, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_1) & (d_l, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_2) & \ldots\ldots & (d_l, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_l) \end{pmatrix},$$

составленную из скалярных произведений вида $(d_i, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, l)$, *где* $(A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_1, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_2, \ldots, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_l$ — *произвольная линейно независимая система векторов* $(d_1, d_2, \ldots, d_l \in V)$, *назовем индикаторной для матрицы* Γ *и преобразования* A.

Как легко видеть, векторы $d_1, d_2, \ldots, d_l$ из этого определения представляют собой любой набор векторов из пространства $V = U_1(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp U_2(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$, для которых можно построить базис следующего вида: $d_1, (A \pm \mathscr{E}) d_1, (A \pm \mathscr{E})^2 d_1, \ldots, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_1, d_2, (A \pm \mathscr{E}) d_2, \ldots, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_2, \ldots, d_l, (A \pm \mathscr{E}) d_l, \ldots, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_l$ (см. о корневых векторах [1]).

Из определения матрицы X следует, что она будет симметрической; в частности, если векторы $d_1, d_2, \ldots, d_l$ выбрать так, чтобы совокупность $d_i, (A \pm \mathscr{E}) d_i, \ldots, (A \pm \mathscr{E})^{2k-\nu} d_i$ представляла собой базис $U_i(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$, то матрица X станет диагональной.

Из теории симметрических матриц над некоторым полем K известно [3], что классы конгруэнтных между собой симметрических матриц данного порядка (классы Витта) образуют группу, которую называют группой Витта. Учитывая это замечание, введем следующее определение.

Определение 2. *Назовем сигнатурой характеристического полинома* $f(\lambda)$ *преобразования* A — *класс Витта индикаторной матрицы, построенной для матрицы Грама* Γ *пространства* V *и преобразования* A.

При помощи громоздких, но принципиально не трудных матричных вычислений можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Строение изометрического преобразования* A *пространства* $V = U_1(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp U_2(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$ *определяется с точностью до изоморфизма характеристическим полиномом* $f(\lambda)$ *преобразования* A, *равным* $(\lambda \pm 1)_1^{2k-\nu+1} \cdot (\lambda \pm 1)_2^{2k-\nu+1} \cdot \ldots \cdot (\lambda \pm 1)_l^{2k-\nu+1}$, *и сигнатурой этого характеристического полинома.*

Таким образом, строение изометрических преобразований в пространствах данного типа известно для тех полей, для которых разработана теория одной квадратичной формы (известна группа Витта).

В качестве канонической формы для матрицы преобразования A можно предложить следующую матрицу:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{A} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{A} \end{pmatrix}}^{l},$$

где матрица A равна

$$\mathrm{A} = -(\mathrm{E}+\mathrm{B})^{-1}(\mathrm{E}-\mathrm{B}), \quad \text{если} \quad V = U_1(\lambda+1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda+1)^{2k-\nu+1};$$

$$\mathrm{A} = (\mathrm{E}+\mathrm{B})^{-1}(\mathrm{E}-\mathrm{B}), \quad \text{если} \quad V = U_1(\lambda-1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda-1)^{2k-\nu+1};$$

и

$$\mathrm{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}}^{2k-\nu+1}.$$

Канонические формы для матрицы Грама выбираются в зависимости от выбора канонических форм для индикаторной матрицы. Если каноническая форма индикаторной матрицы равна

$$\begin{pmatrix} \chi_1 & & & \\ & \chi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \chi_l \end{pmatrix},$$

то каноническая форма матрицы Грама имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \chi_1\Gamma_1 & & & \\ & \chi_2\Gamma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \chi_l\Gamma_1 \end{pmatrix},$$

где

$$\Gamma_1 = \overbrace{\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & -1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \\ (-1)^{2k-\nu} & & & & \end{pmatrix}}^{2k-\nu+1}.$$

В качестве примера можно предложить канонические формы матриц Грама пространств $V = U_1(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp U_2(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1} \perp \ldots \perp U_l(\lambda \pm 1)^{2k-\nu+1}$ для конечного поля $GF(q)$ характеристики $\neq 2$.

Как известно [2], группа Витта в случае конечного поля представляет собой или группу Клейна, если -1 — квадрат в поле $GF(q)$; или циклическую группу четвертого порядка, если -1 — неквадрат. Это легко проверить, используя выписанные ниже канонические формы для индикаторных матриц, которые являются ни чем иным, как представителями классов Витта.

Канонические формы индикаторной матрицы.

Канонические формы матриц Грама.

$$l = 2n, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & (-1)^{l-2} & \\ & & & & & & (-1)^{l-1} \end{pmatrix}}^{l},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & \\ & -\Gamma_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{l-1}\Gamma_1 \end{pmatrix},$$

$$l = 2n+1, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (-1)^{2n-2} & & \\ & & & & (-1)^{2n-1} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}^{l},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & & & \\ & -\Gamma_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & (-1)^{2n-1}\Gamma_1 & \\ & & & & & \Gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$= 2n+1, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (-1)^{2n-2} & & \\ & & & & (-1)^{2n-1} & \\ & & & & & \delta \end{pmatrix}}^{l},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & & & \\ & -\Gamma_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & (-1)^{2n-1}\Gamma_1 & \\ & & & & & \delta\Gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$= 2n+2, \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & -1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (-1)^{2n-1} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & -\delta \end{pmatrix}}^{l},$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & & & & & & \\ & -\Gamma_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & (-1)^{2n-1}\Gamma_1 & & \\ & & & & & \Gamma_1 & \\ & & & & & & -\delta\Gamma_1 \end{pmatrix}$$

Здесь δ — квадратичный невычет в поле $GF(q)$.

Полное изложение данного вопроса помещено в кандидатской диссертации автора.

Полученные результаты согласуются с ранее известными [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М., 1956.
2. E. Artin, Geometric algebra, Interscience Publishers Inc., New York, 1957
3. В. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, Теория чисел, изд-во «Наука» М., 1964.

4. И. М. Я г л о м, Квадратические и кососимметрические билинейные формы в вещественных симплектических пространствах, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 8, 1950.
5. Ю. Б. Е р м о л а е в, О парах билинейных форм, Канд. диссертация, 1963.
6. И. К. Ц и к у н о в, О строении изометрических преобразований симплектического или ортогонального векторного пространства, УМЖ, № 3.
7. И. К. Ц и к у н о в, О строении изометрических преобразований симплектического и ортогонального векторного пространства, ДАН СССР, № 165, в. 3, 1965.

Поступила 13.III 1965 г.
Киев