1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Прямая и обратная задача В. А. Маркова в комплексной области. II

В. Д. Коромысличенко

§ 6. Внутренний характер исследования задачи В. А. Маркова

В первой части настоящей статьи* исследование задачи (2) проводилось с помощью так называемых добавленных векторов. Проведем исследование обобщенной задачи В. А. Маркова без добавленных векторов. Пусть полином $F(a;\, z)$ является решением задачи (2) и, следовательно, для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ выполняется тождество [1] вида

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^*(\widetilde{A};\, z_s) \equiv 0, \quad \lambda_s > 0, \quad s = \overline{1, r}, \tag{31'}$$

которому соответствуют два тождества

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A};\, z_s) \equiv 0, \lambda_s > 0, \tag{32'}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \widetilde{F}^{*\prime\prime}(\widetilde{A};\, z_s) \equiv 0, \lambda_s > 0 \tag{33'}$$

с линейной зависимостью между действительными формами $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A};\, z_s)$, $\widetilde{F}^{*\prime\prime}(\widetilde{A};\, z_s)$. Тождество (31′) может быть приводимым, но считаем, что ранг матрицы

$$\| \varphi_0^{*\prime}(z_s)\, \varphi_0^{*\prime\prime}(z_s) \ldots \varphi_n^{*\prime}(z_s)\, \varphi_n^{*\prime\prime}(z_s) \|_{s=\overline{1, r}}, \tag{34'}$$

соответствующей тождествам (32′), (33′), равен r. Учитывая теорему 1 и (31′), условия а), б) теоремы 3 при $r < 2n + 2$ обобщаются следующим образом:

а) *для дополнительной матрицы* (39) *совместна система уравнений*

$$\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)\prime} + \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}) = 0, s = \overline{r + 1, 2n + 2}, \quad \sum (|\mu_t'| + |\mu_t''|) > 0; \tag{71}$$

б) *среди решений системы* (71) *существует такое решение*** μ_t', μ_t'', $t = \overline{1, p}$,

---

* В данной II части статьи приняты обозначения I части, а нумерация формул и параграфов соответственно продолжается.

** Если в (34′) $r = 2n + 2$, то условия а), б) заменяются одним: существуют числа μ_t', μ_t'' такие, что $\operatorname{sgn} \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)\prime} + \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}) = \text{const}$, $s = \overline{1, 2n + 2}$.

$\sum (|\mu_t'| + |\mu_t''|) > 0$, *что для отличных от нуля чисел* $\lambda_s = \sum\limits_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''})$, $s = \overline{1, 2n+2}$ *имеем*

$$\operatorname{sgn} \lambda_s = \text{const}, \quad s = \overline{1, r}. \tag{72}$$

Из условий а), б) выведем эквивалентные условия, в формулировку которых входят только точки уклонения. Пусть условия (71), (72) для некоторой подсистемы точек уклонения $\underline{\{z_s\}_1^r}$ выполнены. Уравнения вида (5), (6) умножим на числа μ_t', μ_t'', $t = \overline{1, p}$ и сложив, получим

$$\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*'}(z_s) = \gamma_j', \quad j = \overline{0, n}, \\ &\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*''}(z_s) = \gamma_j'', \quad j = \overline{0, n}, \end{aligned} \tag{73}$$

где в (73) обозначено $\lambda_s = \sum\limits_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''})$, $\quad s = \overline{1, r}$,

$$\gamma_j' = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)'} - \mu_t'' \alpha_j^{(t)''}), \qquad \gamma_j'' = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)''} + \mu_t'' \alpha_j^{(t)'}), \qquad j = \overline{0, n}.$$

Таким образом, при выполнении (71) совместна система линейных уравнений (73). Пусть в матрице (34′) отличным от нуля будет определитель

$$\Delta = |\, \varphi_{j_1}^{*'}(z_s)\, \varphi_{j_2}^{*''}(z_s) \ldots \varphi_{j_r}^{*''}(z_s)\, |_{s=\overline{1, r}} \neq 0. \tag{74}$$

Введем следующие обозначения

$$\underset{(s=\overline{1,2})}{f_\nu^{(s)}} = \left| \begin{array}{cc} & \varphi_{j_1}^{*'}(z) \\ & \varphi_{j_2}^{*''}(z) \\ \Delta & \vdots \\ & \varphi_{j_r}^{*''}(z) \\ \varphi_\nu^{*(s)}(z_1) \ldots \varphi_\nu^{*(s)}(z_r) & \varphi_\nu^{*(s)}(z) \end{array} \right|, \qquad \nu = \overline{0, n}, \ \nu \neq j_1, \ldots, fj_r, \tag{75}$$

$$f_\nu^{(1)} \equiv f_\nu', \quad f_\nu^{(2)} \equiv f_\nu'', \quad \varphi_\nu^{*(1)} \equiv \varphi_\nu^{*'}, \quad \varphi_\nu^{*(2)} \equiv \varphi_\nu^{*''};$$

$$\underset{(s=\overline{1,2})}{\omega_t''[f_\nu^{(s)}]} = \left| \begin{array}{cc} & \alpha_{j_1}^{(t)'} \\ & \alpha_{j_2}^{(t)''} \\ \Delta & \vdots \\ & \alpha_{j_r}^{(t)''} \\ \varphi_\nu^{*(s)}(z_1) \ldots \varphi_\nu^{*(s)}(z_r) & \alpha_\nu^{(t)(s)} \end{array} \right|, \qquad \nu = \overline{0, n}, \quad \nu \neq j_1, \ldots, j_r, \tag{76}$$

$$\alpha_j^{(t)(1)} \equiv \alpha_j^{(t)'}, \quad \alpha_j^{(t)(2)} \equiv \alpha_j^{(t)''};$$

$$\omega_t' [f_\nu'] = \left| \begin{array}{cc} & -\alpha_{j_1}^{(t)''} \\ & \alpha_{j_2}^{(t)'} \\ \Delta & \vdots \\ & \alpha_{j_r}^{(t)'} \\ \varphi_\nu^{*'}(z_1) \ldots \varphi_\nu^{*'}(z_r) & -\alpha_\nu^{(t)''} \end{array} \right|, \quad \nu = \overline{0, n}, \quad \nu \neq j_1, \ldots, j_r, \tag{77}$$

$$\omega_t' [f_\nu''] = \left| \begin{array}{cc} & -\alpha_{j_1}^{(t)''} \\ & \alpha_{j_2}^{(t)'} \\ \Delta & \vdots \\ & \alpha_{j_r}^{(t)'} \\ \varphi_\nu^{*''}(z_1) \ldots \varphi_\nu^{*''}(z_r) & \alpha_\nu^{(t)'} \end{array} \right|, \quad \nu = \overline{0, n}, \quad \nu \neq j_1, \ldots, j_r. \tag{77'}$$

При введенных обозначениях совместность системы (73) эквивалентна выполнению условий:

$$\begin{gathered} \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [f_\nu'] + \mu_t'' \omega_t' [f_\nu']) = 0, \qquad \nu = \overline{0, n}, \qquad \nu \neq j_1, \ldots, j_r, \\ \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [f_\nu''] + \mu_t'' \omega_t' [f_\nu'']) = 0, \qquad \nu = \overline{0, n}, \qquad \nu \neq j_1, \ldots, j_r, \\ \sum (|\mu_t'| + |\mu_t''|) > 0. \end{gathered} \tag{78}$$

Из (73) находим числа λ_s:

$$\lambda_s = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \varphi_{j_1}^{*'}(z_1) \ldots \varphi_{j_1}^{*'}(z_{s-1})\, \gamma_{j_1}' \varphi_{j_1}^{*'}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_1}^{*'}(z_r) \\ \varphi_{j_2}^{*''}(z_1) \ldots \varphi_{j_2}^{*''}(z_{s-1})\, \gamma_{j_2}'' \varphi_{j_2}^{*''}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_2}^{*''}(z_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{j_r}^{*''}(z_1) \ldots \varphi_{j_r}^{*''}(z_{s-1})\, \gamma_{j_r}'' \varphi_{j_r}^{*''}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_r}^{*''}(z_r) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [P_s] + \mu_t'' \omega_t' [P_s]), \tag{79}$$

где

$$P_s = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \varphi_{j_1}^{*'}(z_1) \ldots \varphi_{j_1}^{*'}(z_{s-1})\, \varphi_{j_1}^{*'}(z)\, \varphi_{j_1}^{*'}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_1}^{*'}(z_r) \\ \varphi_{j_2}^{*''}(z_1) \ldots \varphi_{j_2}^{*''}(z_{s-1})\, \varphi_{j_2}^{*''}(z)\, \varphi_{j_2}^{*''}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_2}^{*''}(z_r) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{j_r}^{*''}(z_1) \ldots \varphi_{j_r}^{*''}(z_{s-1})\, \varphi_{j_r}^{*''}(z)\, \varphi_{j_r}^{*''}(z_{s+1}) \ldots \varphi_{j_r}^{*''}(z_r) \end{vmatrix}. \tag{80}$$

Числа $\omega_t' [P_s]$, $\omega_t'' [P_s]$ определяются из совместных систем линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{j_1}^{(t)'} = \omega_t'' [P_1]\, \varphi_{j_1}^{*'}(z_1) + \ldots + \omega_t'' [P_r]\, \varphi_{j_1}^{*'}(z_r); \\ \alpha_{j_2}^{(t)''} = \omega_t'' [P_1]\, \varphi_{j_2}^{*''}(z_1) + \ldots + \omega_t'' [P_r]\, \varphi_{j_2}^{*''}(z_r); \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{j_r}^{(t)''} = \omega_t'' [P_1]\, \varphi_{j_r}^{*''}(z_1) + \ldots + \omega_t'' [P_r]\, \varphi_{j_r}^{*''}(z_r), \end{array} \right. \tag{81}$$

$$
\begin{cases}
-\alpha_{j_1}^{(t)''} = \omega_t' [P_1] \varphi_{j_1}^{*'}(z_1) + \ldots + \omega_t' [P_r] \varphi_{j_1}^{*'}(z_r); \\
\alpha_{j_2}^{(t)'} = \omega_t' [P_1] \varphi_{j_2}^{*''}(z_1) + \ldots + \omega_t' [P_r] \varphi_{j_2}^{*''}(z_r); \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{j_r}^{(t)'} = \omega_t' [P_1] \varphi_{j_r}^{*''}(z_1) + \ldots + \omega_t' [P_r] \varphi_{j_r}^{*''}(z_r).
\end{cases}
\tag{82}
$$

Из (79) следует, что отличные от нуля числа

$$
\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [P_s] + \mu_t'' \omega_t' [P_s]), \quad s = \overline{1, r}, \tag{83}
$$

одного знака.

Итак, из условий (71), (72) вытекают условия (78), (83). Докажем, что из условий (78), (83) вытекают условия (71), (72). Пусть для некоторой подсистемы r точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ ранг матрицы (34′) равен r и условия (78), (83) выполнены. Матрицу (34′) дополним $2n+2-r$ столбцами из чисел $d_j'(s)$, $d_j''(s)$ таких, чтобы ранг квадратной матрицы был равен $2n+2$ и рассмотрим для такой матрицы системы линейных уравнений вида (5), (6). Возьмем то из решений (78) μ_t', μ_t'', $t = \overline{1, p}$, для которого числа в (83) одного знака. Умножая в (5) и (6) первые уравнения на μ_t', а вторые на μ_t'' и складывая, получим:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*'}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} \lambda_s d_j'(s) = \gamma_j', \qquad j = \overline{0, n}; \\
&\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*''}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} \lambda_s d_j''(s) = \gamma_j'', \qquad j = \overline{0, n}.
\end{aligned}
\tag{84}
$$

В (84) обозначено $\gamma_j' = \sum\limits_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)'} - \mu_t'' \alpha_j^{(t)''})$,

$$
\gamma_j'' = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t'' \alpha_j^{(t)'} + \mu_t' \alpha_j^{(t)''}), \qquad \lambda_s = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}).
$$

Условие (78) означает, что совместна система уравнений

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*'}(z_s) = \gamma_j', \qquad j = \overline{0, n} \\
&\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*''}(z_s) = \gamma_j'', \qquad j = \overline{0, n}.
\end{aligned}
\tag{73′}
$$

На основе (73′) имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{s=r+1}^{2n+2} \lambda_s d_j'(s) = 0, \qquad j = \overline{0, n}, \\
&\sum_{s=r+1}^{2n+2} \lambda_s d_j''(s) = 0, \qquad j = \overline{0, n}.
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Так как векторы $\vec{d}_s = (d_0'(s),\ d_0''(s), \ldots, d_n'(s),\ d_n''(s))$, $s = \overline{r+1, 2n+2}$ —

линейно независимы, то из (85) получаем

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)\prime} + \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}) = 0, \qquad s = \overline{r+1, 2n+2}. \tag{86}$$

Если система (73), (73′) совместна, то имеем

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)\prime} + \mu_t'' K_s^{(t)\prime\prime}) = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [P_s] + \mu_t'' \omega_t' [P_s]), \quad s = \overline{1, 2n+2} \tag{87}$$

Из (87) при учете (86) и (83) следует, что условия (71), (72) выполнены. Изложенное показывает, что теорема 3 обобщается следующим образом.

Теорема 8. *Для того чтобы допустимый полином $F(a; z)$ был наименее уклоняющимся от функции $f(z)$, непрерывной на бикомпактном хаусдорфовом пространстве G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^{r^*}$ было выполнено одно из двух:*

1) *для некоторых точек $\{z_s\}_1^r \subseteq \{z_s\}_1^{r^*}$ $(r \leqslant r^*)$ ранг матрицы (34′) равен r и выполняются условия;*

а) *для определителя вида* (74) *совместна система линейных уравнений:*

$$\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [f_\nu'] + \mu_t'' \omega_t' [f_\nu']) = 0, \qquad \nu = \overline{0, n}, \qquad \nu \neq j_1, \ldots, j_r,$$

$$\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [f_\nu''] + \mu_t'' \omega_t' [f_\nu'']) = 0, \qquad \nu = \overline{0, n}, \qquad \nu \neq j_1, \ldots, j_r; \tag{78′}$$

$$\sum (|\mu_t'| + |\mu_t''|) > 0.$$

б) *среди всех решений системы* (78′) *существует такое решение μ_t', μ_t'', что отличные от нуля числа*

$$\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \omega_t'' [P_s] + \mu_t'' \omega_t' [P_s]), \qquad s = \overline{1, r} \tag{87′}$$

одного знака;

2) *для некоторых точек $\{z_s\}_1^r \subseteq \{z_s\}_1^{r^*}$ существует линейная зависимость в узком смысле векторов $\vec{\varphi}_s^*$, $s = \overline{1, r}$: $\sum_{s=1} c_s \vec{\varphi}_s^* = 0$,* где числа c_s — одного знака.

Замечание 1. В доказательстве эквивалентности условий (71), (72) условиям (78), (83) содержится также доказательство того факта, что системы (71) и (78) имеют одни и те же решения, из чего следует, что матрицы

$$(A) = \left\| \begin{matrix} K_{r+1}^{(1)\prime} \ldots K_{2n+2}^{(1)\prime} \\ \cdots\cdots \\ K_{r+1}^{(p)\prime} \ldots K_{2n+2}^{(p)\prime} \\ K_{r+1}^{(1)\prime\prime} \ldots K_{2n+2}^{(1)\prime\prime} \\ \cdots\cdots \\ K_{r+1}^{(p)\prime\prime} \ldots K_{2n+2}^{(p)\prime\prime} \end{matrix} \right\|, \qquad (B) = \left\| \begin{matrix} \omega_1' [f_\nu'] \ \omega_1' [f_\nu''] \\ \cdots\cdots \\ \omega_p' [f_\nu'] \ \omega_p' [f_\nu''] \\ \omega_1'' [f_\nu'] \ \omega_1'' [f_\nu''] \\ \cdots\cdots \\ \omega_p'' [f_\nu'] \ \omega_p'' [f_\nu''] \end{matrix} \right\|_{\nu=\overline{0,n}, \nu \neq j_1, \ldots, j_r}$$

одинакового ранга.

Пусть $F(a; z)$ является решением задачи и набор точек $\{z_s\}_1^r$ $(r \leqslant 2n + 3 - 2p)$ является неприводимой чебышевской подсистемой точек уклонения, причем ранг матрицы (34′) равен r. Для произвольных добавленных $2n+2-r$ векторов $\vec{d}_s$ таких, что все $2n+2$ вектора $\vec{d}_s$, $\vec{\varphi}_s^*$ линейно независимы, матрица коэффициентов системы (71) будет иметь ранг $2p-1$ (см. теорему 1). Соответствующая матрица системы (78) также будет иметь ранг $2p-1$. На основе замечания 1 из теоремы 8 вытекает следующая теорема.

Теорема 8′. *Для того чтобы допустимый полином $F(a;\ z)$ был наименее уклоняющимся от функции $f(z)$, непрерывной на бикомпакте G, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая подсистема точек уклонения $\{z_s\}_1^r(r \leqslant 2n+3-2p)$, для которой выполнено одно из двух:*

1) *либо при ранге матрицы (34′), равном r, выполняются условия:*

а) *ранг матрицы (B) системы уравнений (78) равен $2p-1$;*

б) *все числа $\sum_{t=1}^{p}(\mu_t'\omega_t''[P_s]+\mu_t''\omega_t'[P_s])$, $s=\overline{1, r}$ отличны от нуля и одного знака;*

2) *либо при линейной зависимости в узком смысле векторов $\vec{\varphi}_s^*$: $\sum c_s\vec{\varphi}_s^*=0$, числа c_s — одного знака.*

В формулировку теоремы 8′ уже не входят добавленные векторы и она носит конструктивный характер. Из теоремы 8 также может быть получена теорема конструктивного характера, к выводу которой сейчас и перейдем.

Пусть для взятых $r<2n+2$ точек уклонения $\{z_s\}_1^r$ система уравнений вида (78) имеет решение μ_t', $\mu_t''\left(\sum(|\mu_t'|+|\mu_t''|)>0\right)$. Обозначим через d ранг матрицы (B) коэффициентов при неизвестных системы (78) $\left(d \leqslant 2p-1\right.$, так как в противном случае имели бы $\left.\sum(|\mu_t'|+|\mu_t''|)=0\right)$. При $2p-d=l$ будем иметь множество решений системы (78)

$$\begin{aligned} m_t' &= h_1c_{t1}'+\ldots+h_lc_{tl}', \qquad t=\overline{1, p}, \\ m_t'' &= h_1c_{t1}''+\ldots+h_lc_{tl}'', \qquad t=\overline{1, p}, \end{aligned} \tag{88}$$

или полагая $\vec{m}=(m_1', \ldots, m_p', m_1'', \ldots, m_p'')$, $\vec{c}^{(\nu)}=(c_{1\nu}', \ldots, c_{p\nu}', c_{1\nu}'', \ldots, c_{p\nu}'')$ $(\nu=\overline{1, l})$,

$$\vec{m}=h_1\vec{c}^{(1)}+\ldots+h_l\vec{c}^{(l)}, \tag{89}$$

где $\vec{c}^{(1)},\ldots,\vec{c}^{(l)}$ — фундаментальная система решений однородной системы (78). При $d=2p-1$ система (78) имеет единственное решение (с точностью до общего множителя) и окончательное заключение относительно исследуемого полинома $F(a;\ z)$ будет зависеть от того, выполняется ли условие б) теоремы 8. Положим

$$\begin{aligned} \beta_j^{(\nu)'} &= \sum_{t=1}^{p}(c_{t\nu}'\alpha_j^{(t)'}-c_{t\nu}''\alpha_j^{(t)''}), \\ \beta_j^{(\nu)''} &= \sum_{t=1}^{p}(c_{t\nu}'\alpha_j^{(t)''}+c_{t\nu}''\alpha_j^{(t)'}). \end{aligned} \tag{90}$$

Векторы $\vec{\beta}_\nu=(\beta_0^{(\nu)'}, \beta_0^{(\nu)''}, \ldots, \beta_n^{(\nu)'}, \beta_n^{(\nu)''})\ (\nu=\overline{1, l})$ — линейно независимы. Действительно, допустим, что имеем

$$\sum_{\nu=1}^{l}c_\nu\vec{\beta}_\nu=0, \qquad \sum_{\nu=1}^{l}|c_\nu|>0,$$

или в другой форме $\sum\limits_{\nu=1}^{l} c_\nu \beta_j^{(\nu)'} = 0$. $\sum\limits_{\nu=1}^{l} c_\nu \beta_j^{(\nu)''} = 0$, т. е. имеем

$$\begin{gathered}\sum_{t=1}^{p}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c'_{t\nu}\right)\alpha_j^{(t)'}-\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c''_{t\nu}\right)\alpha_j^{(t)''}\right]=0, \qquad j=\overline{0, n},\\ \sum_{t=1}^{p}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c'_{t\nu}\right)\alpha_j^{(t)''}+\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c''_{t\nu}\right)\alpha_j^{(t)'}\right]=0, \qquad j=\overline{0, n}.\end{gathered} \tag{91}$$

Полученная система (91) означает:

$$\sum_{t=1}^{p}\left[\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c'_{t\nu}\right)+i\left(\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c''_{t\nu}\right)\right]\alpha_j^{(t)}=0, \qquad j=\overline{0, n}. \tag{91'}$$

Ввиду линейной независимости векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t=\overline{1, p}$, из (91′) имеем

$$\sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c'_{t\nu}=0, \qquad \sum_{\nu=1}^{l} c_\nu c''_{t\nu}=0, \qquad t=\overline{1, p}, \tag{91''}$$

т. е. $\sum\limits_{\nu=1}^{l} c_\nu \vec{c}^{(\nu)}=0$, $\sum |c_\nu| > 0$, что противоречит линейной независимости векторов $\vec{c}^{(\nu)}$, $\nu=\overline{1, l}$. При обозначении

$$k_s^{(\nu)}=\sum_{t=1}^{p}\left(c'_{t\nu}\omega''_t[P_s]+c''_{t\nu}\omega'_t[P_s]\right), \qquad s=\overline{1, r},\ \nu=\overline{1, l}$$

из (82′), (82) имеем

$$\begin{aligned}\beta_{j_1}^{(\nu)'} &= k_1^{(\nu)}\varphi_{j_1}^{*'}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_{j_1}^{*'}(z_r),\\ \beta_{j_2}^{(\nu)''} &= k_1^{(\nu)}\varphi_{j_2}^{*''}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_{j_2}^{*''}(z_r),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_{j_r}^{(\nu)''} &= k_1^{(\nu)}\varphi_{j_r}^{*''}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_{j_r}^{*''}(z_r), \qquad \nu=\overline{1, l}.\end{aligned} \tag{92}$$

Из того, что числа $c'_{t\nu}$, $c''_{t\nu}$, $t=\overline{1, p}$, $\nu=\overline{1, l}$ удовлетворяют системе уравнений (78) следует совместность систем уравнений

$$\begin{aligned}\beta_j^{(\nu)'} &= k_1^{(\nu)}\varphi_j^{*'}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_j^{*'}(z_r), \qquad j=\overline{0, n},\\ \beta_j^{(\nu)''} &= k_1^{(\nu)}\varphi_j^{*''}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_j^{*''}(z_r), \qquad j=\overline{0, n}, \qquad \nu=\overline{1, l}.\end{aligned} \tag{93}$$

Из (93) получаем

$$\beta_j^{(\nu)}=k_1^{(\nu)}\varphi_j^{*}(z_1)+\ldots+k_r^{(\nu)}\varphi_j^{*}(z_r), \qquad j=\overline{0, n}, \qquad \nu=\overline{1, l} \tag{93'}$$

и тождества

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\beta_j^{(\nu)} \equiv \sum_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)}F^*(a; z_s), \qquad \nu=\overline{1, l}. \tag{94}$$

Из (94), в частности, получаем $\sum\limits_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)}F^*(A; z_s) \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} A_j\beta_j^{(\nu)} = \sum\limits_{j=0}^{n} A_j\left(\sum\limits_{t=1}^{p} c_{t\nu}\alpha_j^{(t)}\right) =$

$$= \sum_{t=1}^{p} c_{t\nu} \left(\sum_{j=0}^{n} A_j \alpha_j^{(t)} \right) = 0, \text{ т. е.}$$

$$\sum_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)} F^* (A; z_s) = 0, \qquad \nu = \overline{1, l}, \tag{94'}$$

откуда

$$\sum_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)} \widetilde{F}^* (\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \qquad \nu = \overline{1, l}. \tag{95}$$

Заметим, что ранг матрицы $\| k_s^{(\nu)} \|_{\substack{\nu=\overline{1,l} \\ s=\overline{1,r}}}$ из (93) равен l.

Действительно, в противном случае пришли бы к тому, что векторы $\vec{\beta}_\nu$, $\nu = \overline{1, l}$ — линейно зависимы, что не так.

Из (94′) имеем

$$\sum_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)} F^{*\prime} (A; z_s) = 0, \qquad \nu = \overline{1, l},$$

а из (95) получаем тождества

$$\sum_{s=1}^{r} k_s^{(\nu)} \widetilde{F}^{*\prime} (\widetilde{A}; z_s) \equiv 0, \qquad \nu = \overline{1, l}. \tag{96}$$

Тождества (96) для форм $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s)$ от $2n + 2 - 2p$ действительных свободных параметров были получены из систем (5), (6) при выполнении (78), причем никаких дополнительных тождеств вида (96) не получается более. Для тождеств (96) справедлива следующая теорема.

Теорема 1′. *Для того чтобы в тождествах* (96) *формы* $\widetilde{F}^{*\prime}(\widetilde{A}; z_s)$, $s = \overline{l+1, r}$ *были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы определитель* $| k_s^{(\nu)} |_{\substack{\nu=\overline{1,l} \\ s=\overline{1,l}}} \neq 0$.

На основе теоремы 1′ как и для (45) доказывается, что существуют числа $h_1, \ldots, h_l$, $\sum | h_s | > 0$ такие, что

$$\lambda_s = \sum_{\nu=1}^{l} h_\nu k_s^{(\nu)}, \qquad s = \overline{1, r}, \tag{97}$$

где λ_s из (31′). Числа h_ν, $\nu = \overline{1, l}$ вычисляются из систем линейных уравнений

$$\begin{aligned} 0 &= h_1 k_s^{(1)} + \ldots + h_l k_s^{(l)}, \; s = \overline{1, l-1}, \\ 1 &= h_1 k_l^{(1)} + \ldots + h_l k_l^{(l)} \end{aligned} \tag{98}$$

(в (31′) можем считать $\lambda_l = 1$). Подставив значения h_ν из (98) находим

$$\lambda_s = \sum_{\nu=1}^{l} h_\nu k_s^{(\nu)} = | k_1^{(\nu)} \ldots k_{l-1}^{(\nu)} k_s^{(\nu)} |_{\nu=\overline{1,l}} : | k_1^{(\nu)} \ldots k_l^{(\nu)} |_{\nu=\overline{1,l}}. \tag{97'}$$

Пусть $F(a^*; z)$ — решение задачи (2). Для некоторой подсистемы точек уклонения будет выполняться тождество вида (31′). Тогда, если векторы $\vec{\varphi}_s^{\,*}$ — линейно независимы, условия (78) будут выполнены и из совместной системы уравнений (93) получаем матрицу чисел

$$\| k_s^{(\nu)} \|_{\nu=\overline{1,l},\ s=\overline{1,r}}. \tag{99}$$

Из изложенного вытекает следующая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы допустимый полином $F(a^*; z)$ был наименее уклоняющимся от функции $f(z)$, непрерывной на бикомпакте G, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой подсистемы точек уклонения $\{z_s\}_1^{r^*}$ было выполнено одно из двух:*

1) *для некоторых точек $\{z_s\}_1^r \subseteq \{z_s\}_1^{r^*}$ ранг матрицы (34′) равен r и выполняется условие:*

а) *для некоторых фиксированных линейно независимых столбцов $\begin{pmatrix} k_t^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_t^{(l)} \end{pmatrix}$ $(t = \overline{1, l-1})$ матрицы (99), соответствующей r точкам уклонения, отличные от нуля числа $| k_1^{(\nu)} \ldots k_{l-1}^{(\nu)} k_s^{(\nu)} |_{\nu=\overline{1,l}}$, $s = \overline{1, r}$, одного знака;*

2) *для некоторых точек $\{z_s\}_1^r \subseteq \{z_s\}_1^{r^*}$ существует линейная зависимость в узком смысле векторов $\vec{\varphi}_s^*$*

$$\sum_{s=1}^{r} c_s \vec{\varphi}_s^* = 0,$$

где числа c_s — одного знака.

Заметим также, что выполнение тождества $\sum\limits_{s=1}^{r} c_s \vec{\varphi}_s^* = 0$, где c_s — одного знака, для точек уклонения $\{z_s\}_1^r$, достаточно, чтобы полином $F(a; z)$ был наименее уклоняющимся от функции $f(z)$ на G. Условие а) теоремы 9 на основе теоремы вида 4 уточняется следующим образом:

а)* *для некоторых фиксированных линейно независимых столбцов $\begin{pmatrix} k_t^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ k_t^{(m)} \end{pmatrix}$ $(t = \overline{1, m-1})$ подматрицы из $m \leqslant l$ строк матрицы (99), соответствующей r точкам уклонения, отличные от нуля числа*

$$| k_1^{(\nu)} \ldots k_{m-1}^{(\nu)} k_s^{(\nu)} |_{\nu=\overline{1,m}}, \qquad s = \overline{1, r}$$

одного знака.

Замечание. Исследование специальных случаев 1 и 2 задачи (2) без добавленных векторов проводится аналогично рассмотренному (ср. также [2]).

§ 7. Обратная задача В. А. Маркова в комплексной области

Под обратной задачей В. А. Маркова в комплексной области будем понимать нахождение таких p линейно независимых связей вида (1), при которых наперед данный полином $F(a; z) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \varphi_j(z)$, составленный из линейно независимых функций $\{\varphi_j(z)\}_0^n$, будет наименее уклоняющимся от функции $f(z)$ на G.

Случай $p = n + 1$ является тривиальным как для прямой, так и для обратной задачи В. А. Маркова и на нем нет необходимости останавливаться. Рассмотрим различные методы решения обратной задачи В. А. Маркова.

1). Для заданной функции $f(z)$ и полинома $F(a^*; z)$ подобрать p линейно независимых связей так, чтобы точки уклонения $\{z_s\}_1^r$, для которых векторы $\vec{\varphi}_s^* = (\varphi_0^{*'}(z_s), \varphi_0^{*''}(z_s), \ldots, \varphi_n^{*'}(z_s), \varphi_n^{*''}(z_s))$, $s = \overline{1, r}$ линейно независимы, составляли чебышевскую подсистему точек уклонения.

Для решения задачи берем числа $\lambda_s > 0$, $s = \overline{1, r}$ и положим

$$\sum_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^*(z_s) = \gamma_j, \qquad j = \overline{0, n}. \tag{100}$$

Берем числа $\mu_t\, (\mu_t = \mu_t' + i\mu_t'')$ и p линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t = \overline{1, p}$, удовлетворяющих условию: $\gamma_j = \sum\limits_{t=1}^{p} \mu_t \alpha_j^{(t)}$, $j = \overline{0, n}$, т. е. $\gamma_j' + i\gamma_j'' = \sum\limits_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)'} - \mu_t'' \alpha_j^{(t)''}) + i \sum\limits_{t=1}^{p} (\mu_t'' \alpha_j^{(t)'} + \mu_t' \alpha_j^{(t)''})$. Искомыми связями будут $\sum\limits_{j=0}^{n} a_j \alpha_j^{(t)} = \alpha_t$, $t = \overline{1, p}$, где $\alpha_t = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j^*$.

Доказательство. К r линейно независимым векторам $\vec{\varphi}_s^*$, $s = \overline{1, r}$ добавим $2n + 2 - r$ векторов $\vec{d}_s$, $s = \overline{r + 1, 2n + 2}$ таких, что все $2n + 2$ вектора $\vec{\varphi}_s^*$, $\vec{d}_s$ будут линейно независимыми между собой. Из систем линейных уравнений вида (5), (6) получаем:

$$\sum_{s=1}^{r} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] \varphi_j^{*'}(z_s) +$$
$$+ \sum_{s=r+1}^{2n+2} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] d_j'(s) = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)'} - \mu_t'' \alpha_j^{(t)''}), \qquad j = \overline{0, n}, \tag{101}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] \varphi_j^{*''}(z_s) +$$
$$+ \sum_{s=r+1}^{2n+2} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] d_j''(s) = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' \alpha_j^{(t)''} + \mu_t'' \alpha_j^{(t)'}), \qquad j = \overline{0, n}. \tag{101'}$$

Так как $\gamma_j' = \sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*'}(z_s)$, $\gamma_j'' = \sum\limits_{s=1}^{r} \lambda_s \varphi_j^{*''}(z_s)$ (см. (100)), то из (101), (101′) получаем:

$$\sum_{s=1}^{r} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) - \lambda_s \right] \varphi_j^{*'}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] d_j'(s) = 0,$$
$$j = \overline{0, n}, \tag{102}$$

$$\sum_{s=1}^{r} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) - \lambda_s \right] \varphi_j^{*''}(z_s) + \sum_{s=r+1}^{2n+2} \left[\sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}) \right] d_j''(s) = 0,$$
$$j = \overline{0, n}. \tag{102'}$$

Из (102), (102′) получаем

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} (\mu_t' K_s^{(t)'} + \mu_t'' K_s^{(t)''}), \qquad s = \overline{1, r}, \qquad \lambda_s > 0,$$

$$0=\sum_{t=1}^{p}(\mu_t' K_s^{(t)'}+\mu_t'' K_s^{(t)''}),\qquad s=\overline{r+1,\,2n+2},$$

т. е. условия (71), (72) теоремы 3 выполнены.

2). Пусть точки уклонения $\{z_s\}_1^r$ полинома $F(a^*; z_s)$ от функции $f(z)$ таковы, что соответствующие векторы

$$\vec{\varphi}_s^*=(\varphi_0^{*'}(z_s),\ \ \varphi_0^{*''}(z_s),\ \ldots,\ \varphi_n^{*'}(z_s),\ \ \varphi_n^{*''}(z_s)),\qquad s=\overline{1,\,r}$$

связаны линейной зависимостью вида:

$$\sum_{s=1}^{r} c_s\vec{\varphi}_s^*=0,\qquad c_s>0,\qquad s=\overline{1,\,r}. \tag{$*$}$$

Для решения обратной задачи берем p линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{(t)}=(\alpha_0^{(t)},\ldots,\alpha_n^{(t)})$, $t=\overline{1,\,p}$. Искомыми линейно независимыми связями будут

$$\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^{(t)}a_j=\alpha_t,\quad t=\overline{1,\,p},\quad \text{где } \alpha_t=\sum_{j=0}^{n}\alpha_j^{(t)}a_j^*,\qquad t=\overline{1,\,p}. \tag{$**$}$$

То, что $F(a^*; z)$ при указанных связях ($**$) будет наименее уклоняющимся от функции $f(z)$, следует из того, что из ($*$) получаем тождество $\sum\limits_{s=1}^{r}\lambda_s\widetilde{F}^*(\vec{A}; z_s)\equiv 0$, $\lambda_s>0$, $s=\overline{1,\,r}$ (возможно и приводимое) [1]. Аналогично решается обратная задача, если точки уклонения $\{z_s\}_1^r$ полинома $F(a^*; z)$ от функции $f(z)$ таковы, что соответствующие векторы $\vec{\varphi}(z_s)=(\varphi_0(z_s),\ldots,\varphi_n(z_s))$ связаны линейной зависимостью вида: $\sum\limits_{s=1}^{r}c_s\vec{\varphi}(z_s)=0$, где $\operatorname{sgn} c_s=\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}$, $\delta(z_s)=F(a^*; z_s)-f(z_s)$. Для решения обратной задачи берем p линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{(t)}=(\alpha_0^{(t)},\ldots,\alpha_n^{(t)})$, $t=\overline{1,\,p}$. Искомыми линейно независимыми связями будут $\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_j^{(t)}a_j=\alpha_t$, $t=\overline{1,\,p}$, где $\alpha_t=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j^*\alpha_j^{(t)}$.

3). Найдем p линейно независимых связей так, чтобы полином $F(a^*; z)$ был наименее уклоняющимся от функции $f(z)$ при подобранных связях, а некоторые $q\,(q\leqslant n+1)$ точек уклонения $\{z_s\}_1^q$, для которых векторы $\vec{\varphi}(z_s)=(\varphi_0(z_s),\ldots,\varphi_n(z_s))$, $s=\overline{1,\,q}$ линейно независимы, составляли чебышевскую подсистему точек уклонения (возможно и приводимую).

Первый метод. Берем q чисел λ_s, $s=\overline{1,\,q}$, $\operatorname{sgn}\lambda_s=\operatorname{sgn}\overline{\delta(z_s)}$ и полагаем

$$\sum_{s=1}^{q}\lambda_s\varphi_j(z_s)=\gamma_j,\qquad j=\overline{0,\,n}. \tag{103}$$

Берем p чисел μ_t, $t=\overline{1,\,p}$ и p линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{(t)}=(\alpha_0^{(t)},\ldots,\alpha_n^{(t)})$, $t=\overline{1,\,p}$, для которых выполнено условие $\gamma_j=\sum\limits_{t=1}^{p}\mu_t\alpha_j^{(t)}$, $j=\overline{0,\,n}$.

Искомыми связями будут $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t$, $t=\overline{1, p}$, где $\alpha_t = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \alpha_j^{(t)}$, $t=\overline{1, p}$.

Действительно, возьмем $n+1-q$ произвольных векторов $\vec{d}(s) = (d_0(s), \ldots$ $\ldots, d_n(s))$ таких, что все $n+1$ векторов $\vec{d}(s)$, $\vec{\varphi}(z_s)$ линейно независимы. Рассмотрим системы уравнений

$$\alpha_j^{(t)} = \sum_{s=1}^{q} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s) + \sum_{s=q+1}^{n+1} d_j(s) K_s^{(t)}, \qquad j=\overline{0, n}, \qquad t=\overline{1, p}. \tag{104}$$

Из (103), (104) получаем

$$\sum_{s=1}^{q} \left[\left(\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} \right) - \lambda_s \right] \varphi_j(z_s) + \sum_{s=q+1}^{n+1} \left(\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} \right) d_j(s) = 0, \qquad j=\overline{0, n},$$

т. е. имеем

$$\lambda_s = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}, \qquad s=\overline{1, q},$$

$$0 = \sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}, \qquad s=\overline{q+1, n+1},$$

что означает выполнение условий а), б) теоремы 7 (см. (70)).

Второй метод. Берем q чисел λ_s, $\operatorname{sgn}\lambda_s = \operatorname{sgn}\delta(z_s)$, $s=\overline{1, r}$. Берем затем произвольно p чисел μ_t, $t=\overline{1, p}$, $\sum|\mu_t| > 0$ и подбираем p линейно независимых векторов $\vec{K}^{(t)} = (K_1^{(t)}, \ldots, K_{n+1}^{(t)})$, $t=\overline{1, p}$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = \lambda_s, \qquad s=\overline{1, q},$$

$$\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = 0, \qquad s=\overline{q+1, n+1}.$$

К имеющимся q векторам $\vec{\varphi}(z_s)$, соответствующим точкам уклонения $\{z_s\}_1^q$, добавим $n+1-q$ произвольных фиксированных векторов $\vec{d}(s) = (d_0(s), \ldots$ $\ldots, d_n(s))$, $s=\overline{q+1, n+1}$ таких, что все $n+1$ векторов $\vec{\varphi}(z_s)$, $\vec{d}(s)$ — линейно независимы. Определим координаты векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t=\overline{1, p}$ равенствами

$$\alpha_j^{(t)} = \sum_{s=1}^{q} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s) + \sum_{s=q+1}^{n+1} d_j(s) K_s^{(t)}, \qquad j=\overline{0, n}, \qquad t=\overline{1, p}.$$

Искомыми связями будут

$$\omega_t[F] \equiv \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t, \quad \text{где} \quad \alpha_t = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \alpha_j^{(t)}, \qquad t=\overline{1, p}.$$

Если $p \leqslant q < n+1$, то p линейно независимых векторов $\vec{K}^{(t)}$ и числа μ_t можно брать так, чтобы было выполнено условие

$$\operatorname{sgn}\left(\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} \right) \cdot \operatorname{sgn}(F(a^*; z_s) - f(z_s)) = \text{const}, \qquad s=\overline{1, q}.$$

Координаты векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t = \overline{1, p}$ определим равенствами

$$\alpha_j^{(t)} = \sum_{s=1}^{q} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s), \qquad j = \overline{0, n}, \qquad t = \overline{1, p}.$$

Получаемые при этом векторы $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t = \overline{1, p}$ будут линейно независимыми (см. [2]). Искомыми линейно независимыми связями будут $\omega_t[F] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t$, где $\alpha_t = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \alpha_j^{(t)}$, $t = \overline{1, p}$.

4). Найдем p линейно независимых связей так, чтобы фиксированные $q \leqslant n + 2 - p$ точек уклонения $\{z_s\}_p^{p+q-1}$, для которых векторы $\vec{\varphi}(z_s)$ — линейно независимы, составляли неприводимую чебышевскую подсистему точек уклонения.

Для нахождения связей указанного вида подбираем числа $K_s^{(t)}$, $t = \overline{1, p}$, $s = \overline{1, p}$ и числа μ_t, $t = \overline{1, p}$, $\sum |\mu_t| > 0$ так, чтобы было выполнено

$$\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = 0, \qquad s = \overline{1, p-1},$$

$$\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_p^{(t)} = \lambda_p \neq 0,$$

причем определитель

$$|K_s^{(\nu)}|_{\substack{\nu = \overline{1,p} \\ s = \overline{1,p}}} \neq 0.$$

Затем подбираем числа $K_s^{(t)}$, $s = \overline{p, n+1}$, $t = \overline{1, p}$ так, чтобы $\operatorname{sgn}\left(\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)}\right) \times$ $\times \operatorname{sgn} \delta(z_s) = \text{const} = \sigma$, $s = \overline{p, p+q-1}$ и $\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} \neq 0$, $s = \overline{p, p+q-1}$, $t = \overline{1, p}$, где $\sigma = \operatorname{sgn} K_p \cdot \operatorname{sgn} \delta(z_p)$ и, далее $\sum_{t=1}^{p} \mu_t K_s^{(t)} = 0$, $s = \overline{p+q, n+1}$.

Получим p линейно независимых векторов

$$\vec{K}^{(t)} = (K_1^{(t)}, \ldots, K_{n+1}^{(t)}), \qquad t = \overline{1, p}.$$

Дополним q линейно независимых векторов $\vec{\varphi}(z_s)$ такими $n + 1 - q$ векторами $\vec{d}(s)$, чтобы все $n + 1$ векторов были линейно независимыми. Координаты векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$ определим равенствами:

$$\alpha_j^{(t)} = \sum_{s=1}^{p-1} K_s^{(t)} d_j(s) + \sum_{s=p}^{p+q-1} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s) + \sum_{s=p+q}^{n+1} K_s^{(t)} d_j(s), \qquad j = \overline{0, n}, \qquad t = \overline{1, p}.$$

Искомыми линейно независимыми связями будут $\omega_t[F] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t$, $t = \overline{1, p}$, где $\alpha_t = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \alpha_j^{(t)}$.

5). Пусть взято r ($r \leqslant n + 1$) точек уклонения $\{z_s\}_1^r$, для которых векторы $\vec{\varphi}(z_s)$, $s = \overline{1, r}$ — линейно независимы. Для нахождения p линейно независимых связей поступаем следующим образом. Берем числа $K_{r+1}^{(1)} = \ldots$ $\ldots = K_{n+1}^{(1)} = 0$, $K_s^{(1)} \neq 0$, $s = \overline{1, r}$, причем, $\operatorname{sgn} K_s^{(1)} \cdot \operatorname{sgn} \delta(z_s) = \text{const}$, $s = \overline{1, r}$. Возьмем $p - 1$ векторов $\vec{K}^{(t)}$, $t = \overline{2, p}$ таких, что все p векторов $\vec{K}^{(t)}$, $t = \overline{1, p}$ линейно независимы. Систему r линейно независимых векторов $\vec{\varphi}(z_s)$, $s = \overline{1, r}$ дополним $n + 1 - r$ векторами $\vec{d}(s)$, $s = \overline{r + 1, n + 1}$ такими, что все $n + 1$ векторов $\vec{\varphi}(z_s)$, $\vec{d}(s)$ — линейно независимы. Координаты векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t = \overline{1, p}$ определим равенствами

$$\alpha_j^{(t)} = \sum_{s=1}^{r} K_s^{(t)} \varphi_j(z_s) + \sum_{s=r+1}^{n+1} K_s^{(t)} d_j(s), \qquad j = \overline{0, n} \qquad t = \overline{1, p}.$$

Искомыми связями будут $\omega_t[F] = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t$, $t = \overline{1, p}$, где $\alpha_t = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \alpha_j^{(t)}$.

6). Пусть среди точек уклонения полинома $F(a^*; z)$ от функции $f(z)$ имеются фиксированные нули, т. е. точки $z_0 \in G$, для которых $\varphi_j(z_0) = 0$, $j = \overline{0, n}$. Для решения обратной задачи берем p линейно независимых векторов $\vec{\alpha}^{(t)} = (\alpha_0^{(t)}, \ldots, \alpha_n^{(t)})$, $t = \overline{1, p}$. Искомыми связями будут $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j = \alpha_t$, $t = \overline{1, p}$, где $\alpha_t = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^{(t)} a_j^*$.

Заметим, что число методов решения обратной задачи можно увеличить, как это видно из экстремальных теорем прямой задачи В. А. Маркова. Из изложенного вытекает следующая теорема.

Теорема 10. *Для всякого полинома $F(a^*; z) = \sum_{j=0}^{n} a_j^* \varphi_j(z)$, составленного из линейно независимых комплексных функций $\{\varphi_j(z)\}_0^n$ и комплексной функции $f(z)$, заданных на G, можно подобрать $p\,(p \leqslant n + 1)$ линейно независимых связей таких, что параметры полинома будут удовлетворять указанным связям и полином $F(a^*; z)$ будет наименее уклоняющимся от функции $f(z)$ при подобранных связях.*

Пример. Дан полином $F(a^*; z) = z^2$. Для заданного полинома подобрать связь так, чтобы он был наименее уклоняющимся от нуля в круге $|z| \leqslant 1$ при подобранной связи, а точки уклонения $z_1 = -i$, $z_2 = i$ составляли чебышевскую подсистему точек уклонения.

Имеем $\varphi_0(z) = 1$, $\varphi_1(z) = z$, $\varphi_2(z) = z^2$, $\delta(z_1) = -1$, $\delta(z_2) = -1$. Берем числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ и полагаем

$$1 + 1 = 2 = \alpha_0,$$
$$i - i = 0 = \alpha_1,$$
$$-1 - 1 = -2 = \alpha_2, \qquad \alpha = -2.$$

Искомой связью будет $2a_0 + 0 \cdot a_1 - 2a_2 = -2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Я. Ремез, Некоторые вопросы чебышевского приближения в комплексной области, УМЖ, 5, 1953, 3—49.
2. В. Д. Коромысличенко, Некоторые обобщения задачи В. А. Маркова и его основной теоремы, соответствующей критерию П. Л. Чебышева — А. А. Маркова. II, УМЖ, т. XIV, № 2, 1962, 29—43.

Поступила 18.XII 1962
Киев