Непрерывное отображение на множестве предельных точек итерационной последовательности

А. Н. Шарковский

В заметке дается доказательство утверждений, сформулированных в [1] и касающихся свойств отображения на множестве ω-предельных точек итерационной последовательности. Соответствующие определения даны в [1].

Рассматривается непрерывное однозначное отображение T произвольного компакта E в себя. Множество ω-предельных точек итерационной последовательности $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$, $x_i = T^i x$, $x \in E$, обозначается Ω_x. Множество $\Omega = \Omega_x$ замкнуто и, как легко видеть, $T\Omega = \Omega$.

1. *Если множество Ω не более чем счетно, то в Ω содержится хотя бы один цикл отображения T.*

В самом деле, построим последовательность множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_\alpha \supseteq \supseteq \ldots, \alpha < \omega_1$, следующим образом. $F_1 = \Omega$, $F_\alpha = \Omega_y$, где y — произвольная точка множества $F_{\alpha-1}$, или, если α—число второго рода, $F_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} F_\beta$. Множества F_α при любом α содержит изолированные в F_α точки. $F_\alpha = F_{\alpha+1}$ тогда и только тогда, когда точки множества F_α образуют цикл. По теореме Бэра—Хаусдорфа такой номер $\alpha < \omega_1$ всегда существует.

Если Ω несчетно, то в нем может и не быть циклов.

2. Теорема 1. *Если U — открытое в Ω множество, причем $U \neq \Omega$, то замыкание множества TU не содержится в U.*

Допустим противное: замыкание множества TU содержится в U. В таком случае найдется открытое в E множество G такое, что $\overline{TU} \subseteq G$, $\Omega \setminus U \subseteq E \setminus \overline{G}$, где через $\overline{TU}$, $\overline{G}$ обозначены замыкания множеств TU, G. По предположению, если $y \in \Omega \cap \overline{G}$, то $Ty \in G$. Но это невозможно. В самом деле, так как множества $\overline{TU}$ и $\Omega \setminus U$ не пусты и $\overline{TU} \subseteq G$, $\Omega \setminus U \subseteq \subseteq E \setminus \overline{G}$, для любого $n > 0$ найдутся i', $i'' > n$ такие, что $T^{i'} x \in G$, $T^{i''} x \in \in E \setminus \overline{G}$. Следовательно, существует бесконечная последовательность целых положительных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ таких, что $x_{i_k} \in \overline{G}$, $Tx_{i_k} \in E \setminus \overline{G}$. Найдется точка $y \in \Omega$, во всякой окрестности которой (в компакте E) есть точки последовательности $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, $y \in \Omega \cap \overline{G}$, а Ty принадлежит замыканию $E \setminus \overline{G}$, т. е. $E \setminus G$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 2. *Если множество Ω бесконечно и $x_i \in \Omega$ при $i \geqslant i_0$, то для любого открытого в Ω множества U производное множество множества $\bigcup_{i=0}^{\infty} T^i U$ есть Ω.*

Действительно, так как $x_i \in \Omega$ при $i \geqslant i_0$, точки x_i, $i = i_0, i_0 + 1, \ldots,$

лежат в Ω всюду плотно и всякое открытое в Ω множество U содержит по крайней мере одну точку последовательности $\{x_i\}$.

3. Теоремы 1 и 2 полностью характеризуют отображение на множестве Ω. Под этим понимается следующее.

А. Если задано непрерывное отображение T компакта E в себя так, что на замкнутом множестве Ω $T\Omega = \Omega$ и справедливо утверждение теоремы 2, то найдется точка $x \in \Omega$ такая, что $\Omega_x = \Omega$.

В самом деле, предположим $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть открытая база пространства Ω. Построим последовательность замкнутых множеств $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots$ следующим образом. Пусть $F_1 \subseteq \Omega$ — произвольное замкнутое множество, содержащее открытое в Ω подмножество. Если множество F_{k-1}, $k > 1$, содержащее открытое в Ω подмножество, построено, множество F_k строится так. Берем открытое в Ω множество $U_k \subset F_{k-1}$. Множества σ_k и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T^i U_k$ пересекаются (следует из утверждения теоремы 2) и, значит, существует такое i_k, что $\sigma_k \cap T^{i_k} U_k$ не пусто. Найдется замкнутое множество $F_k \subset U_k$, содержащее открытое в Ω подмножество и такое, что $T^{i_k} F_k \subseteq \subseteq \sigma_k \cap T^{i_k} U_k$; это множество и есть требуемое.

Если $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, то множество $\{T^i x\}_{i=0}^{\infty}$ лежит в Ω всюду плотно.

Б. Если на замкнутом множестве $\Omega \subset E$, не содержащем никакого открытого в E подмножества, задано непрерывное отображение T так, что $T\Omega = \Omega$ и справедлива теорема 1, то отображение T можно продолжить на замкнутое множество E', $\Omega \subset E' \subseteq E$, так, что отображение T на E' будет непрерывно и найдется точка $x \in E'$ такая, что $\Omega_x = \Omega$.

Продолжить отображение T с E' на весь компакт E, если $E' \neq E$, можно далеко не всегда. Некоторые условия, при которых это все же возможно сделать, можно указать. Например, если существует множество $E'' \subseteq E$, содержащее E' и гомеоморфное некоторому параллелепипеду в гильбертовом кирпиче, то такое продолжение отображения осуществимо, как это следует из леммы Урысона о продолжении непрерывной функции.

Остается неясным, если продолжение с множества Ω на E осуществимо с сохранением непрерывности отображения, то всегда ли существует такое продолжение, при котором имеется точка $x \in E$ такая, что $\Omega_x = \Omega$.

Покажем, как строится множество E' и отображение T на нем.

Предположим, $\Sigma = \{\sigma_i\}_{i=1}^{k}$ — конечное покрытие множества Ω открытыми в E множествами σ_i, причем $\sigma_i \cap \Omega$, $i = 1, \ldots, k$, не пусты. По теореме 1 множество $T(\Omega \cap \sigma_j)$ пересекается по крайней мере с одним из множеств σ_i, $i \neq j$, $\left(\text{множество } \Omega \cap \left(E \setminus \bigcup\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \sigma_i\right) \text{ замкнуто и содержится в } \Omega \cap \sigma_j\right)$. Пусть $T(\Omega \cap \sigma_j)$ пересекается с $\sigma_{j'}$. Множество $T(\Omega \cap \sigma_{j'})$ пересекается либо хотя бы с одним из множеств σ_i, $i \neq j, j'$, либо с множеством σ_j. В последнем случае $T(\Omega \cap \sigma_j)$ пересекается с одним из σ_i, $i \neq j$, j', поскольку с одним из σ_i, $i \neq j, j'$ пересекается множество $T(\Omega \cap (\sigma_j \cup \sigma_{j'}))$. Таким образом, если σ_{j_1}, $\sigma_{j_2} \in \Sigma$, найдется цепочка $\sigma^{(0)} = \sigma_{j_1}, \sigma^{(1)}, \ldots, \sigma^{(m)} = = \sigma_{j_2}$, $\sigma^{(i)} \in \Sigma$, $i = 0, 1, \ldots, m$, такая, что множества $T(\Omega \cap \sigma^{(i)}) \cap \sigma^{(i+1)}$, $i = 0, 1, \ldots, m-1$, не пусты. В частности, можно построить цепочку, назовем ее K-цепочкой, содержащую все множества σ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, причем так, что каждое σ_i входит в K не более чем $k-1$ раз. K-цепочка определена неоднозначно. Число элементов σ_i, входящих в любую K-цепочку не превосходит, например, k^2.

Возьмем систему открытых множеств $\Sigma^0 = \{\sigma_i^s\}$, $i = 1, 2, \ldots, k_s < \infty$, $s = 1, 2, \ldots$, обладающую следующими свойствами:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{k_s} \sigma_i^s \supset \Omega$, $s = 1, 2, \ldots$;

2) $\sigma_i^s \cap \Omega \neq \varnothing$ при любых i и s;

3) для любого замкнутого множества $F \subseteq \Omega \bigcap\limits_{s=1}^{\infty} B_s(F) = F$, где $B_s(F) = \bigcup\limits_{\substack{\sigma \in \Sigma^s \\ \sigma \cap F \neq \varnothing}} \sigma$, $\Sigma^s = \{\sigma_i^s\}_{i=1}^{s}$;

4) каждое из множеств $\sigma_i^s \setminus B_{s+1}(\Omega)$ содержит не менее k_s^2 точек компакта E.

Построим цепочку K_1 для системы Σ^1, начиная с произвольного $\sigma_{i_1'} \in \Sigma^1$. Пусть $\sigma_{i_1''}$ — последний элемент цепочки K_1 и $T(\Omega \cap \sigma_{i_1''})$ пересекается с элементом $\sigma_{i_2'} \in \Sigma^2$. Построим цепочку K_2 для системы Σ^2, начиная с элемента $\sigma_{i_2'}$ и т. д. Получим последовательность, состоящую из цепочек, $K_1, K_2, K_3, \ldots$ Заменив каждую цепочку последовательностью множеств, из которых она состоит, и произведя переобозначение множеств, получим последовательность множеств $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3', \ldots$ (среди них могут быть и совпадающие) такую, что $\sigma_i' \in \Sigma^0$, $T(\Omega \cap \sigma_i') \cap \sigma_{i+1}'$ не пусто, $\sigma_j^s \in \{\sigma_i'\}_{i=1}^{\infty}$, $j = 1, 2, \ldots, k_s$, $s = 1, 2, \ldots$ В каждом множестве σ_i', $i = 1, 2, \ldots$, отметим точку x_i так, что $x_i \neq x_m$, $m < i$, и, если $\sigma_i' \in \Sigma^r$, то $x_i \bar{\in} \sigma_j^s$, $s > r$, $j = 1, 2, \ldots, k_s$. Полагаем $E' = \Omega \cup \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $Tx_i = x_{i+1}$. Множество предельных точек последовательности $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть Ω. Остается показать, что на E' отображение T непрерывно.

В точках x_i, $i = 1, 2, \ldots$, T непрерывно. Пусть $x \in \Omega$ и $Tx = y$. Покажем, что для любой окрестности U точки y (в пространстве E') найдется окрестность V точки x такая, что $TV \subseteq U$.

Если $\sigma' \in \Sigma^s, V' = \bigcup\limits_{\substack{\sigma \in \Sigma^s \\ \sigma \cap \sigma' \neq \varnothing}} \sigma$, $U' = \bigcup\limits_{\substack{\sigma \in \Sigma^s \\ \sigma \cap T(\Omega \cap V') \neq \varnothing}} \sigma$, то согласно построению $T(E' \cap \sigma') \subset E' \cap U'$.

Пусть открытые в E множества G_1, G_2, G_3 и их замыкания F_1, F_2, F_3 таковы, что $x \in G_1$, $F_1 \subset G_2$, $F_2 \subset G_3$, $T(\Omega \cap F_3) \subset U$. Найдутся 1) номер s_1 такой, что $B_{s_1}(x) \subseteq G_1$, 2) номер s_2 такой, что $B_{s_2}(F_1) \subseteq G_2$, 3) номер s_3 такой, что $B_{s_3}(T(\Omega \cap F_3)) \cap E' \subseteq U$. Если положить $V = B_{s_0}(x) \cap E'$, где $s_0 = \max\{s_1, s_2, s_3\}$, то $TV \subseteq U$. Итак, отображение T на E' непрерывно.

4. Представляет интерес выяснить структуру множества Ω. Задачу можно сформулировать и так: какова структура замкнутого множества $\Omega \subseteq E$, если на множестве Ω можно построить непрерывное отображение T так, что $T\Omega = \Omega$ и на Ω справедлива теорема 1) или 2).

Здесь можно отметить следующий результат: *если компакт E локально связен и множество Ω предельных точек итерационной последовательности имеет внутренние относительно E точки, то $\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \Omega^{(j)}$, где $\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(k)}$ — связные замкнутые множества, не имеющие общих точек, и $T\Omega^{(j)} = \Omega^{(j+1)}$, $j = 1, 2, \ldots, k-1$, $T\Omega^{(k)} = \Omega^{(1)}$.*

Действительно, пусть x—внутренняя (относительно E) точка множества Ω, $\Omega^{(1)}$— компонента множества Ω, содержащая точку x. Множества $T^j\Omega^{(1)}$, $j=1, 2, \ldots$ связны и принадлежат Ω. Каждое из них либо не имеет общих точек с $\Omega^{(1)}$, либо содержится в $\Omega^{(1)}$. Поскольку E локально связно, $\Omega^{(1)}$ содержит открытое (в E) подмножество и, следовательно, множеству $\Omega^{(1)}$ принадлежат по крайней мере две точки итерационной последовательности. Итак, существует такое k, что $T^{(k)}\Omega^{(1)}\subseteq\Omega^{(1)}$. Предположим, k—наименьший номер j, при котором $T^j\Omega^{(1)}\subseteq\Omega^{(1)}$. Множества $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}=T\Omega^{(1)}, \ldots, \Omega^{(k)}=T\Omega^{(k-1)}$ не имеют общих точек. Все точки итерационной последовательности, начиная с некоторого номера, принадлежат $\bigcup_{j=1}^{k}\Omega^{(j)}$ и, следовательно, $T\Omega^{(k)}=\Omega^{(1)}$, $\bigcup_{j=1}^{k}\Omega^{(j)}=\Omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Шарковский, О притягивающих и притягивающихся множествах, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.

Поступила 23.V 1964 г.
Киев