О принципах подсчета числа графов

А. Е. Юрцунь

1. Метод Пойя [3] дает возможность находить количество неизоморфных графов с n вершинами и p ребрами посредством многочлена $g_n(x) = \sum_{p=1}^{n(n-1)/2} g_{np} x^p$.

Таким образом, для фиксированного p необходимо вычислить весь многочлен $g_n(x)$.

В данной статье на основании работы Риге (см. [1], Дополнение) находится формула, дающая возможность определить число неизоморфных графов (а также диграфов), не прибегая к вычислению всего многочлена.

Наша терминология совпадает с терминологией Риге.

Пусть Z — конечное множество элементов, e — некоторая эквивалентность на множестве Z.

Обозначим через Z/e множество классов эквивалентности, а через e_h и e_H — эквивалентности на множестве Z, индуцированные соответственно некоторой подстановкой h элементов множества Z и группой H подстановок того же множества.

Разбиение ϱ определим как однозначное отображение конечного множества $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, s$ натуральных чисел в множество всех натуральных чисел N и запишем:

$$\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}, \qquad i = 1, 2, \dots, s.$$

В дальнейшем используем следующие функции разбиения [1]:

$$d(\varrho) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i, \qquad \omega(\varrho) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \lambda_i, \tag{1}$$

$$v(\varrho) = \prod_{i=1}^{s} (\alpha_i!), \qquad c(\varrho) = \frac{\omega(\varrho)!}{\prod_{i=1}^{s} (\lambda_i!)^{\alpha_i}}, \tag{2}$$

$$p(\varrho) = \frac{d(\varrho)!}{v(\varrho)}, \qquad \tau(\varrho) = \frac{c(\varrho) \cdot p(\varrho)}{d(\varrho)!}, \tag{3}$$

$$\varphi(\varrho) = \frac{\omega(\varrho)!}{\prod_{i=1}^{s} (\lambda_i)^{\alpha_i} \alpha_i!}. \tag{4}$$

Пусть $r[e]$ — разбиение, связанное с некоторой эквивалентностью e; $f_H(\varrho)$ — циклический индекс группы подстановок H.

Для нахождения числа классов эквивалентности $|Z/e|$ используем следующие формулы (см., например [1]):

$$|Z/e_H| = \frac{1}{|H|} \cdot \sum_{h \in H} |Z_h|, \tag{5}$$

где $|Z_h| = |\{z : z \in Z,\ h(z) = z\}|$ (теорема Фробениуса), и

$$|Z/e_H| = \sum_{\omega(\varrho) = |Z|} f_H(\varrho)\, \varrho(1). \tag{6}$$

2. Пусть X — конечный алфавит. Всякое слово m в этом алфавите можно рассматривать как однозначное отображение интервала $I_l = \{1, 2, \ldots, l\}$ (где l—длина слова) в алфавит X.

Через e_m обозначим эквивалентность на интервале I_l, индуцированную многозначным отображением $m^{-1}m$.

Типом слова m назовем разбиение $\varrho_m = r[m^{-1}m] = r[e_m]$. Очевидно, $d(\varrho_m) = |\{x : x \in X,\ x \in m\}|$ и $\omega(\varrho_m) = l$.

Степень δm слова m — это однозначное отображение ν алфавита X (или $Y \in X$) в множество натуральных чисел N:

$$\nu = \delta m = |\{j : j \in I_l,\ m(j) = x \in X\}|. \tag{7}$$

Очевидно, $\varrho_m = \delta\delta m = \delta\nu$.

Пусть E_l — множество всех возможных различных эквивалентностей на интервале I_l. Легко видеть [5], что

$$|\{e : e \in E_l, r[e] = \varrho\}| = \tau(\varrho). \tag{8}$$

Тогда

$$|E_l| = \sum_{\omega(\varrho) = l} \tau(\varrho). \tag{9}$$

Рассмотрим следующие множества слов в алфавите X:

$$\begin{aligned}
&S(X) = \{m : d(\varrho_m) = |X|\},\\
&S_l(X) = \{m : d(\varrho_m) \leqslant |X|,\ \omega(\varrho_m) = l \in N\},\\
&M_l(X) = \{m : m \in S_l(X),\ d(\varrho_m) = |X|\},\\
&M_\nu(X) = \{m : m \in S_l(X),\ \delta m = \nu\},\\
&M_\varrho(X) = \{m : m \in S_l(X),\ \delta\delta m = \varrho_m = \varrho\},\\
&M_e(X) = \{m : m \in S_l(X),\ m^{-1}m = e\}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Используя функции разбиения п. 1, можно записать формулы, характеризующие количественно множества слов (10), как сделано в [5] для $M_l(X)$.

Кроме того, если X и ϱ заданы так, что $d(\varrho) = b < |X|$, то

$$|\{m : m \in S_l(X), \delta\delta m = \varrho\}| = \tau(\varrho) \frac{|X|!}{(|X| - b)!} = |M_\varrho(X)|, \tag{11}$$

а при $d(\varrho) = |X|$ — будет

$$|\{m : m \in S_l(X), \delta\delta m = \varrho\}| = d(\varrho)!\, \tau(\varrho) = |X|!\, \tau(\varrho).$$

Пусть заданы X и ϱ так, что $d(\varrho) \leqslant |X|$, тогда

$$|\{\nu : \nu = \delta m, m \in S_l(X), \delta\nu = \delta\delta m = \varrho\}| = p(\varrho). \tag{12}$$

На основании (11) можем записать:

$$|M_l(X)| = |X|! \sum_{\substack{d(\varrho)=|X| \\ \omega(\varrho)=l}} \tau(\varrho) = \sum_{\substack{d(\varrho)=|X| \\ \omega(\varrho)=l}} p(\varrho) \cdot c(\varrho). \tag{13}$$

Используя (12), получим:

$$|\{\nu : d(\delta\nu) = |X|, \omega(\delta\nu) = l\}| = \sum_{\substack{d(\varrho)=|X| \\ \omega(\varrho)=l}} p(\varrho) = \binom{l-1}{|X|-1}. \tag{14}$$

Легко также показать, что

$$|S(X)| = \sum_{l=|X|}^{\infty} |M_l(X)| = \sum_{l=|X|}^{\infty} |X|! \sum_{\substack{d(\varrho)=|X| \\ \omega(\varrho)=l}} \tau(\varrho), \tag{15}$$

$$|S_l(X)| = |X|^l, \tag{16}$$

$$|\{\nu : \delta m = \nu, m \in S_l(X)\}| = \sum_{q=1}^{l} \binom{|X|}{q} \cdot \binom{l-1}{q-1} \tag{17}$$

при $l \leqslant |X|$, и

$$|\{\nu : \delta m = \nu, m \in S_l(X)\}| = \sum_{q=1}^{|X|} \binom{|X|}{q} \cdot \binom{l-1}{q-1} \tag{18}$$

при $l > |X|$.

3. Пусть H_l — группа подстановок интервала I_l, $h \in H_l$ и $\overline{H}_l$ — продолжение группы H_l на некоторое множество слов (например, на $S_l(X)$), подстановки $\overline{h} \in \overline{H}_l$ которой находим так:

$$\overline{h}(m) = m \cdot h \qquad |m \in S_l(X)|.$$

Через $S_{l,h}(X)$ обозначим множество слов, для которых $m^{-1}m \supset e_h$. Аналогично предложению 8 из [1], стр. 284, доказывается теорема.

Теорема 1. *Если задана подстановка $h \in H_l$ интервала I_l, то множество слов $m \in S_l(X)$, инвариантных относительно подстановки $\overline{h}$, есть $S_{l,h}(X)$.*

На основании формулы (5) справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $S_l(X)$ — множество слов длины $l \in N$, H_l — группа подстановок интервала I_l, $\overline{H_l}$ — продолжение группы H_l на $S_l(X)$. Тогда*

$$|S_l(X)/e_{\overline{H}_l}| = \frac{1}{|H_l|} \sum_{h \in H_l} |S_{l,h}(X)|.$$

В [1] показано, что число $|S_{l,h}(X)|$ зависит от разбиений $\varrho_m = r[e_m]$ и $\varrho = r[e_h]$, поэтому можно записать:

$$|S_{l,h}(X)| = F(\varrho_m, \varrho).$$

Тогда формула теоремы 2 примет вид

$$|S_l(X)|\, e_{\overline{H}_l} = \sum_{\omega(\varrho)=l} f_{Hl}(\varrho)\cdot F(\varrho_m, \varrho). \tag{19}$$

Граф G будем рассматривать как множество n вершин вместе с некоторым подмножеством $p \leqslant l = \dfrac{n(n-1)}{2}$ ребер, соединяющих пары вершин.

Граф $G_{n,p}$ с n вершинами и $0 \leqslant p \leqslant l$ ребрами представим словом m длины l в алфавите $X = \{x_0, x_1\}$, где x_1 обозначает пару смежных вершин, а x_0 — пару несмежных.

Используя формулу (19), можно находить числа неизоморфных графов $G_{n,p}$ с заданными n и p, числа различных типов подграфов или частичных графов данного графа, удовлетворяющих некоторым условиям, и др.

Так, например, для подсчета числа неизоморфных подграфов графа $G_{n,l}$ находим сначала циклический индекс группы H_l. Типы и количество подстановок каждого типа группы H_l можно найти как соответственные типам подстановок симметрической группы H_n. При этом $|H_n| = |H_l|$.

Пусть $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ — некоторый тип подстановок группы H_n. Количество подстановок в H_n (а значит, и в H_l) данного типа находим по формуле (4) п. 1.

При нахождении соответственного типа $\varrho' = \{\lambda_i'^{\alpha_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ подстановок группы H_l возможны два случая: 1) числа $\lambda_i = 2k + 1$ нечетные и 2) числа $\lambda_i = 2k$ четные.

Найдем сначала вид разбиения ϱ' при условии, что $\varrho = (\lambda^\alpha)$.

Очевидно, что в первом случае

$$\varrho = (\lambda_1^{\alpha_1}) = (2k+1)^{\alpha_1} \to \varrho' = (\lambda_1'^{\alpha_1}) = (2k+1)^{k\alpha_1 + (2k+1)\binom{\alpha_1}{2}}, \tag{20}$$

а во втором

$$\varrho = (\lambda_2^{\alpha_2}) = (2k)^{\alpha_2} \to \varrho' = [k(2k)^{k-1}]^{\alpha_2}(2k)^{2k\binom{\alpha_2}{2}}. \tag{21}$$

Если разбиение ϱ состоит из двух частей, то

$$\varrho = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}) \to \varrho' = [\text{нок}\ (\lambda_1,\ \lambda_2)]^{\alpha_1\alpha_2 \text{нод}(\lambda_1,\lambda_2)}. \tag{22}$$

Тогда общий вид разбиения ϱ', соответствующего разбиению $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$, будет следующий:

$$\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\} \to \varrho' = \prod_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (2k+1)^{k\alpha_i + (2k+1)\binom{\alpha_i}{2}} \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} [k(2k)^{k-1}]^{\alpha_j}(2k)^{2k\binom{\alpha_j}{2}} \times$$

$$\times \prod_{1 \leqslant \lambda_i < \lambda_j \leqslant n} [\text{нок}(\lambda_i,\ \lambda_j)]^{\alpha_i\alpha_j \text{нод}(\lambda_i,\lambda_j)}\ . \tag{23}$$

Найдем значение функции $F(\varrho_m, \varrho)$ в случае, когда $X = \{x_0, x_1\}$.

Во-первых, $|S_l(X)| = 2^l$,

$$|\{e : m^{-1}m = e,\ m \in S_l(X)\}| = 2^{l-1}, \tag{24}$$

$$|\{\varrho_m : r\,[m^{-1}m] = \varrho_{\boldsymbol{m}} = \delta\delta m,\ m \in S_l(X)\}| = \left[\frac{l}{2}\right] + 1. \tag{25}$$

Общий вид разбиений $\varrho_m - (k, l-k)$, $k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{l}{2}\right]$. Можем записать

$$F(\varrho_m, \varrho) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} F(k, l-k; \varrho)$$

для каждого ϱ.

В случае $\varrho = (\lambda_1^{\alpha_1})$ имеем

$$F(k, l-k; \lambda_1^{\alpha_1}) = \binom{|X|}{d(k, l-k)} \cdot p(k, l-k) \cdot \binom{\alpha_1}{z_1} \tag{26}$$

где $\lambda_1 z_1 = k$.

Для случая, когда $\varrho = (\lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_1})$ получим

$$F(k, l-k; \lambda_1^{\alpha_1}, \lambda_2^{\alpha_2}) = \binom{|X|}{d(k, l-k)} p(k, l-k). \sum_{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = k} \binom{\alpha_1}{z_1} \binom{\alpha_2}{z_2}. \tag{27}$$

Для общего случая $\varrho = \{\lambda_i^{\alpha_i}\}$, $i = 1, 2, \ldots, s$ имеем

$$F(k, l-k; \varrho) = \binom{|X|}{d(k, l-k)} p(k, l-k). \sum_{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_s z_s = k} \binom{\alpha_1}{z_1} \ldots \binom{\alpha_s}{z_s} \tag{28}$$

и формула подсчета (19), при $X = \{x_0, x_1\}$, примет вид

$$|S_l(X)/e_{\overline{H}_l} = \sum_{\omega(\varrho)=l} f_{H_l}(\varrho) \sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \binom{|X|}{d(k, l-k)} \cdot p(k, l-k), \sum_{\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_s z_s = k} \binom{\alpha_1}{z_1} \ldots \binom{\alpha_s}{z_s}. \tag{29}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж, Теория графов и ее применение, ИЛ, М., 1962.
2. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. G. Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math., **68**, 1937.
4. F. Harary, The number of linear directed rooted and connected graphs, Trans, A. M. S., **78**, 1955.
5. F. Zitek, Sur certáins problemes combinátoires et leurs ápplicátions, Cás, pro pest. mát., sv 90, c. 3, 1965.

Поступила 21.III 1966 г.
Киев