# Задача о собственных значениях с параметром в краевых условиях для эллиптических уравнений, вырождающихся на части границы области

*А. Н. Комаренко*

Задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях для эллиптических уравнений и некоторым общим вопросам, связанным с ней, посвящены работы [1 — 3, 8, 9]. Такие задачи для вырождающихся уравнений раньше не рассматривались.

В настоящей работе рассматриваются задачи о собственных значениях с параметром в уравнении и в краевых условиях, а также с параметром только в краевых условиях для самосопряженных эллиптических уравнений второго порядка, вырождающихся на части границы области. При этом доказывается дискретность спектра «весовых» задач и устанавливаются некоторые свойства собственных значений. Указаны случаи недискретности спектра. Подобная задача о собственных значениях встречается в приложениях к гидродинамике при нахождении собственных колебаний жидкости со свободной поверхностью, частично заполняющей сосуд.

Отметим, что первая и вторая краевые задачи и задача на собственные значения с параметром только в уравнении для вырождающихся уравнений исследовались рядом авторов, в частности М. И. Вишиком [4] и С. Г. Михлиным [5]. Некоторые результаты работ [4] и [5] мы используем в дальнейшем.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область $n$-мерного эвклидового пространства, которая лежит в полупространстве $x_n > 0$ и примыкает частью $S_0$ своей границы $S$ к плоскости $x_n = 0$ ($S_0$ — замкнутое множество). Будем считать, что $S$ является кусочно-гладкой поверхностью, а область $\Omega$ такая, что к ней применимы теоремы вложения С. Л. Соболева [7].

Рассмотрим в области $\Omega$ самосопряженное в смысле Лагранжа дифференциальное выражение

$$lu \equiv -\sum_{i,k=1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ik}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + c(x)u \tag{1}$$

эллиптического типа в точках множества $\Omega + S_1$, $S_1 = S \setminus S_0$ и параболического типа в точках поверхности $S_0$ (выражение $lu$ вырождается на $S_0$). Коэффициенты $a_{ik}(x)$ будем считать непрерывно дифференцируемыми вещественными в $\overline{\Omega} = \Omega + S$ функциями, а коэффициент $c(x)$ непрерывным в каждой области вида $\Omega^{\delta} = \overline{\Omega} \cap (x_n > \delta)$, $\delta > 0$ и $c(x) > 0$ в $\Omega$. В случае $\alpha < 1$ на $c(x)$ наложим в дальнейшем некоторые дополнительные условия.

Предположим, как в [4], что для вырождающейся на $S_0$ квадратичной формы $F(x, \overline{\xi}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k$ (с рангом на $S_0 \leqslant n-1$), где $\overline{\xi} =$

$= (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — вещественный вектор, выполняются оценки

$$0 \leqslant x_n^{\alpha} \xi_n^2 \leqslant c_1 F(x, \overline{\xi}), \tag{2}$$

$$0 \leqslant x_n^{\beta} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leqslant c_2 F(x, \overline{\xi}) \tag{3}$$

при произвольном $\overline{\xi}$ и $x \in \Omega$. Здесь $c_1$, $c_2$, $\alpha$, $\beta$ — положительные фиксированные числа. При этом считаем, что оценки (2), (3) улучшить нельзя, т. е. если числа $\alpha$ и $\beta$ заменить соответственно меньшими числами, то оценки (2), (3) перестанут быть справедливыми (очевидно, $\alpha \leqslant \beta$).

Предположим также, что при $\alpha \geqslant 1$ выполняется соотношение

$$c x_n^{\alpha} \leqslant a_{nn}(x) \leqslant C x_n^{\alpha}, \qquad c, C = \text{const} > 0. \tag{4}$$

В дальнейшем всегда будет предполагаться, что для дифференциального выражения (1) выполняются оценки вида (2), (3), а в случае $\alpha \geqslant 1$ — также и (4).

Обозначим через $W$ пополнение множества всех функций из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$ по вырожденной норме

$$\{u, u\}_{\gamma} = \int\limits_{\Omega} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} \, d\Omega + \int\limits_{\Omega} \gamma(x) |u|^2 \, d\Omega, \tag{5}$$

соответствующей дифференциальному выражению (1), где $\gamma(x) \geqslant 0$ — непрерывная функция, отличная от нуля лишь в окрестности некоторой внутренней точки $x' \in \Omega$. Для функций из $W$ справедливы теоремы вложения, доказанные М. И. Вишиком, которые являются обобщением теорем вложения С. Л. Соболева для функций из $W_2^1(\Omega)$. Эти теоремы существенно используются в дальнейшем.

Задачи на собственные значения, являющиеся объектом нашего рассмотрения, связаны со второй краевой задачей для (1), которую мы сейчас сформулируем. Отметим, что постановка второй краевой задачи в случае вырождающегося дифференциального выражения (1), зависит от показателя $\alpha$ в оценке (2), а именно, краевые условия при $\alpha < 1$ задаются на всей границе; при $\alpha \geqslant 1$ они задаются только на $S_1$, а на поверхности вырождения $S_0$ никаких условий не задается [4].

Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения

$$lu = h(x) \text{ в области } \Omega \tag{I}$$

($lu$ — вырождающееся на $S_0$ дифференциальное выражение (1)), краевые условия которой имеют следующий вид:

а) в случае $0 \leqslant \alpha < 1$

$$Nu = \varphi(s) \text{ на } \Gamma, \ Nu = 0 \text{ на } S \diagdown \Gamma, \tag{II}$$

где $\Gamma$ — произвольная часть границы $S$ (она может совпадать со всей границей $S$) $Nu = \sum\limits_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\vec{\nu}, x_i)$, $\vec{\nu}$ — орт внешней нормали к $S$;

б) в случае $\alpha \geqslant 1$

$$Nu = \varphi(s) \text{ на } \Gamma, \quad \Gamma \subset S_1; \qquad Nu = 0 \text{ на } S_1 \diagdown \Gamma, \tag{II*}$$

а на $S_0$ никаких условий не задается.

Под решением (обобщенным) задачи (I)—(II) ($\alpha < 1$) понимается функция $u \in W$, для которой выполняется интегральное соотношение

$$\int_{\Omega} h(x)\, v(x)\, d\Omega + \int_{\Gamma} \varphi(s)\, v(s)\, d\Gamma = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)\, uv \right\} d\Omega$$

при любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$. Для обобщенного решения $u$ задачи (I) — (II*) ($\alpha \geqslant 1$) это соотношение должно выполняться при любой функции $v \in W_2^1(\Omega)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности $S_0$. При некоторых дополнительных условиях, наложенных на коэффициент $c(x)$ и на вырождающуюся форму $F(x, \overline{\xi})$ в случае $\alpha < 1$, краевые задачи (I) — (II) и (I) — (II*) имеют единственное решение [4].

В дальнейшем построим самосопряженный оператор $A$ в гильбертовом пространстве $L^2_{\sigma,\varrho}$, соответствующий задаче (I) — (II) и (I) — (II*). Решение уравнения $Au = f$ будет обобщенным решением в определенном выше смысле второй краевой задачи. Рассмотрение задачи на собственные значения с параметром в уравнении и в краевом условии сведется к исследованию спектральных свойств этого оператора.

## § 1. Самосопряженный оператор $A$, соответствующий второй краевой задаче, и его спектр

Введем для задач (I) — (II) и (I) — (II*) гильбертово пространство $L^2_{\sigma,\varrho}$, которое является ортогональной суммой гильбертовых пространств $L^2_\sigma(\Omega)$ и $L^2_\varrho(\Gamma)$ ($L^2_{\sigma,\varrho} = L^2_\sigma(\Omega) \oplus L^2_\varrho(\Gamma)$). Здесь через $L^2_\sigma(\Omega)$ ($L^2_\varrho(\Gamma)$) обозначено комплексное гильбертово пространство функций квадратично суммируемых с весом $\sigma(x)$ ($\varrho(s)$) на $\Omega$ ($\Gamma$). Элементами пространства $L^2_{\sigma,\varrho}$ являются всевозможные пары $u = [u_1(x), u_2(s)]$ функций $u_1(x)$, $u_2(s)$ соответственно из пространств $L^2_\sigma(\Omega)$ и $L^2_\varrho(\Gamma)$. Скалярное произведение в $L^2_{\sigma,\varrho}$ задается формулой

$$(u, v) = (\sigma u_1, v_1)_\Omega + (\varrho u_2, v_2)_\Gamma, \tag{6}$$

где

$$u = [u_1(x), u_2(s)], \qquad v = [v_1(x),\ v_2(x)] \in L^2_{\sigma,\varrho},$$

а выражения

$$(\sigma u_1, v_1)_\Omega = \int_\Omega \sigma(x)\, u_1(x)\, \overline{v}_1(x)\, d\Omega,$$

$$(\varrho u_2, v_2)_\Gamma = \int_\Gamma \varrho(s)\, u_2(s)\, v_2(s)\, d\Gamma$$

являются скалярными произведениями соответственно в $L^2_\sigma(\Omega)$ и $L^2_\varrho(\Gamma)$.

В качестве весовых функций $\sigma(x)$ и $\varrho(s)$ пространства $L^2_{\sigma,\varrho}$ возьмем функции, определенные в теоремах вложения [4]. Эти теоремы заключаются в следующем (теорема 1 и 2):

Теорема 1 (об ограниченности оператора вложения). *Функции из пространства $W$ удовлетворяют соотношению*

$$\int_\Omega \sigma(x)\, |u|^2\, d\Omega + \int_\Gamma \varrho(s)\, |u|^2\, d\Gamma \leqslant k\, \{u, u\}_\gamma \tag{7}$$

*где $k = \mathrm{const} > 0$ не зависит от функции $u(x)$, а $\sigma(x)$ и $\varrho(s)$ — определяемые ниже функции.*

Функции $\sigma(x)$ ($\varrho(s)$) $> 0$ непрерывны в каждой области вида $\Omega^\delta = (\Omega \cap (x_n > \delta))$ ($\Gamma^\delta = \Gamma \cap (x_n > \delta)$). В окрестности внутренних точек поверхности «вырождения» $S_0$ порядок роста $\sigma(x)$ зависит от числа $\alpha$ (2), а в точках множества $S_0 \cap \bar{S}_1$ порядок роста $\sigma(x)$ и $\varrho(s)$ зависит еще от числа $\beta$ из (3) и от угла между поверхностями $S_0$ и $S_1$. При этом предполагается, что точки с нулевыми углами отсутствуют. Обозначим через $S_0^*$ множество точек из $S_0 \cap \bar{S}_1$, в которых угол между внутренней нормалью к $S_1$ и осью $x_n$ не является острым (множество $S_0^*$ — замкнутое). Тогда порядок функции $\sigma(x)$ определяется следующим образом:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 0\,(x_n^{-1}\,|\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0} d^{\varrho}) & \text{при } \alpha < 1; \\ 0\,(x_n^{-1}\,|\ln x_n|^{-2-\varepsilon_0} d^{\beta-1}) & \text{при } \alpha = 1; \\ 0\,(x_n^{\alpha-2}\,|\ln x_n|^{-1-\varepsilon_0} d^{\beta-\alpha}) & \text{при } \alpha \geqslant 1, \end{cases} \tag{8}$$

где $d$ — расстояние точки $x$ до множества $S_0^*$, а $\varrho = \beta - 1$ при $\beta > 1$, $\varrho = 0$ при $\beta < 1$ и $d^{\varrho}$ нужно заменить величиной $|\ln d|^{-1}$ при $\beta = 1$. В случае, когда $S_0^*$ — пустое множество, степень $d$ в формуле (8) нужно опустить.

Для функции $\varrho(s)$ вблизи точек множества $S_0^*$ имеем:
при $\alpha < 1$

$$\varrho(s) = \begin{cases} 0\,(d^{\beta-1}) & \text{для } \beta > 1; \\ 0\,(|\ln d|^{-1}) & \text{для } \beta = 1; \\ 0\,(1) & \text{для } \beta < 1, \end{cases} \tag{9}$$

где $d$ — расстояние точки $s$ от множества $S_0^*$, вблизи остальных точек $S_0 \cap \bar{S}_1 \setminus S_0^*$ можно положить $\varrho(s) = 0(1)$:
при $\alpha \geqslant 1$

$$\varrho(s) = \begin{cases} 0\,(d^{\alpha-1}) & \text{для } \alpha > 1; \\ 0\,(|\ln d|^{-1}) & \text{для } \alpha = 1 \end{cases} \tag{10}$$

в окрестности точек множества $S_0 \cap \bar{S}_1 \setminus S_0^*$ и

$$\varrho(s) = \begin{cases} 0\,(d^{\beta-1}) & \text{для } \beta > 1; \\ 0\,(|\ln d|^{-1}) & \text{для } \beta = 1 \end{cases} \tag{11}$$

в окрестности точек множества $S_0^*$.

Функцию $\varrho(s)$ можно положить равной единице в случае, когда $\Gamma$ находится на положительном расстоянии от $S_0$. Весовые функции $\sigma(x)$ и $\varrho(s)$ определены, как показывают примеры в [4], с точностью до «малого $\varepsilon$».

Соотношение (7) означает, что оператор вложения пространства $W$ в пространство $L^2_{\sigma,\varrho}$ — ограниченный.

Теорема 2. *Если вместо функции $\varrho(s)$ взять функцию $\varrho_1(s)$, которую мы выпишем ниже, то оператор вложения пространства $W$ в пространство $L^2_{\sigma,\varrho_1}$ будет вполне непрерывным.*

Вблизи точек множества $S_0 \cap \bar{S}_1 \setminus S_0^*$

$$\varrho_1(s) = \begin{cases} 0\,(d^{\alpha-1}\,|\ln d|^{-\varepsilon_0}) & \text{при } \alpha > 1; \\ 0\,(|\ln d|^{-1-\varepsilon_0}) & \text{при } \alpha = 1; \\ 0\,(1) & \text{при } \alpha < 1, \end{cases} \tag{12}$$

а вблизи точек множества $S_0^*$

$$\varrho_1(s) = \begin{cases} 0\,(d^{\beta-1}\,|\ln d\,|^{-\varepsilon_0}) & \text{при } \beta > 1; \\ 0\,(\,|\ln d\,|^{-1-\varepsilon_0}) & \text{при } \beta = 1; \\ 0\,(1) & \text{при } \beta < 1; \end{cases} \tag{13}$$

$d$ — расстояние от точки множества $S_0 \cap \overline{S}_1$ до приближающейся к ней точки $s \in \Gamma$.

Теперь определим в пространстве $L^2_{\sigma,\varrho}$ некоторый линейный оператор $A_0$, относящийся к задачам (I) — (II) и (I) — (II*). В случае задачи (I) — (II) ($\alpha < 1$) выделим множество $M(\Omega)$ всех функций дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega} = \Omega + S$, для которых $Nu = 0$ на $S \setminus \Gamma$. Для задачи (I) — (II*) ($\alpha \geqslant 1$, $\Gamma \subset S_1$) через $M^*(\Omega)$ обозначим множество дважды непрерывно дифференцируемых в $\overline{\Omega}$ функций, удовлетворяющих условию $Nu = 0$ на $S_1 \setminus \Gamma$ и не подчиненных никаким краевым условиям на $S_0$. Будем рассматривать множества $M(\Omega)$ и $M^*(\Omega)$ как некоторые подмножества в соответствующих гильбертовых пространствах $L^2_{\sigma,\varrho}$, отождествляя при этом функцию $u$ с элементом-парой $[u/\Omega,\ u/\Gamma] \in L^2_{\sigma,\varrho}$ ($u/\Omega$ ($u/\Gamma$) — сокращение функции $u$ на $\Omega$ ($\Gamma$)).

В случае $\alpha > 1$ оператор $A_0$ в $L^2_{\sigma,\varrho}$ определяется отображением

$$u = [u/\Omega,\ u/\Gamma] \to \left[\frac{1}{\sigma}\,lu/\Omega,\ \frac{1}{\varrho}\,Nu/\Gamma\right] = A_0u \tag{14}$$

на множестве $D_{A_0}$ тех функций из $M^*(\Omega)$, для которых $A_0u \in L^2_{\sigma,\varrho}$. Аналогично определяется оператор $A_0$ в случае $\alpha < 1$ на множестве $D_{A_0} \subset M(\Omega)$, когда $\Gamma \subset S_1$. Множество $D_{A_0}$ ($\Gamma \subset S_1$) будет плотным в $L^2_{\sigma,\varrho}$, так как содержит в себе плотное в $L^2_{\sigma,\varrho}$ множество $C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma)$ — функций бесконечно дифференцируемых в $\Omega \cup S$ и обращающихся в нуль в некоторой окрестности поверхности $S \setminus \Gamma$ [1]. Для случая задачи (I) — (II), когда $\Gamma$ частично заходит на поверхность $S_0$ или содержит ее в себе, для определения оператора $A_0$ нужно наложить ограничения на порядок роста коэффициента $c(x)$ в окрестности точек $S_0 \cap \Gamma$. Исходя из того, что $A_0u$ принадлежит $L^2_{\sigma,\varrho}$ для любой функции $u \in C_0^\infty(\Omega \cup \Gamma)$ получим для $c(x)$ условие $\int\limits_{\Omega_\Gamma} \frac{1}{\sigma}\,c^2(x)\,d\Omega < +\infty$ ($\Omega_\Gamma$ — некоторая объемная окрестность поверхности $S_0 \cap \Gamma$). Таким образом в случае задачи (I) — (II), когда $\Gamma \cap S_0$ — не пусто, при дополнительном условии $c(x) = 0\,(\sigma^{\frac{1}{2}}\,x_n^{-1+\varepsilon_0})$ в окрестности точек множества $\Gamma \cap S_0$, оператор $A_0$ определяется аналогично предыдущему при помощи отображения (14). Его область определения будет плотна в $L^2_{\sigma,\varrho}$. В случае $\alpha < 1$ для любых функций $u, v \in D_{A_0} \subset M(\Omega)$, применяя формулу Грина и учитывая краевые условия на функции из $M(\Omega)$, легко получим формулу

$$(A_0u, v) = \int\limits_{\Omega} \sigma\,\frac{1}{\sigma}\,lu\bar{v}\,d\Omega + \int\limits_{\Gamma} \varrho\,\frac{1}{\varrho}\,Nu\bar{v}\,d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i}\,d\Omega + \int\limits_{\Omega} c(x)\,u\bar{v}\,d\Omega. \tag{15}$$

Аналогичная формула справедлива для оператора $A_0$ и в случае $\alpha \geqslant 1$.

Действительно, применяя формулу Грина, получим для любых $u, v \in D_{A_0} \subset$ $\subset M^*(\Omega)$, что

$$(A_0 u, v) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_{\Omega} c(x) u\bar{v} d\Omega -$$

$$- \int\limits_{S_0} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \cos(\vec{\nu}, x_i) \bar{v} dS_0, \tag{16}$$

но последний интеграл в правой части этого равенства в силу оценки (5) и неравенства $a_{nk}(x) \leqslant a_{kk}(x) a_{nn}(x)$ (оно вытекает из положительной определенности формы $F(x, \bar{\xi})$ в точках $x \in \Omega \cup S_1$) равен нулю. Из формулы (15) и теоремы 1 следует, что оператор $A_0$ во всех случаях является положительно определенным, т. е. $(A_0 u, u) \geqslant \mu(u, u)$, $\mu > 0$. Обозначим через $A$ самосопряженное расширение по Фридрихсу оператора $A_0$. Область определения $D_A$ оператора $A$ принадлежит пространству $H_A \subseteq W$, которое является пополнением множества $D_{A_0}$ по норме $(A_0 u, u)$ [6]. Нормой в $H_A$ является выражение

$$[u, u]_A = \int\limits_{\Omega} \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} d\Omega + \int\limits_{\Omega} c(x) |u|^2 d\Omega. \tag{17}$$

Как известно [6], решением уравнения $Au = f$, где $f = [f_1(x), f_2(s)] \in$ $\in L^2_{\sigma, \varrho}$, будет функция $u$ доставляющая минимум функционалу $F(u) =$ $= [u, u]_A - (f, u) - (u, f)$, заданному на $H_A$. Отсюда следует, как легко показать, что для нее будет выполняться соотношение

$$[u, \eta]_A - (f, \eta) = 0, \tag{18}$$

где $\eta \in H_A$ — произвольная вещественная функция.

Из соотношения (18) вытекает, что решение уравнения $Au = f$ (в случае $\alpha < 1$ $c(x)$ предполагается таким, чтобы $W_2^1(\Omega) \subset H_A$) будет обобщенным решением в раньше определенном смысле задачи (I) — (II*), когда $\alpha > 1$, и (I) — (II), когда $\alpha < 1$ при $h(x) = \sigma(x) f_1(x)$ и $\varphi(s) = \varrho(s) f_2(s)$.

Возьмем в качестве $\eta$ в (18) функцию дважды непрерывно дифференцируемую в $\Omega$, равную нулю в некоторой пограничной полоске области $\Omega$, тогда интегрируя по частям в (18) получим соотношение

$$(\sigma f_1, \eta)_{\Omega} = (u, l\eta)_{\Omega}, \tag{19}$$

которое означает, что $u$ является обобщенным в $\Omega$ решением уравнения $lu = \sigma f_1$.

Если коэффициенты $a_{ik}(x) \in C^4(\Omega')$, $c(x) \in C^2(\Omega')$, а $\sigma f_1 \in C^1(\Omega')$, где $\Omega'$ — любая внутренняя подобласть области $\Omega$, то это обобщенное решение $u(x)$ уравнения $lu = \sigma f_1$, как известно, в силу эллиптичности $lu$ в $\Omega$ будет дважды непрерывно дифференцируемым в $\Omega$ и, следовательно, обычным его решением. Можно показать аналогично тому как это делается в [5], что если коэффициенты $a_{ik}(x)$ имеют третьи производные, а коэффициент $c(x)$ имеет первые производные, удовлетворяющие условию Липшица с положительным показателем в $\Omega$, то функции из области определения $D_A$ оператора $A$ имеют всевозможные обобщенные вторые производные квадратично суммируемые во всякой внутренней подобласти $\Omega'$ области $\Omega$. Справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Если в предыдущих построениях для оператора $A$ весо-*

*вую функцию $\varrho(s)$ заменить на $\varrho_1(s)$, то самосопряженный оператор $A$, действующий в $L^2_{\sigma, \varrho_1}$, будет иметь дискретный спектр**.

Для доказательства теоремы достаточно отметить, что в силу теоремы 2 о вполне непрерывности оператора вложения пространства $W$ в $L^2_{\sigma, \varrho_1}$, всякое множество функций ограниченное по норме энергии $(Au, u)$ будет компактным в $L^2_{\sigma, \varrho_1}$ [6].

Собственные значения $\lambda_n$ и собственные функции $u_n$ оператора $A$ представляют собой совокупность собственных значений и собственных функций «весовой» задачи на собственные значения с параметром в уравнении и в краевом условии. Эта задача имеет следующий вид:

а) в случае $\alpha < 1$

$$lu = \lambda\sigma(x)\, u \quad \text{в области } \Omega,$$

$$Nu = \lambda\varrho_1(s)\, u \ \text{ на } \Gamma, \qquad Nu = 0 \ \text{ на } S\setminus\Gamma;$$

б) в случае $\alpha \geqslant 1$

$$lu = \lambda\sigma(x)\, u \ \text{ в } \Omega,$$

$$Nu = \lambda\varrho_1(s)\, u \ \text{ на } \Gamma\subset S_1, \ Nu = 0 \ \text{ на } S_1\setminus\Gamma.$$

Для нахождения собственных значений и собственных функций этой задачи можно применить метод Ритца.

Если весовые функции $\sigma(x)$ и $\varrho(s)$ при построении оператора $A_0$ положить равными единице и в тех случаях, когда в $W$ входят функции не принадлежащие пространству $L^2_{1,1}$, например, при $\alpha > 1$ или же $\beta > 1$ и $\Gamma$ примыкает к точкам множества $S_0^*$ (см. теорему 1), то операторы $A_0$ и $A$ будут, вообще говоря, только положительными, но не положительно определенными (по крайней мере при $c(x)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности $S_0$). И, следовательно, спектр самосопряженного оператора $A$ будет недискретным.

Мы можем сформулировать, не основываясь на теореме вложения следующую теорему.

Теорема 4. *В случае $\alpha \geqslant 2$ при $c(x)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности $S_0$, спектр самосопряженного оператора $A$ в $L^2_{1,1}$ недискретен.*

Для того, чтобы спектр положительного оператора $A$ был дискретен, необходимо и достаточно, чтобы всякое множество функций, ограниченное по норме энергии $[u, u]_A$, было компактным в $L^2_{1,1}$. Последнее не выполняется для множества $\overset{0}{H}_A$, полученного замыканием по норме $[u, u]_A$ подмножества $\overset{0}{M}{}^*(\Omega)\subset M^*(\Omega)$ функций обращающихся в нуль на $S_1$ (это следует из недискретности спектра оператора $\bar{L}$, соответствующего первой краевой задаче, доказанной С. Г. Михлиным [5]). И так как $\overset{0}{H}_A\subset H_A$, то спектр оператора $A$ также будет недискретным, что и требовалось установить.

## § 2. Оператор $T$ и задача о собственных значениях с параметром только в краевом условии

Второй краевой задаче (I) — (II) и (I) — (II*) при $h(x) = 0$ соответствует некоторый линейный оператор $T$ в гильбертовом пространстве $L^2_\varrho(\Gamma)$. Этот оператор строится аналогично тому, как это делается для невырождающегося случая [3]. Вводим проекционные операторы $P_0$ и $P_1$, проектирующие $L^2_{\sigma,\varrho}$ соответственно на подпространства $L^2_\sigma(\Omega)$ и $L^2_\varrho(\Gamma)$. Обозначим че-

* Дискретным спектром считается спектр, состоящий только из собственных значений конечной кратности, сгущающихся только на бесконечности.

рез $D_0$ множество функций из области определения $D_A$ самосопряженного оператора $A$, для которых $P_0Au = 0$.

Функции $u$ из множества $D_0$ обладают тем же свойством, что если $P_1u = 0$, то $u \equiv 0$ [3]. В силу этого свойства, линейный оператор $T$ в $L_{\varrho}^2(\Gamma)$ определяется отображением

$$u \in D_0, \quad P_1u = u/_\Gamma \to P_1Au\,(Tu/_\Gamma = P_1Au = f_2, \quad Au = [f_1, f_2] \in L^2_{\sigma, \varrho}), \tag{20}$$

где $u/_\Gamma$ — сокращение функции $u$ на $\Gamma$.

Т е о р е м а 5. *Линейный оператор $T$, действующий в гильбертовом пространстве $L_{\varrho}^2(\Gamma)$, является самосопряженным и положительно определенным. Если в качестве весовой функции взять функцию $\varrho_1(s)$, то спектр его будет дискретным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы аналогично доказательству подобной теоремы 1 в [3].

Собственные значения $\lambda_n$ и собственные функции $u_n$ оператора $T$ являются решениями (обобщенными) задачи о собственных значениях с параметром в краевых условиях для вырождающегося выражения (1), которая состоит в следующем.

Найти все значения параметра $\lambda$, для которых существует нетривиальное решение уравнения

$$lu = 0 \text{ в } \Omega \tag{21}$$

при краевых условиях:

а) для $\alpha < 1$

$$Nu = \lambda\varrho_1 u \text{ на } \Gamma \subset S, \qquad Nu = 0 \text{ на } S \setminus \Gamma; \tag{22}$$

б) для $\alpha \geqslant 1$

$$Nu = \lambda\varrho_1 u \text{ на } \Gamma \subset S_1, \qquad Nu = 0 \text{ на } S_1 \setminus \Gamma. \tag{22*}$$

Теорема 3 означает, что для задачи (21) — (22) и (21) — (22*) существует бесконечная последовательность положительных собственных значений $\lambda_n$ с единственной точкой сгущения на бесконечности, а соответствующая последовательность собственных функций $u_n$ является полной на $\Gamma$, т. е. функции $u_n/_\Gamma$ образуют полную систему функций в $L^2_{\varrho_1}(\Gamma)$.

Можно показать, что собственные функции $u_n$ и собственные значения $\lambda_n$ задачи (21) — (22) и (21—22*) являются решениями следующих вариационных задач:

$$\lambda_1 = \min\,[u, u]_A, \quad u \in H_A, \quad \text{при условии } (\varrho_1 u, u)_\Gamma = 1, \tag{23}$$

и, если $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ — $(n-1)$-первые собственные функции, то

$$\lambda_n = \min\,[u, u]_A, \quad u \in H_A \quad \text{при} \quad (\varrho_1 u, u)_\Gamma = 1, \quad (\varrho_1 u, u_i) = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{24}$$

Так же как в [3], на основании минимаксимального свойства собственных значений, доказываются следующие теоремы о соотношениях между собственными значениями для всей области $\Omega$ и для некоторых ее подобластей.

Т е о р е м а 6. *Если область $\Omega'$ содержится внутри области $\Omega$, в которой задано вырождающееся на $S_0^*$ дифференциальное выражение (1), и при этом контуры $\Gamma'$ и $\Gamma$ совпадают, то для собственных значений $\lambda_n'$ и $\lambda_n$ задачи (21) — (22), (21) — (22*) соответственно для областей $\Omega'$ и $\Omega$ выполняется неравенство $\lambda_n' \leqslant \lambda_n$ при любом целом $n$.*

Т е о р е м а 7. *Пусть область $\Omega$, в которой рассматривается задача (21), (22), (21) — (22*) разбита кусочно-гладкими кривыми на конечное число попарно-непересекающихся подобластей $\Omega^{(i)}$ так, что граница $S^{(i)}$ каждой подобласти $\Omega^{(i)}$ содержит непустую часть $\Gamma^{(i)}$ от контура*

*Γ на $S$ и пусть $\lambda_n^*$ обозначает $n$-й член последовательности всех собственных значений $\lambda_n^{(i)}$, взятых для каждой подобласти $\Omega^{(i)}$, расположенных в порядке возрастания их величин и повторяющихся сообразно с их кратностью. Тогда $n$-е собственное значение $\lambda_n$ для области $\Omega$ больше (или равно) чем собственное значение $\lambda_n^*$, а также $A(\lambda) \leqslant \sum_i A^{(i)}(\lambda)$, где $A(\lambda)$ и $A^{(i)}(\lambda)$ — соответственно числа собственных значений $\lambda_n$ и $\lambda_n^{(i)}$ не превышающих $\lambda$.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. J. Odhnoff, Operators generated by differential problems with value parameter in equation and boundary condition, Lund, 1959.
2. Joseph Ercolano and Martin Schechter, Spectral theory for operators generated by elliptic boundary problems with eigenvalue parameter in boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XVIII, N 1, 2, 3, 1965.
3. А. Н. Комаренко, И. А. Луковский, С. Ф. Фещенко, К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях, УМЖ, № 6, 1965.
4. М. И. Вишик, Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области, Мат. сб., т. 35, вып. 3, 1953.
5. С. Г. Михлин, Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестн. ЛГУ, № 8, 1954.
6. С. Г. Михлин, Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, 1952.
7. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
8. В. В. Барковский, О функции Грина самосопряженного эллиптического оператора, порожденного дифференциальным выражением и неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.
9. В. В. Барковский, Я. А. Ройтберг, О минимальном и максимальном операторах, соответствующих общей эллиптической задаче с неоднородными граничными условиями, УМЖ, т. 18, № 2, 1966.



Поступила 15.II 1966 г.
Киев