1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18. № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О регулярной аппроксимации решений комплексных эллиптических уравнений любого порядка

Э. М. Саак

Введение. Начиная с 30-х годов, весьма интенсивно изучается возможность равномерного приближения функциями, аналитическими и гармоническими на замкнутом множестве. Сюда относятся исследования Дж. Л. Уолша, М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша, С. Н. Мергеляна и многие другие.

Основной результат в этом направлении, принадлежащий С. Н. Мергеляну [2], состоит в том, что для того чтобы всякую функцию, непрерывную на плоском компакте E и аналитическую во всех его внутренних точках, можно было равномерно на E с любой точностью приблизить функциями, аналитическими на E, достаточно (и вообще говоря, необходимо), чтобы дополнение к E состояло из конечного числа областей.

В связи с развитием в последнее время функциональной теории эллиптических уравнений (И. Н. Векуа [1], Л. Берс и др.) возник аналогичный вопрос о возможности приближения обобщенно аналитических функций. Обобщенно аналитические функции — это решения комплексного эллиптического уравнения первого порядка (обобщенного уравнения Коши — Римана). Как показал С. Я. Гусман [3], вопрос о возможности приближения для обобщенно аналитических функций сводится к эквивалентному вопросу для обычных аналитических функций.

В настоящей работе изучается возможность равномерного приближения решений комплексного эллиптического уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами при старших членах:

$$Lu \equiv \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{0 \leqslant r+s < m} a_{rs} \frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial y^s} + a_0 \bar{u} = 0 \qquad (*)$$

функциями, удовлетворяющими тому же уравнению в окрестности ограниченного замкнутого множества E.

Такая аппроксимация называется регулярной.

В случае уравнения Коши—Римана $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) f(z) = 0$ и уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ возможность регулярной аппроксимации влечет за собой, как известно, полноту системы $\left\{\frac{1}{z-a_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $(\{\ln|z-a_n|\}_{n-1}^{\infty})$ в пространстве функций, непрерывных на E и аналитических (гармонических) во внутренних точках E.

Возможность регулярной аппроксимации для общего эллиптического уравнения (*) влечет за собой полноту системы функций $\{K(a_n, z)\}_{n=1}^{\infty}$, где $K(\zeta, z)$ — фундаментальное решение этого уравнения, в пространстве $C_E N(L, \operatorname{int} E)$ функций, непрерывных на E и являющихся регулярными решениями уравнения (*) во внутренних точках E (§ 6).

В работе исследуется не только возможность, но и точность регулярной аппроксимации в зависимости от расстояния между границей данного множества E и границей более широкого множества $E\delta$, в котором должна быть регулярной приближающая функция (§ 5).

Для уравнений вида

$$L_0 u \equiv \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\partial^m u}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = 0$$

в работе установлена возможность равномерной полиномиальной аппроксимации (§ 7).

Коротко о методе. С. Н. Мергелян при получении цитированного выше результата использовал схему, которая стала затем обычной при доказательстве аппроксимационных теорем. Эта схема состоит в следующем. Приближаемая функция сглаживается, после чего с помощью формулы Грина выделяется нерегулярная часть. Последняя приближается посредством надлежащей аппроксимации (разрывного!) ядра Коши $\frac{1}{z}$. Это центральный момент доказательства. Прием, которым С. Н. Мергелян приближал ядро $\frac{1}{z}$, удалось несколько усовершенствовать, благодаря чему и появилась возможность приближать нужным образом более сложные ядра — фундаментальные решения уравнений (**) (§ 4).

Для исследования общего уравнения (*) предварительно устанавливается подобие операторов L и L_0 в банаховом пространстве непрерывных функций (§ 2).

Использование подобия операторов L и L_0 опирается на один простой, но важный факт из теории банаховых пространств, устанавливаемый в § 3.

В работе рассматриваются уравнения (*) с постоянными старшими коэффициентами. Полезно заметить, что можно построить пример вырождающегося эллиптического уравнения, для решений которого равномерная регулярная аппроксимация невозможна даже на таком простом множестве как квадрат.

Пользуюсь случаем поблагодарить С. Я. Альпера и И. И. Воровича, которым я очень обязан этой работой.

§ 1. Фундаментальные решения простых эллиптических уравнений

Определение. 1. *Эллиптический оператор вида*

$$L_0 = L_0\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \equiv \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^k \partial y^{m-k}}$$

с постоянными (комплексными) коэффициентами A_k *будем называть простым.*

Условие эллиптичности состоит в том, что функция $L_0(x, y) = \sum_{k=0}^{m} A_k x^n y^{m-k}$ вещественных переменных x, y нигде не обращается в нуль кроме как в начале координат. Это означает, что однородный полином $L_0(x, y)$ представим в виде $L_0(x, y) = p_0 \prod_{j=1}^{n} (x - p_j y)^{\varkappa_j}$, $\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j = m$, где p_0, p_j — комплексные числа, $p_k \neq p_j$, $j \neq k$, причем $\operatorname{Im} p_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$; а $\varkappa_j$ — натуральные.

Введем обозначения:

$$z_j = p_j x + y,$$

$$K(z) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\bar{z}_1^{m-1}}{z_1}, & \varkappa_1 = m; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} \bar{z}_j^{l-1} z_j^{m-l-1} \ln z_j, & \varkappa_1 < m. \end{cases}$$

Рассмотрим интегральную операцию L_0^{-1}:

$$L_0^{-1}(\varphi; G) = \iint\limits_G \varphi(\zeta) K(z-\zeta)\, d\xi d\eta, \qquad \zeta = \xi + i\eta, \qquad z = x + iy, \tag{1}$$

над функциями $\varphi(z)$, непрерывными в замкнутой (ограниченной) области $\bar{G}$. Через $I = I_G$ будем обозначать тождественную операцию.

Теорема 1. *При надлежащем выборе комплексных постоянных $\lambda_{l,j}$ функция $K(z)$ будет всюду однозначной и будет представлять собой фундаментальное решение уравнения $L_0 u = 0$, так что операция L_0^{-1} будет правой обратной операцией для L_0:*

$$L_0 L_0^{-1} = I$$

на множестве функций, удовлетворяющих в G условию Липшица какого-нибудь положительного порядка.

Доказательство. Условие однозначности функции $K(z)$ таково ($\varkappa_1 < m$):

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} \bar{z}_j^{l-1} z_j^{m-l-1} = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты однородного полинома, стоящего в левой части, получаем равносильное условие:

$$\sum_{0 \leqslant \mu+\nu \leqslant s} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} C_{l-1}^{\mu} C_{m-l-1}^{\nu} \bar{p}_j^{\mu} p_j^{\nu} = 0, \qquad s = 0, 1, \ldots, m-2.$$

Здесь C_m^n — биноминальные коэффициенты.
Эта система, очевидно, разрешима и определяет $\lambda_{l,j}$ с точностью до общего множителя.

Производя последовательное дифференцирование под знаком интеграла (1), пока это возможно, получаем:

$$L_0 L_0^{-1}(\varphi; G) = \left(\frac{\partial}{\partial x} - p_1 \frac{\partial}{\partial y}\right) \iint\limits_G C_1 \varphi(\zeta) \frac{d\xi d\eta}{p_1(\xi - x) + (\eta - y)},$$

где C_1 — постоянная, $m \geqslant \chi_1$.
С точностью до линейной замены переменных правая часть представляет собой произведение оператора Коши — Римана на плоский потенциал с ядром Коши. Но такое произведение есть тождественный оператор над функциями, имеющими непрерывные частные производные или хотя бы принадлежащими классу Липшица какого-нибудь порядка $\alpha > 0$ (см. [1], стр. 41).

Поэтому $L_0 L_0^{-1} = C_1' I$, где C_1' — постоянная, вычислять которую нет необходимости. Домножая $\lambda_{l,j}$ на общий множитель $\frac{1}{C_1^1}$, получаем $L_0 L_0^{-1} = I$, что и требовалось.

Решения простого эллиптического уравнения легко выражаются через аналитические функции комплексного переменного. Будем рассматривать классические решения, т. е. решения, имеющие непрерывные частные производные до m-го порядка. Такие решения принято называть регулярными.

Теорема 2. *Любое регулярное в области G решение простого эллиптического уравнения $L_0 u = 0$ представимо в виде:*

$$u(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \bar{z}_j^{l-1} \varphi_{j,l}(z_j), \tag{2}$$

где $\varphi_{j,l}$ — аналитические функции от комплексного переменного z_j, когда $z \in G$. Обратно, всякое выражение вида (2) будет регулярным решением уравнения $L_0 u = 0$.

Доказательство опускается.

§ 2. Почти изоморфность эллиптического оператора своей главной части

Определение 2. *Будем говорить, что банахово пространство B_1 — почти изоморфно B_2, если существует линейное непрерывное отображение T пространства B_1 в пространство B_2 такое, что:*

1) *образ TB_1 является замкнутым в B_2;*
2) *ядро отображения T (прообраз нуля) имеет конечную размерность;*
3) *образ $TB_1 \subset B_2$ имеет конечную коразмерность.*

Отображение T с такими свойствами будем называть почти изоморфным, а если $B_1 = B_2$ — почти автоморфным.

Напомним, что коразмерностью подпространства F пространства B называется размерность фактор-пространства B/F.

Определение 3. *Будем говорить, что линейный (дистрибутивный) оператор L_1 почти изоморфен L_2 в банаховом пространстве B, если:*

1) *операторы L_1 и L_2 имеют одинаковую область определения — подмножество $\Gamma \subset B$;*
2) *существует почти автоморфизм T пространства B, переводящий Γ в себя: $T\Gamma \subset \Gamma$ и такой, что:*
3) $L_1 = L_2 T$.

Рассмотрим общий эллиптический оператор L с постоянными коэффициентами при главной части:

$$L = \sum_{k=0}^{m} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^k \partial y^{m-k}} + \sum_{0 \leqslant r+s < m} a_{rs} \frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} + a_0 \bar{I}.$$

Коэффициенты a_{rs}, a_0 при младших членах считаются бесконечно гладкими (всюду) функциями. $\bar{I}$ есть операция комплексного сопряжения.

В качестве B рассмотрим банахово пространство $C(G)$ непрерывных функций $\varphi(z)$ в замкнутой области $\bar{G}$ с равномерной нормой: $\|\varphi\|_{C(G)} = \sup_{z \in G} |\varphi(z)|$, в качестве Γ — множество функций, имеющих непрерывные частные производные до m-го порядка в области G.

Теорема 3. *Если область G — ограничена, то эллиптический оператор L почти изоморфен своей главной части — оператору L_0 — в пространстве $C(G)$.*

Доказательство. Обозначим:

$$M \equiv -\sum_{0\leqslant r+s<m} a_{rs}\frac{\partial^{r+s}}{\partial x^r \partial y^s} + a_0\bar{I}.$$

Пусть μ — порядок M, $0 \leqslant \mu < m$.
Докажем лемму.

Лемма 1. *Операторное уравнение $L_0X = M$ разрешимо в классе линейных операторов, вполне непрерывно отображающих пространство $C(G)$ в себя.*

Доказательство. При $\mu = 0$ решением будет $X = L_0^{-1}M$. Пусть $\mu > 0$. Пусть операция S осуществляет коммутирование любого оператора с оператором L_0, так что

$$SM = ML_0 - L_0M.$$

Обозначим через S^k k-ю итерацию операции S. Аналогичный смысл имеет L_0^k. По индукции легко доказывается, что

$$S^kM = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu C_k^\nu L_0^\nu M L_0^{k-\nu}. \tag{1}$$

Действительно, предположив, что (1) верно, получаем

$$S^{k+1}M = (S^kM)L_0 - L_0(S^kM) = ML_0^{k+1} + \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu C_k^\nu L_0^\nu M L_0^{k+1-\nu} -$$

$$-\sum_{\nu=1}^{k}(-1)^{\nu-1}L_0^\nu M L_0^{k+1-\nu} - (-1)^k L_0^{k+1}M =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k}(-1)^\nu (C_k^{\nu-1} + C_k^\nu) L_0^\nu M L_0^{k+1-\nu} + ML_0^{k+1} -$$

$$-(-1)^k L_0^{k+1}M = \sum_{\nu=0}^{k+1}(-1)^\nu C_{k+1}^\nu L_0^\nu M L_0^{k+1-\nu}.$$

Но при $k=1$ равенство (1) имеет место по определению S, и значит (1) доказано. Положим $\mu_1 = \mu + 1$. Пусть $L_0^{-\mu_1}$ — правая обратная операция для $L_0^{\mu_1}$ в G:

$$L_0^{-\mu_1}(\varphi; G) \equiv \iint_G \varphi(\zeta) K_{\mu_1}(z-\zeta)\, d\xi d\eta,$$

где $K_{\mu_1}(z)$ — фундаментальное решение простого эллиптического уравнения $L_0^{\mu_1}u = 0$, построенное как в § 1.
Оператор

$$X = -\sum_{\nu=1}^{\mu_1}(-1)^\nu C_{\mu_1}^\nu L_0^{\nu-1} M L_0^{\mu_1-\nu} L_0^{-\mu_1} + L_0^{-1}\sum_{\nu=0}^{\mu_1}(-1)^\nu C_{\mu_1}^\nu L_0^\nu M L_0^{\mu_1-\nu} L_0^{-\mu_1}, \tag{2}$$

очевидно, удовлетворяет уравнению $L_0X = M$. Поскольку $\mu < m$, то порядок оператора $L_0^{\nu-1}ML_0^{\mu_1-\nu}$ не больше, чем $(\mu_1 m - 1)$ и потому каждое слагаемое первой суммы в (2) является интегралом типа потенциала и, стало быть ([1], стр. 54 — 57), вполне непрерывной операцией в $C(G)$. Займемся второй суммой, которая согласно (1) равна $(S^{\mu_1}M)L_0^{-\mu_1}$. Нетрудно убедиться по индукции, что порядок дифференциального оператора S^kM

равен $(km+\mu-k)$. Это предоставляется читателю. Таким образом, порядок $S^{\mu_1}M$ равен $(\mu_1 m-1)$. Это означает, что оператор $(S^{\mu_1}M)\,L_0^{-\mu_1}$ есть интеграл типа потенциала и, значит, является вполне непрерывным. Этим полная непрерывность оператора X, а тем самым и лемма 1 доказана.

Закончим доказательство теоремы 3.

Имеем, пользуясь леммой

$$L=L_0-M=L_0(I-X)=L_0T,$$

где $T=I-X$. То, что T — почти автоморфное отображение пространства $C(G)$ вытекает из теории вполне непрерывных операторов (см., напр., [5], стр. 440 и др.). Остается показать, что $T\Gamma\subset\Gamma$. Но это вытекает из предыдущего анализа представления (2) для оператора X и известных свойств интегралов типа потенциала [1].

Примечание к теореме 3. Ядро $N(T)$ построенного выше отображения T состоит из бесконечно гладких функций.

Обозначим через $CN(L, G)$ подпространство пространства $C(G)$, состоящее из всех регулярных в области G решений уравнения $Lu=0$.

Теорема 4. *Если область G — ограничена, то пространство $CN(L, G)$ — почти изоморфно пространству $CN(L_0, G)$.*

Доказательство. Согласно предыдущему $L=L_0T$ и, как легко видеть, T осуществляет искомое почти изоморфное отображение $TCN(L, G)= CN(L_0, G)\cap TC(G)$.

Примечание к теореме 4. Если диаметр области G достаточно мал, то пространства $CN(L, G)$ и $CN(L_0, G)$ изоморфны.

§ 3. Некоторые сведения из геометрии банаховых пространств

Через $\varrho(x, E)$ обозначается расстояние элемента x до множества E в банаховом пространстве B.

Теорема 5. *Пусть E_0 и F — подпространства банахова пространства B.*

Если F имеет конечную коразмерность, то расстояния любого элемента $x\in E_0$ до F и до пересечения E_0 с F связаны неравенством

$$\varrho(x, E_0\cap F)\leqslant C(E_0, F)\ \varrho(x, F),$$

где $C(E_0, F)$ — постоянная (не зависит от x).

Доказательство. С помощью процесса биортогонализации можно построить конечномерный (за счет конечной коразмерности F) проектор P пространства E_0 на $E_0\cap F$, который будет тождественной операцией на F:

1) $Px\in(E_0\cap F),\ x\in E_0$;

2) $Py=y,\ y\in F$.

После этого будем иметь, обозначая через I тождественную операцию

$$\varrho(x, E_0\cap F)\leqslant\|(I-P)x\|=\|(I-P)(x-y)\|,\qquad y\in F,$$

отсюда

$$\varrho(x, E_0\cap F)\leqslant(1+\|P\|)\|x-y\|=C\|x-y\|,\qquad y\in F,$$

где $C=1+\|P\|$ — постоянная.

Беря inf по $y\in F$, получаем

$$\varrho(x, E_0\cap F)\leqslant C\varrho(x, F).$$

Обозначая через $C(E_0, F)$ нижнюю грань чисел C, для которых справедливо (4), получаем требуемое неравенство.

Покажем, как строить проектор P.

Размерность (ν) сопряженного пространства $(B/F)^*$ к фактор-пространству B/F равна размерности B/F, т. е. коразмерности F и поэтому — конечна. Пусть $\{\widetilde{g}_s\}$, $s=1, 2, \ldots, \nu$ — базис в $(B/F)^*$. Для того, чтобы $y\in F$, необходимо и достаточно, чтобы $\widetilde{g}_s(y)=0$, $s=1, 2, \ldots, \nu$. Выделим максимальную подсистему $\{g_k\}\subset\{\widetilde{g}_s\}$, $k=1, 2, \ldots, \mu$; $\mu\leqslant\nu$, состоящую из всех функционалов $\widetilde{g}_s$, независимых над E_0. При помощи процесса биортогонализации можно найти систему элементов $\{x_k\}\subset E_0$, $k=1, 2, \ldots, \mu$, биортогональную к $\{g_k\}$:

$$g_k(x_l)=\delta_{kl}, \quad \text{где} \quad \delta_{kl}=\begin{cases}1, & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}$$

Теперь строим P

$$Px=x-\sum_{k=1}^{\mu} g_k(x)\, x_k.$$

Свойства 1), 2) легко вытекают из построения P.

Теорема 5[1]. *Пусть $E_0\subset E_1\subset E_2\subset\ldots\subset E_n\subset E_{n+1}\subset\ldots$ — расширяющаяся последовательность подпространств банахова пространства B.*

Если подпространство $F\subset B$ имеет конечную коразмерность, то расстояния любого элемента $x\in E_n$ до F и до пересечения E_n с F связаны неравенством

$$\varrho(x, E_n\cap F)\leqslant\alpha\varrho(x, F),$$

где постоянная α не зависит от n $(n=0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Из системы $\{\widetilde{g}_s\}\setminus\{g_k\}$, состоящей из функционалов $\widetilde{g}_s\notin\{g_k\}$, выделим все функционалы, независимые над E_1, и присоединим их к $\{g_k\}$. Получим систему $\{g_k\}$, $k=1, 2, 3, \ldots, \mu_1$; $\mu_1\leqslant\nu$. Систему элементов $\{x_k\}\subset E_0\subset E_1$ можно пополнить элементами $x_{\mu+1}, x_{\mu+2}, \ldots, x_{\mu_1}$ из E_1 так, чтобы системы $\{g_k\}$ и $\{x_k\}$, $k=1, 2, \ldots, \mu_1$, были биортогональными $g_k(x_l)=\delta_{kl}$. Оператор P_1

$$P_1x=x-\sum_{k=1}^{\mu_1} g_k(x)\, x_k$$

обладает, как легко видеть, следующими свойствами:

$$P_1x\in(E_1\cap F), \quad x\in E_1,$$
$$P_1y=y, \quad y\in F.$$

Совершенно аналогично строим проектор P_2 для E_2 с аналогичными свойствами, затем P_3 для E_3 и т. д. При этом получится последовательность целых чисел $\mu\leqslant\mu_1\leqslant\mu_2\leqslant\ldots$, ограниченная числом ν $\mu_n\leqslant\nu$, $n=0, 1, 2, \ldots$ Поэтому среди чисел μ_n, а значит и среди операторов P_n, имеется лишь конечное число различных.

Рассуждая, как при доказательстве предыдущей теоремы, получаем оценку

$$\varrho(x, E_n\cap F)\leqslant(1+\|P_n\|\,\varrho(x, F)\leqslant\alpha\varrho(x, F), \quad x\in E_n,$$

где $\alpha=1+\max\limits_n\|P_n\|$ — постоянная, не зависящая от n $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

§ 4. Регулярная аппроксимация фундаментальных решений

Лемма 2. *Пусть плоский компакт E диаметра не больше, чем D, имеет конечное число дополнительных областей и диаметр любой из них не меньше, чем $d>0$. Пусть R_δ есть множество точек ζ из E, отстоящих от границы не более, чем на δ, $0<\delta<1$.*

Пусть $K(z)$ — фундаментальное решение простого эллиптического уравнения (см. § 1) порядка m. Тогда существует функция $h_\zeta(z)$, являющаяся регулярным решением того же самого уравнения (как функция от z) в окрестности множества E, такая, что

$$\iint\limits_{R_\delta} |K(z-\zeta) - h_\zeta(z)|\, d\xi d\eta \leqslant C(d)\,\delta^m, \quad z \in E, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

где постоянная $C(d)$ зависит только от d, D и коэффициентов уравнения.

Доказательство. Следуя С. Н. Мергеляну [2], можно установить существование функции $\omega_\zeta(z)$, аналитической по $z = x + iy$ на E при любом фиксированном $\zeta \in R_\delta$ и обладающей свойствами:

1) $|z - \zeta - \omega_\zeta(z)| < C_1\delta, \quad z \in E;$
2) $|\omega_\zeta(z)| > C_2\delta, \quad z \in E;$
3) $|\omega_\zeta(z)| > C_3|\xi - z|, \quad z \in E.$

Положительные постоянные C_1, C_2, C_3 зависят только от d и D.

Везде далее вместо постоянных, зависящих только от d, D и коэффициентов уравнения, будем писать const.

Пусть p_j — корни характеристического полинома рассматриваемого уравнения (см. § 1).

В силу эллиптичности: $\operatorname{Im} p_j \neq 0$, поэтому

$$|p_j x + y| \geqslant \text{const}\,|z|. \tag{1}$$

Таким образом, замена z на $z_j = p_j x + y$ есть невырожденное линейное преобразование. Обозначим его через l_j. Пусть $E_j = l_j E$ есть образ множества E.

Диаметр E_j не больше, чем const, а ввиду (1) диаметры дополнительных к E_j областей не меньше, чем const. Положим:

$$z_j = l_j z = p_j x + y; \quad \zeta_j = l_j \xi = p_j \xi + \eta.$$

Для множества E_j и любой точки $\zeta_j \in l_j R_\delta$ построим аналитическую по переменной $z \in E_j$ функцию $\omega_{\zeta_j}(z)$, обладающую теми же свойствами, что и $\omega_\zeta(z)$ по отношению к E:

1) $|z - \zeta_j - \omega_{\zeta_j}(z)| < \text{const.}\,\delta, \quad z \in E_j;$
2) $|\omega_{\zeta_j}(z)| > \text{const.}\,\delta, \quad z \in E_j;$
3) $|\omega_{\zeta_j}(z)| > \text{const.}\,|z - \zeta_j|, \quad z \in E_j.$

Обозначая

$$\omega_\zeta^{(j)} \equiv \omega_\zeta^{(j)}(z_j) \equiv \omega_{l_j\zeta}(l_j z),$$

получаем аналитическую функцию по переменной z_j, когда $z = x + iy \in E$, обладающую свойствами:

1) $|z_j - \zeta_j - \omega_\zeta^{(j)}(z_j)| < \text{const.}\,\delta, \quad z \in E;$
2) $|\omega_\zeta^{(j)}(z_j)| > \text{const.}\,\delta, \quad z \in E;$
3) $|\omega_\zeta^{(j)}(z_j)| > \text{const.}\,|\zeta - z|, \quad z \in E$

и это для любого $\zeta \in R_\delta$.

Как показано в § 1, фундаментальное решение $K(z - \zeta)$ имеет вид

$$K(z-\zeta) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{\overline{z_1 - \zeta_1}^{\,m-1}}{z_1 - \zeta_1}, & \varkappa_1 = m; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j}\, \overline{z_j - \zeta_j}^{\,l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \ln (z_j - \zeta_j), & \varkappa_1 < m. \end{cases}$$

1-й случай: $\varkappa_1 = m$. Функция

$$S_m(z) = \lambda_1 \frac{\overline{z_1 - \zeta_1}^{m-1}}{z_1 - \zeta_1} \left[1 - \left(\frac{\omega_\zeta^{(1)}(z_1) - (z_1 - \zeta_1)}{\omega_\zeta^{(1)}(z_1)} \right)^{m+1} \right] \tag{2}$$

является регулярным решением уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - p_1 \frac{\partial}{\partial y} \right)^m u = 0$$

в окрестности множества E. В самом деле, $S_m(z)$ можно записать в виде

$$S_m(z) = \lambda_1 \frac{\overline{z_1 - \zeta_1}^{m-1}}{\omega_\zeta^{(1)}(z_1)} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\omega_\zeta^{(1)}(z_1) - (z_1 - \zeta_1)}{\omega_\zeta^{(1)}(z_1)} \right)^k.$$

Сумма в правой части является аналитической функцией от z_1, когда $z \in E$, и в силу теоремы 2 функция $S_m(z)$ — решение. Далее

$$|K(z-\zeta) - S_m(z)| = |\lambda_1| |z_1 - \zeta_1|^{m-2} \left| \frac{\omega_\zeta^{(1)}(z_1) - (z_1 - \zeta_1)}{\omega_\zeta^{(1)}(z_1)} \right|^{m+1} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const.} \frac{\delta^{m+1}}{|\zeta - z|^3}, \quad z \in E.$$

Здесь мы воспользовались свойствами 1) и 3) функции $\omega_\zeta^{(1)}(z_1)$, а также (1), (2).

Кроме того,

$$|K(z-\zeta) - S_m(z)| \leqslant |K| + |S_m| \leqslant \text{const.} |\zeta - z|^{m-2}, \quad z \in E.$$

Итак,

$$|K(z-\zeta) - S_m(z)| \leqslant \text{const.} \frac{1}{|\zeta - z|^3} \min\{\delta^{m+1}; |\zeta - z|^{m+1}\}. \tag{3}$$

Функция $S_m(z)$ зависит еще от $\zeta \in R_\delta$. Поэтому обозначим $S_m(z) = h_\zeta(z)$. Заметим теперь, что свойство 3) функции $\omega_\zeta(z)$ является следствием двух первых ее свойств. Поэтому одна функция $\omega_{\zeta^*}(z)$ «может обслужить» все точки $\zeta \in E$ из δ-окрестности точки $\zeta^* \in R_\delta$. Это позволяет построить функцию $h_\zeta(z)$ как кусочно-постоянную и стало быть, суммируемую функцию от $\zeta \in R_\delta$. Имеем теперь из (3)

$$\iint_{R_\delta} |K(z-\zeta) - h_\zeta(z)| \, d\xi d\eta \leqslant \iint_{|\zeta - z| > \delta} \text{const} \frac{\delta^{m+1}}{|\zeta - z|^3} \, d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_{|\zeta - z| < \delta} \text{const.} |\zeta - z|^{m-2} d\xi d\eta \leqslant \text{const.} \delta^m, \quad z \in E.$$

2-й случай: $\varkappa_1 < m$. Фундаментальное решение $K(z-\zeta)$ записываем в виде:

$$K(z-\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j)^{l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \ln (z_j - \zeta_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j)^{l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \ln w_\zeta^{(j)}(z_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j)^{l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \ln \left[1 - \frac{w_\zeta^{(j)}(z_j) - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}(z_j)} \right].$$

Далее, с помощью свойств 1) и 3) устанавливаем возможность разложения в ряд

$$\ln \left[1 - \frac{w_\zeta^{(j)}(z_j) - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}(z_j)} \right] = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left[\frac{w_\zeta^{(j)}(z_j) - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}(z_j)} \right]^k,$$

$$|\zeta - z| > \mathrm{const.}\, \delta, \quad z \in E.$$

Функция

$$S_m(z) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j)^{l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \left[\ln w_\zeta^{(j)} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \left(\frac{w_\zeta^{(j)} - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}} \right)^k \right]$$

является регулярным решением уравнения $L_0 u = 0$ в окрестности множества E и в силу предыдущего, а также свойств 1) и 3) имеем

$$|K(z - \zeta) - S_m(z)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{\varkappa_j} \lambda_{l,j} (\bar{z}_j - \bar{\zeta}_j)^{l-1} (z_j - \zeta_j)^{m-l-1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{w_\zeta^{(j)} - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}} \right)^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const.}\, |\zeta - z|^{m-2} \frac{\delta^{m+1}}{|\zeta - z|^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{w_\zeta^{(j)} - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}} \right|^k \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const.}\, \frac{\delta^{m+1}}{|\zeta - z|^3}, \quad z \in E, \quad |\zeta - z| > \mathrm{const.}\, \delta. \tag{4}$$

А при остальных $z \in E$, т. е. если $|\zeta - z| < \mathrm{const.}\, \delta$, будет

$$\ln |w_\zeta^{(j)}(z_j)| < \mathrm{const.}\, \frac{\delta}{|\zeta - z|}, \quad \text{ибо } \ln |z_j - \zeta_j| < \mathrm{const.}\, \frac{\delta}{|\zeta - z|},$$

так что

$$|K(z - \zeta) - S_m(z)| \leqslant |K| + |S_m| \leqslant \mathrm{const.}\, |\zeta - z|^{m-2} \left(\frac{\delta}{|\zeta - z|} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \left| \frac{w_\zeta^{(j)} - (z_j - \zeta_j)}{w_\zeta^{(j)}} \right|^k \right) \leqslant \mathrm{const.}\, |\zeta - z|^{m-3} \delta. \tag{5}$$

(при оценке Σ использованы свойства 1) и 2)). Сопоставляя (4) и (5) получаем

$$|K(z-\zeta)-S_m(z)| \leqslant \text{const.}\,\frac{1}{|\zeta-z|^3}\min\{\delta^{m+1};\ |\zeta-z|^m\delta\}. \tag{6}$$

Как и в случае (1), выбираем конечное число точек $\zeta^{(r)} \in R_\delta$ так, чтобы δ-окрестности этих точек покрыли все R_δ. Для каждой $\zeta^{(r)}$ строим свою $S_m^{(r)}(z)$, после чего можно положить $h_\zeta(z) = S_m^{(r)}(z)$, если $|\zeta-\zeta^{(r)}| < \delta$. Функция $h_\zeta(z)$ является искомой, ибо в силу (6):

$$\iint\limits_{R_\delta} |K(z-\zeta)-h_\zeta(z)|\,d\xi d\eta \leqslant \iint\limits_{|\zeta-z|>\delta} \text{const.}\,\frac{\delta^{m+1}}{|\zeta-z|^3}\,d\xi d\eta +$$

$$+\iint\limits_{|\zeta-z|<\delta} \text{const.}\,|\zeta-z|^{m-3}\delta\,d\xi d\eta \leqslant \text{const.}\,\delta^m, \quad z\in E.$$

Лемма 2 полностью доказана.

§ 5. Оценка приближения решений класса C и $C^{(n)}$ регулярными решениями в более широкой области

Через $C^{(n)}$ обозначается пространство функций, непрерывных на всей плоскости вместе со своими производными до n-го порядка включительно $n = 0, 1, 2, \ldots;\ C^{(0)} = C$.

Будем рассматривать ограниченные множества E, расположенные в круге $|z| < R$ (обозначаемом через σ). Обозначим еще

$$\|f\|_{C^{(n)}(E)} = \sum_{0\leqslant k+l\leqslant n} \sup_{z\in E}\left|\frac{\partial^{k+l} f(z)}{\partial x^k \partial y^l}\right|,$$

$$\omega_f^{(n)}(\delta) = \sup_{|h|<\delta}\|f(z+h)-f(z)\|_{C^{(n)}(\sigma)}, \quad (z+h\in\sigma).$$

Теорема 6. *Пусть плоский компакт E имеет конечное число дополнительных областей. Пусть функция $f\in C^{(n)}$ и во всех внутренних точках множества E является регулярным решением эллиптического уравнения $Lf=0$ порядка $m\geqslant n$ с постоянными коэффициентами при главной части.*

Пусть E_δ — некоторое открытое множество и $E\subset E_\delta$. Если все точки границы множества E удалены от границы множества E_δ менее, чем на δ, $0<\delta<1$, то существует функция $f_\delta(z)$, являющаяся регулярным в E_δ решением того же самого уравнения и такая, что

$$\|f-f_\delta\|_{C(E_\delta)} \leqslant \text{const.}\,\omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n.$$

Доказательству этого предложения предпошлем еще одну лемму, вытекающую из результатов К. К. Головкина [4].

Лемма 3. *Для любого δ, $0<\delta<1$ существует функция $\varphi_\delta\in C^{(m)}$ со свойствами:*

1) $\|f-\varphi_\delta\|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\,\omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n$;

2) $\|\varphi_\delta\|_{C^{(m)}}(\sigma) \leqslant \text{const.}\,\omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^{n-m}$ $\quad m\geqslant n$;

3) $L\varphi_\delta(z) = 0$ *во всех точках $z\in E$, отстоящих от его границы более, чем на δ.*

Доказательство теоремы 6. Пусть L^{-1} — правый обратный оператор для L в круге σ (существование L^{-1} легко выводится из теоремы 3 о почти изоморфности L и L_0). Так как $\varphi_\delta \in C^{(m)}$, то имеет место представление

$$\varphi_\delta = (LL^{-1} - L^{-1}L)\,\varphi_\delta + L^{-1}L\varphi_\delta, \quad z \in \sigma. \tag{1}$$

Функция $\varphi_\delta^1 = (LL^{-1} - L^{-1}L)\,\varphi_\delta$ является регулярным решением уравнения $L\varphi_\delta^1 = 0$ в круге σ. Займемся вторым слагаемым. Согласно теореме 3 существует почти изоморфное отображение T пространства $C(\sigma)$ в себя такое, что $L = L_0 T$. Из последнего равенства вытекает, что оператор TL^{-1} будет правым обратным для L_0 в любой подобласти круга σ.
Поэтому

$$TL^{-1}L\varphi_\delta(z) = \iint\limits_{E_\delta} L\varphi_\delta(\zeta)\,K(z-\zeta)\,d\xi d\eta + \psi_\delta^{(0)}(z), \quad z \in E_\delta, \tag{2}$$

где $\psi_\delta^{(0)}(z)$ — регулярное в E_δ решение уравнения $L_0\psi_\delta^{(0)} = 0$, а ядро $K(z-\zeta)$ — фундаментальное решение для L_0 (см. § 1). Интегрирование в (2) фактически ведется по множеству R_δ, состоящему из точек, удаленных от границы E_δ не более, чем на 2δ (свойство (3) функции φ_δ).
Положим

$$J_\delta(z) = \iint\limits_{R_\delta} L\varphi_\delta(\zeta)\,K(z-\zeta)\,d\xi d\eta + \psi_\delta^{(0)}(z), \quad z \in E_\delta, \tag{3}$$

тогда ввиду (1) и (2)

$$T(\varphi_\delta - \varphi_\delta^1) = J_\delta(z), \quad z \in E_\delta.$$

Левая часть определена в σ. Доопределим функцию $\psi_\delta^{(0)}$ в $\sigma \setminus \overline{E}_\delta$ так, чтобы это равенство выполнялось и в σ

$$T(\varphi_\delta - \varphi_\delta^1) = J_\delta(z), \quad z \in \sigma. \tag{4}$$

Функцию $H_\delta(z)$ на $\overline{E}_\delta$ определим следующим образом:

$$H_\delta(z) = \iint\limits_{R_\delta} L\varphi_\delta(\zeta)\cdot h_\zeta(z)\,d\xi d\eta + \psi_\delta^{(0)}(z), \quad z \in \overline{E}_\delta. \tag{5}$$

Здесь $h_\zeta(z)$ — функция, о которой говорится в лемме 2 (§ 4). Продолжим функцию $F_\delta(z) = H_\delta(z) - J_\delta(z)$, $z \in \overline{E}_\delta$ непрерывно в круг σ, не увеличивая верхней грани модуля, и, сохранив ее обозначение, положим

$$H_\delta(z) = F_\delta(z) + J_\delta(z), \quad z \in \sigma. \tag{5_1}$$

Тогда

$$\| H_\delta - J_\delta \|_{C(\sigma)} = \| H_\delta - J_\delta \|_{C(E_\delta)}\,. \tag{6}$$

Используя обозначения, введенные в § 2, рассмотрим подпространства

$$B_\delta^0 = C_\sigma N(L_0,\ E_\delta) \text{ и } B_\delta = TC_\sigma N(L,\ E_\delta).$$

Функция $H_\delta(z)$, определенная (5) и (5_1), принадлежит B_δ^0. Из равенства $L = L_0 T$ следует, что $B_\delta = B_\delta^0 \cap TC_\sigma$.

Используя теорему 5^1 из § 3, получаем

$$\varrho(H_\delta, B_\delta) \leqslant \text{const.}\,\varrho(H_\delta, TC_\sigma). \tag{7}$$

(Для того чтобы воспользоваться теоремой 5^1, нужно считать, что δ пробегает счетное множество значений, сходящееся к нулю, но на общность результата это не влияет).

Оценим $\varrho(H_\delta, TC_\sigma)$. Согласно (4) функция $J_\delta(z) \in TC_\sigma$. В силу (6) имеем

$$\| H_\delta - J_\delta \|_{C(\sigma)} = \left\| \iint\limits_{R_\delta} L\varphi_\delta(\zeta) \cdot (K(z-\zeta) - h_\zeta(z) d\xi d\eta \right\|_{C(E_\delta)}.$$

Используя свойство (2) функции φ_δ, получаем

$$\| H_\delta - J_\delta \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^{n-m} \sup_{z \in E_\delta} \iint\limits_{R_\delta} | K(z-\zeta) - h_\zeta(z) |\, d\xi d\eta.$$

В силу леммы 2 (§ 4) об аппроксимации фундаментальных решений это дает оценку:

$$\| H_\delta - J_\delta \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n.$$

Из (7) получаем

$$\varrho(H_\delta, B_\delta) \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n.$$

Стало быть, существует функция $\widetilde{H}_\delta(z) \in B_\delta$ такая, что

$$\| \widetilde{H}_\delta - J_\delta \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n. \tag{8}$$

Пусть функция $f_\delta^1 \in C_\sigma N(L, E_\delta)$ такова, что $Tf_\delta^1 = \widetilde{H}_\delta$.
Тогда из (4) получаем:

$$T(\varphi_\delta - \varphi_\delta^1 - f_\delta^1) = J_\delta - \widetilde{H}_\delta. \tag{9}$$

Поскольку T — гомоморфизм ([5], стр. 423), то в силу теоремы Банаха существует функция $f_\delta^2 \in C_\sigma N(L, E_\delta)$ такая, что

$$Tf_\delta^2 = Tf_\delta^1 \quad \text{и} \quad \| \varphi_\delta - \varphi_\delta^1 - f_\delta^2 \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.} \| T(\varphi_\delta - \varphi_\delta^1 - f_\delta^1) \|_{C(\sigma)}.$$

Из (9) и (8) имеем

$$\| \varphi_\delta - \varphi_\delta^1 - f_\delta^2 \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n. \tag{10}$$

Кроме того, функция $f_\delta = \varphi_\delta^1 + f_\delta^2$ является регулярным в E_δ решением уравнения $Lf_\delta = 0$, ибо таковым является каждое слагаемое. Ввиду свойства (1) функции φ_δ из (10) следует, что

$$\| f - f_\delta \|_{C(E_\delta)} \leqslant \| f - \varphi_\delta \|_{C(\sigma)} + \| \varphi_\delta - f_\delta \|_{C(\sigma)} \leqslant \text{const.}\ \omega_f^{(n)}(\delta)\,\delta^n.$$

Теорема доказана.

§ 6. Физический смысл основной теоремы

По аналогии с уравнением Лапласа $\Delta u = 0$ решение рассматриваемых эллиптических уравнений (∗) можно интерпретировать как потенциал некоего L — электрического поля.

Покажем, что из основной теоремы (§ 5) вытекает следующая физическая теорема.

Всякое поле в области E можно с любой точностью аппроксимировать полем конечной системы точечных зарядов, расположенных вне E. Потенциал точечного «L-заряда» есть фундаментальное решение $K(\zeta, z)$ уравнения $Lu = 0$. Таким образом, нужно доказать следующее предложение.

Теорема 7. *Пусть ограниченное замкнутое множество E имеет конечное число дополнительных областей. Существует последовательность точек ζ_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, лежащих вне E, такая, что система функций $\{K(\zeta_\nu, z)\}_{\nu=1}^\infty$ является полной системой в пространстве $C_L N(L, \operatorname{int} E)$*

функций, непрерывных на E и являющихся регулярными решениями уравнения $Lu = 0$ во всех внутренних точках E.

Доказательство. Пусть $u(z)$ является регулярным решением уравнения $Lu = 0$ в открытом множестве $G \supset E$. Рассмотрим открытые множества G_1, G_2 такие, что $E \subset G_1$, $\bar{G}_1 \subset G_2$, $G_2 \subset G$ и всюду бесконечно гладкую функцию $\gamma(z)$, равную 1 в G_1 и 0—вне G_2. Не ограничивая общности можно предполагать, что G_2 имеет гладкую границу и, стало быть, можно пользоваться формулой Грина теории эллиптических уравнений. Из этой формулы следует, что функция $u_1(z) = u(z)\gamma(z)$, исчезающая на границе G_2 вместе со всеми производными (ибо такова $\gamma(z)$), представима в виде

$$u_1(z) = \iint_{G_2} Lu_1(\zeta) \cdot K(\zeta, z)\, d\xi d\eta, \qquad z \in G_2.$$

Так как $u_1(z) = u(z)$, $z \in G_1$, то $Lu_1(z) = 0$, $z \in G_1$ и значит

$$u_1(z) = \iint_{G_2 \setminus G_1} Lu_1(\zeta) \cdot K(\zeta, z)\, d\xi d\eta, \qquad z \in G_2.$$

Заменив последний интеграл интегральной суммой, получим требуемую аппроксимацию функции $u(z)$ на множестве E. Итак, в пространстве решений, регулярных на E, система $\{K(\zeta_\nu, z)\}_{\nu=1}^{\infty}$ является полной. Но ввиду основной теоремы (§ 5) решения, регулярные на E, образуют плотное множество в пространстве $C_E N(L, \operatorname{int} E)$.

Стало быть, система $\{K(\zeta_\nu, z)\}_{\nu=1}^{\infty}$ полна и в этом пространстве, что и утверждалось.

§ 7. Приближение полиномиальными решениями

1. Возможность регулярной аппроксимации, вытекающая из теоремы 6, означает, ввиду теоремы 2, возможность строить полные системы в случае простого эллиптического уравнения в виде надлежащих комбинаций полных систем аналитических функций. Справедливо, например, следующее предложение.

Теорема 8. *Пусть $L_0 = L_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ — простой эллиптический оператор. Если компакт E имеет связное дополнение, то в пространстве $C_E N(L_0, \operatorname{int} E)$ полной является система функций $\{(\bar{p}_j x + y)^l (p_j x + y)^k\}$, $l = 0, 1, 2, \ldots, \varkappa_j - 1$; $k = 0, 1, 2, \ldots$, где p_j — корни характеристического полинома $L_0(x, 1)$, а числа $\varkappa_j$ — их кратности $j = 1, 2, \ldots, n$.*

Иначе говоря: всякая функция $f(z)$, непрерывная на E и во всех внутренних точках E(в int E) являющаяся регулярным решением уравнения $L_0 f = 0$, представляется равномерно сходящимся на E рядом из полиноминальных решений того же самого уравнения.

Примечание: теорема Мергеляна [2] содержится здесь как частный случай $\left(L_0 = \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

2. Теорему 6 можно использовать для изучения скорости приближения полиноминальными решениями. Так, например, известную теорему С. Н. Мергеляна [2] о наилучшем приближении аналитических функций полиномами от z можно дополнить следующим совершенно аналогичным предложением [6].

Теорема 9. *Пусть E — континуум со связным дополнением, расположенный в круге $|z| < 1$. Пусть $g(z)$ — непрерывная функция в круге $|z| \leqslant 2$ и $\omega(\delta)$ — ее модуль непрерывности в этом круге. Если $g(z)$ — гармонична во всех внутренних точках множества E, то, каково бы ни было натуральное* *число n, существует гармонический полином $g_n(z)$ степени n и постоянная C, не зависящая от n такие, что*

$$|g(z)-g_n(z)|<C\omega\left[d\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right],\quad z\in E,\qquad n=2,3,\ldots,$$

где функция $d(\lambda)$ выражает зависимость от λ максимального расстояния точек границы множества E до линии уровня L_λ, $\lambda>0$ функции Грина дополнения к E.

3. О необходимых условиях возможности регулярной аппроксимации на множестве E известно очень мало.

Автору известно лишь необходимое условие на внутренность E. Так, например, для возможности приближения полиномиальными решениями в пространстве $C_E N(L_0,\ \mathrm{int}\ E)$ необходимо, чтобы внутренность $(\mathrm{int}\ E)$ множества E была суммой непересекающихся односвязных областей.

Перенесение на эллиптические уравнения тех необходимых условий, которые известны из теории аналитической и гармонической аппроксимации, затруднено, прежде всего, отсутствием принципа максимума для уравнений высоких порядков.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М.—Л., 1959 г.
2. С. Н. Мергелян, Приложение к книге Уолша «Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области», ИЛ, М., 1961.
3. С. Я. Гусман, Равномерное приближение обобщенных аналитических функций, ДАН СССР, 144, № 4, 1962.
4. К. К. Головкин, О приближении функций в произвольных нормах. Тр. МИАН, XIX, 1964, 26—37.
5. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М.—Л., 1959.
6. Э. М. Саак, Аппроксимационные теоремы для дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 165, № 6, 1965 г.

Поступила 2.VII 1965 г.
Ростов-на-Дону