1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого интегрального многообразия

А. М. Самойленко

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(t, y) \qquad (y = y_1, \ldots, y_n) \tag{1}$$

правая часть которой определена, достаточное число раз непрерывно дифференцируема и ограничена вместе со своими частными производными для всех (t, y) из области

$$-\infty < t < \infty, \qquad y \in D, \tag{2}$$

где D — некоторая область n-мерного эвклидова пространства E_n.

Предположим, что система (1) имеет гладкое m-мерное $(n > m \geqslant 0)$ интегральное многообразие M_t*:

$$y = f(t, c) \qquad (c = (c_1, \ldots, c_m) \in D_1), \tag{3}$$

принадлежащее некоторому компакту $D_2 \subset D$.

Нашей задачей будет исследовать решения системы (1) в окрестности многообразия M_t.

Первые глубокие результаты по решению указанной задачи принадлежат А. Пуанкаре [2] и А. М. Ляпунову [3]. Они относятся к исследованию окрестности 0-мерных многообразий, т. е. к исследованию ограниченных для всех $t \in (-\infty, \infty)$ решений системы (1).

Дальнейшее свое обобщение и развитие результаты [2—3] получили в работах О. Перрона [2′] и Г Дюляка [3′].

Исследование окрестности интегральных многообразий при $m = 1$ впервые проведено Н. Н. Боголюбовым [4] и относится к исследованию 1-мерных тороидальных многообразий систем стандартного вида ($Y = \varepsilon Y$, где ε — малый параметр). Дальнейшее свое развитие результаты [4] получили в работах Ю. А. Митропольского [5, 6], J. K. Hale [7] S P Diliberto [8, 9].

Лишь в последнее время, благодаря работам А. Н. Колмогорова [10], В. И. Арнольда [11—13], Н. Н. Боголюбова [14] и Ю. Мозера [15, 16] стало

* Напомним, что согласно [1], множество $M_t \subset E_n$ есть гладкое m-мерное интегральное многообразие системы дифференциальных уравнений (1), если:

1) для каждого фиксированного $t \in (-\infty, \infty)$ M_t является гладким m-мерным многообразием;

2) для всякого решения $y = y(t)$ системы (1) из соотношения $y(t) \in M_t$, справедливо в момент времени $t = t_0$, вытекает его справедливость для всех $t \in (-\infty, \infty)$.

доступным исследование окрестности интегральных многообразий размерности $m > 1$.

Так, в [17] Э. Г. Белага изучил поведение интегральных кривых системы

$$\frac{dy}{dt} = Y(y) \tag{4}$$

в окрестности многообразия M_t, аналитически гомеоморфного m-мерному тору T, т. е. в окрестности семейства аналитических квазипериодических решений. Он показал, что в окрестности M_t система (4) приводима к линейной.

Близкие к [17] результаты получены Ю. А. Митропольским [18].

Исследование окрестности гладкого тороидального многообразия M_t системы (4) проведено автором [19].

Теории возмущения инвариантных торов системы (4) посвящены работы J. Moser [20], R. Sacker [21] и других [22].

Исследованию окрестности компактного интегрального многообразия M_t, являющегося нормализуемым подмногообразием пространства y-ов, посвящена настоящая работа. В ней доказано (теорема 1, § 4), что в окрестности гладкого многообразия M_t, асимптотически устойчивого в силу уравнений в вариациях, система (1) гладкой ограниченной для всех $t \in (-\infty, \infty)$ заменой переменных

$$y = g(t, x, c) \qquad (x = x_1, \ldots, x_{n-m}) \tag{5}$$

приводится к виду

$$\frac{dc}{dt} = 0, \qquad \frac{dy}{dt} = A(c)\, y. \tag{6}$$

Более того здесь доказывается также (теорема 2, § 5), что замена (5) является периодической, квазипериодической или почти периодической в зависимости от того, является ли таковой правая часть системы (1).

§ 1. Основные предположения

Обозначим через $y(t, y_0)$ решение системы (1), проходящее при $t = 0$ через точку y_0. Тогда в силу определения интегрального многообразия все решения $y = y(t, f(0, c))$ лежат на M_t при $t \in (-\infty, \infty)$ и являются ограниченными. Система (1) имеет, следовательно, m-параметрическое семейство ограниченных решений.

Исследование окрестности многообразия M_t эквивалентно исследованию окрестности семейства $y(t, f(0, c))$. Эту последнюю окрестность мы и будем рассматривать.

Предположим, что функция $y(t, f(0, c))$ непрерывно* дифференцируема конечное число раз и ее частные производные по t, c ограничены для $t \in (-\infty, \infty)$, $c \in D_1$.

Тогда в силу предположения о нормализуемости многообразия M_t в его окрестности можно ввести координаты c, z так, чтобы система (1) приняла вид

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= Q_1(t, c)\, z + G_1(t, c, z), \\ \frac{dz}{dt} &= Q_2(t, c)\, z + G_2(t, c, z), \end{aligned} \tag{1.1}$$

* Непрерывность понимается нами здесь и во всем дальнейшем в смысле равномерной непрерывности.

где матрицы $Q_1(t, c)$, $Q_2(t, c)$ и векторные функции $G_1(t, c, z)$, $G_2(t, c, z)$ конечное число раз непрерывно дифференцируемы в области $t \in (-\infty, \infty)$, $c \in D_1$, $\|z\| = \max_i |z_i| < \varepsilon$, ограничены вместе со своими частными производными и удовлетворяют тождеству

$$G_i(t, c, 0) = \frac{\partial G_i(t, c, 0)}{\partial z} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

Будем предполагать, что линейная система

$$\frac{dz}{dt} = Q_2(t, c) z \tag{1.2}$$

приводима в следующем сильном смысле: существуют конечное число раз непрерывно дифференцируемые при $(t, c) \in (-\infty, \infty) \times D_1$ и ограниченные вместе со своими частными производными матрицы $B(t, c)$, $B^{-1}(t, c)$ и $A(c)$ такие, что

$$\frac{dB(t, c)}{dt} B^{-1}(t, c) + B(t, c) A(c) B^{-1}(t, c) = Q_2(t, c).$$

Ряд критериев приводимости ограниченных систем (в частности, периодических, квазипериодических, почти периодических) известен из работ M. G. Floquet [23], А. М. Ляпунова [3], Н. П. Еругина [24], А. Е. Гельмана [25—26], И. Н. Блинова [27], Л. Я. Адриановой [28], Ю. А. Митропольского и А. М. Самойленко [29].

Приводимость системы (1.2) при $m = n - 1$ проверяется непосредственно.

При сделанном предположении линейная замена $z = B(t, c) x$ приводит систему (1.2) к виду $\frac{dx}{dt} = A(c) x$, а систему (1.1)—к виду

$$\frac{dc}{dt} = R(t, c, x), \qquad \frac{dx}{dt} = A(c) x + F(t, c, x), \tag{1.3}$$

при этом функции $R(t, c, x)$ и $F(t, c, x)$ конечное число раз непрерывно дифференцируемы в области

$$t \in (-\infty, \infty), \ c \in D_1, \qquad \|x\| < \eta = \sup_{t,c} \|B^{-1}(t, c)\| \varepsilon, \tag{1.4}$$

ограничены вместе со своими частными производными и удовлетворяют тождеству

$$R(t, c, 0) = F(t, c, 0) = \frac{\partial F(t, c, 0)}{\partial x} = 0. \tag{1.5}$$

Окрестность многообразия M_t системы (1) переходит в окрестность многообразия $x = 0$ системы (1.3). Эту последнюю окрестность мы и будем изучать в дальнейшем.

§ 2. Вспомогательные утверждения

В процессе преобразований системы (1.3) нам понадобятся сглаживающие операторы, аналогичные использованным в [16, 19]. Приведем вид и свойства этих операторов.

Пусть $h_i(t, c, x)$ $(i = 0, 1, 2)$ — непрерывные в области

$$t \in (-\infty, \infty), \quad c = (c_1, \ldots, c_m) \in D_1, \quad \|x\| = \max_{i=1,\ldots,n-m} |x_i| < \eta \tag{2.1}$$

функции, N—достаточно большое положительное число.

Определим операторы $T^i = T^i_N$ $(i = 0, 1, 2)$ равенствами

$$T^i h_i(t, c, x) = \int\limits_{c' \in D_1,\ \|x'\| < \eta} \cdots \int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_N^{(i)}(t - t', c - c', x, x')\, h_i(t', c', x')\, dt' dc' dx', \tag{2.2}$$

в которых

$$\chi_N^{(i)}(t, c, x, x') = \begin{cases} \chi_N(t, c, x - x') & \text{при } i = 0, \\ \chi_N(t, c, x - x') - \chi_N(t, c, -x') & \text{при } i = 1 \\ \chi_N^{(1)}(t, c, x, x') + \dfrac{\partial \chi_N(t, c, -x')}{\partial x'}\, x & \text{при } i = 2, \end{cases} \tag{2.3}$$

$\chi_N = \chi_{NNN}(t, c, x)$ — функция [16].

Сглаженные функции $T^i h_i(t, c, x)$ определены в области

$$t \in (-\infty, \infty), \qquad c \in D_1 - N^{-1}, \quad \|x\| < \eta - N^{-1}, \tag{2.4}$$

где $D_1 - N^{-1}$ — множество точек c, входящих в D_1 вместе со своей N^{-1}-окрестностью, и обладают следующими свойствами:

Лемма 1. *Для любых целых* $d \geqslant 0$, *любых неотрицательных целочисленных векторов* $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_m)$, $r = (r_1, \ldots, r_{n-m})$, $\varrho_\alpha \geqslant 0$, $r_\beta \geqslant 0$ $(\alpha = 1, \ldots, m; \beta = 1, \ldots, n - m)$ *и всех* (t, c, x) *из области* (2.4)

$$| D_t^d D_c^\varrho D_x^r T^i h_i(t, c, x) | < q N^{d + |\varrho| + |r| + i(i-1)/2} | h_i(t, c, x) |_0, \tag{2.5}$$

где q — *постоянная, не зависящая от* N, $D_t^d D_c^\varrho D_x^r = \dfrac{\partial^{d + |\varrho| + |r|}}{\partial t^d \partial c_1^{\varrho_1} \ldots \partial x_{n-m}^{r_{n-m}}}$,

$$|\varrho| = \Sigma \varrho_\alpha, \quad |r| = \Sigma r_\beta, \quad |h(t, c, x)|_0 = \sup_{\substack{t \in (-\infty, \infty) \\ c \in D_1, \|x\| < \eta}} |h(t, c, x)|.$$

Если $h_i(t, c, x)$ *есть* l *раз непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая соотношениям*

$$h_1(t, c, 0) = h_2(t, c, 0) = \frac{\partial h_2(t, c, 0)}{\partial x} = 0, \tag{2.6}$$

то

$$T^1 h_1(t, c, x)|_{x=0} = T^2 h_2(t, c, x)|_{x=0} = \left.\frac{\partial T^2 h_2(t, c, x)}{\partial x}\right|_{x=0} = 0. \tag{2.7}$$

$$| h_i(t, c, x) - T^i h_i(t, c, x) | \leqslant q_1 N^{-l + \frac{i(i-1)}{2}} \sup_{d + |\varrho| + |r| = l} | D_t^d D_c^\varrho D_x^r h_i(t, c, x) |_0, \tag{2.8}$$

где q_1 — *постоянная, не зависящая от* N.

Доказательство леммы аналогично доказательству лемм о сглаживающих операторах, приведенных в [15, 18].

Наряду со сглаживанием важную роль в дальнейшем играют ограниченные решения системы

$$\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial x} A_0(c)\, x + \frac{\partial w}{\partial t} = R(t, c, x), \\ &\frac{\partial u}{\partial x} A_0(c) x + \frac{\partial u}{\partial t} = A_0(c)\, u + \frac{\partial A_0(c)\, x}{\partial c}\, w + F(t, c, x), \end{aligned} \tag{2.9}$$

где R, F — функции со свойствами, определенными в § 1; $A_0(c)$ — жорданова матрица; $w = (w_1, \ldots, w_m)$, $u = (u_1, \ldots, u_{n-m})$ — искомые функции.

Выясним поэтому вопрос существования и интегрального представления этих решений.

Л е м м а 2. *Пусть в области* (2.1) *матрица* $A_0(c)$ *и функции* $R(t, c, x)$ и $F(t, c, x,)$ $\tau(\tau \geqslant 3)$ *раз непрерывно дифференцируемы, ограничены вместе со своими частными производными и удовлетворяют тождеству* (1.5). *Более того, собственные значения* $\mu_1(c), \ldots, \mu_{n-m}(c)$ *матрицы* $A_0(c)$ *удовлетворяют неравенству*

$$\operatorname{Re}[\mu_\alpha(c) + \mu_\beta(c) - \mu_j(c)] \leqslant -\gamma \tag{2.10}$$

для всех $c \in D_1$, *любых* $\alpha, \beta, j = 1, 2, \ldots, n-m$ *и некоторого* $\gamma > 0$.

Тогда система уравнений (2.9) *имеет в области* (2.1) $\tau - 2$ *раз непрерывно дифференцируемое и ограниченное вместе со своими частными производными решение*

$$w(t, c, x) = -\int_0^\infty R(t+z, c, e^{A_0(c)z}x)\,dz, \tag{2.11}$$

$$u(t, c, x) = -\int_0^\infty \left[\frac{\partial A_0(c)\,x}{\partial c} w(t+z, c, e^{A_0(c)z}x) + e^{-A_0(c)z}F(t+z, c, e^{A_0(c)z}x)\right]dz,$$

для которого

$$w(t, c, 0) = u(t, c, 0) = \frac{\partial u(t, c, 0)}{\partial x} = 0, \tag{2.12}$$

$$\| w(t, c, x) \| \leqslant q_2 \| D_x R(t, c, x) \|_0, \tag{2.13}$$

$$\| u(t, c, x) \| \leqslant q_2 (\| D_c A_0(c) \|_0 \cdot \| D_x R(t, c, x) \|_0 + \| D_x^2 F(t, c, x) \|_0),$$

где q_2 — *положительная постоянная, зависящая лишь от* γ *и* η.

В лемме 2, как и во всем дальнейшем, приняты следующие обозначения: для вектор-функции $f(z) = (f_1(z), \ldots, f_\nu(z))$ и матрицы $A(z) = \{a_{ij}(z)\}$, определенных в области

$$z = (z_1, \ldots, z_r) \in D, \qquad \| f(z) \|_0 = \sup_{z \in D} \| f(z) \| = \sup_{z \in D} \max_i | f_i(z) |$$

$$\| A(z) \|_0 = \sup_{z \in D} \| A(z) \| = \sup_{z \in D} \max_{ij} | a_{ij}(z) |,$$

для целого $k > 0$

$$\| D_z^k f(z) \| = \max_{\substack{k_1 + \ldots + k_r = k \\ k_\alpha \geqslant 0, i}} | D_{z_1}^{k_1} \ldots D_{z_r}^{k_r} f_i(z) |,$$

$$\| D_z^k A(z) \| = \max_{\substack{k_1 + \ldots + k_r = k \\ k_\alpha \geqslant 0, i, j}} | D_{z_1}^{k_1} \ldots D_{z_r}^{k_r} a_{ij} |.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Матрица $A_0(c)$ принимается нами жордановой. Этим самым мы определяем квазидиагональность ее вида: $A_0(c) = \{J_1(c), \ldots, J_\alpha(c), \ldots, J_k(c)\}$, где $J_\alpha(c)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$ — жордановая клетка, т. е. матрица, диагональ которой состоит из значений $\mu_\alpha(c)$, первая поддиагональ из значений $\varepsilon_\alpha(c)$, остальные элементы 0, и требуем, чтобы

$$|\varepsilon_\alpha| < \gamma \qquad (\alpha = 1, \ldots, k, c \in D_1). \tag{2.14}$$

Неравенства (2.10), (2.14) обеспечивают оценку ([18], лемма 1): $\| e^{A_0(c)z} x \| \leqslant \| x \|$ для $z \geqslant 0$, благодаря которой подынтегральные функции (2.11) определены для всех (t, c, x) из области (2.1).

Заменяя в (2.11) $t + z$ на τ и дифференцируя полученные выражения, убеждаемся, что функции (2.11) являются ограниченными решениями системы (2.9), лишь только интегралы (2.11) существуют и непрерывно дифференцируемы.

Сходимость первого из интегралов (2.11) следует в силу оценки

$$\| w(t, c, x) \| \leqslant \int_0^\infty \| R(t + z, c, e^{A_0(c)z} x) - R(t + z, c, 0) \| \, dz \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \| D_x R(t, c, x) \|_0 \| e^{A_0(c)z} \| (n - m) \| x \| \, dz \leqslant q_3 \| x \| \| D_x R(t, c, x) \|_0. \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует также тождество (2.12) и неравенство (2.13) для $w(t, c, x)$. Дифференцируемость функции $w(t, c, x)$ следует из сходимости интеграла

$$D_t^d D_x^r w(t, c, x) = - \int_0^\infty D_t^d D_x^r R(t + z, c, e^{A_0(c)z} x) \, dz,$$

которая при $|r| = 0$ и $d < \tau - 1$ доказывается в силу оценок, аналогичных (2.15), а при $|r| \geqslant 1$ — в силу неравенства

$$\| D_t^d D_x^r R(t + z, c, e^{A_0(c)z} x) \| \leqslant q_4 \| D_t^d D_x^r R(t, c, x) \|_0 \| e^{A_0(c)z} \|.$$

Для доказательства сходимости второго из интегралов (2.11) следует учесть, что ij-я координата матрицы $e^{A_0(c)z}$ имеет вид

$$\{ e^{A_0(c)z} \}_{ij} = \frac{(\varepsilon_{\nu_i} z)^{\nu_{ij}}}{\nu_{ij}!} e^{\mu_{\nu_i} z}, \quad (2.16)$$

если в матрице $A_0(c)$ элемент с индексами ij принадлежит жордановой клетке $J_{\nu_i}(c)$ и $i - j = \nu_{ij} \geqslant 0$.

Учитывая представление (2.16), а также свойства векторов $w(t, c, x)$ и $F(t, c, x)$, находим

$$\| u(t, c, x) \| \leqslant \int_0^\infty \Big\| \frac{\partial A_0(c) x}{\partial c} [w(t + z, c, e^{A_0(c)z} x) - w(t + z, c, 0)] +$$

$$+ e^{-A_0(c)z} \sum_{\alpha, \beta = 1}^{n-m} \frac{\partial^2 F(t + z, c, \widetilde{x})}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \{ e^{A_0(c)z} x \}_\alpha \{ e^{A_0(c)z} x \}_\beta \Big\| \, dz \leqslant$$

$$\leqslant q_5 [\| D_c A_0(c) \|_0 \| D_x w(t, c, x) \|_0 + \| D_x^2 F(t, c, x) \|_0 \times$$

$$\times \int_0^\infty P_1(\varepsilon, z) e^{\mathrm{Re}[\mu_\alpha + \mu_\beta - \mu_i] z} dz] \| x \|^2, \quad (2.17)$$

где $P_1(\varepsilon, z)$ — некоторый полином от $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h)$ и z.

Неравенство (2.17) показывает, что функция $u(t, c, x)$ существует и удовлетворяет тождеству (2.12) и неравенству (2.13).

Дифференцируемость функции $u(t, c, x)$ до порядка $\tau - 2$ следует из сходимости интегралов, полученных формальным дифференцированием $u(t, c, x)$, сходимость же последних доказывается с помощью оценок, аналогичных приведенным выше.

§ 3. Индуктивная теорема

Будем обозначать через E — тождественный оператор, через $\| u(z) \|_s$ для вектор-функции $u = (u_1, \ldots, u_k)$ из пространства s раз непрерывно дифференцируемых в области $z = (z_1, \ldots, z_r) \in S$ функций — s-ю дифференциальную норму $\| u \|_s = \sup\limits_{\substack{z \in S \\ 0 \leqslant |\varrho| \leqslant s}} \| D_z^\varrho u(z) \| = \sup\limits_{\substack{z \in S \\ 0 \leqslant |\varrho| \leqslant s}} \max\limits_i | D_z^\varrho u_i(z) |$.

Положим

$$N_s = Q_s^\alpha, \qquad \delta_s = N_s^{-\beta}, \qquad Q_s = Q_{s-1}^\varkappa \tag{3.1}$$

и возьмем положительные постоянные α, β, $\varkappa$ и целые числа s_0, l_0, l_1 решениями системы неравенств

$$\beta > \max\left\{\frac{5\varkappa}{2-\varkappa}; \varkappa\left(4 + \frac{l_0+1}{\alpha}\right); \varkappa\left[s_0\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + 3\right] + \frac{1}{\alpha}\right\}, \tag{3.2}$$

$$l_0 > \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}(\beta + 1),\ l_1 > \alpha\beta, \quad 1 < \varkappa < 2, \quad s_0 \geqslant 2.$$

Непротиворечивость системы (3.2) очевидна, в частности, ей удовлетворяют значения

$$\varkappa = \frac{3}{2}; \qquad \beta = 15\frac{19}{32}; \qquad \alpha = 8; \quad s_0 = 6; \quad l_0 = 50; \quad l_1 = 125. \tag{3.3}$$

Задача настоящего параграфа—доказать следующее утверждение.

Индуктивная теорема. *Пусть для системы уравнений* (1.3) $R(t, c, x)$ *и* $F(t, c, x)$ *есть ограниченные,* l_0 *раз непрерывно дифференцируемые в области* (1.4) *функции, удовлетворяющие тождеству* (1.5) *и неравенствам*

$$\| R(t, c, x) \| + \| F(t, c, x) \| \leqslant \delta_{s-1} \tag{3.4}$$

$$\| D_t^d D_c^\varrho D_x^r R(t, c, x) \| + \| D_t^d D_c^\varrho D_x^r F(t, c, x) \| \leqslant N_{s-1}^{l_0} \text{ при } d + |\varrho| + |r| = l_0.$$

Пусть, кроме того, $A(c)$ *есть жордановая,* l_1 *раз непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе со своими производными матрица, собственные значения* $\mu_1(c), \ldots, \mu_{n-m}(c)$ *которой удовлетворяют нвравенству* (2.10).

Тогда для достаточно малого δ_0 *существует преобразование координат*

$$c = \theta + \Phi(t, \theta, \xi), \qquad x = \xi + Y(t, \theta, \xi), \tag{3.5}$$

определенное в области

$$-\infty < t < \infty, \quad \theta \in D_l - Q_s^{-1} - N_s^{-1}; \qquad \| \xi \| < \eta - 2N_s^{-} \tag{3.6}$$

и удовлетворяющее соотношениям

$$\Phi(t, \theta, 0) = Y(t, \theta, 0) = \frac{\partial Y(t, \theta, 0)}{\partial \xi} = 0, \tag{3.7}$$

$$\| \Phi(t, \theta, \xi) \|_s + \| Y(t, \theta, \xi) \|_s \leqslant Q_{s-1}^{-1}, \tag{3.8}$$

такое, что система уравнений (1.3) *в координатах* (θ, ξ) *принимает вид*

$$\frac{d\theta}{dt} = R^{(1)}(t, \theta, \xi), \qquad \frac{d\xi}{dt} = A(\theta)\xi + F^{(1)}(t, \theta, \xi), \tag{3.9}$$

где $R^{(1)}(t,\theta,\xi)$ *и* $F^{(1)}(t,\theta,\xi)$ *есть ограниченные,* l_0 *раз непрерывно дифференцируемые в области* (3.6) *функции, удовлетворяющие соотношениям*

$$R^{(1)}(t,\theta,0)=F^{(1)}(t,\theta,0)=\frac{\partial F^{(1)}(t,\theta,0)}{\partial\xi}=0, \tag{3.10}$$

$$\|R^{(1)}(t,\theta,\xi)\|+\|F^{(1)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant\delta_s, \tag{3.11}$$

$$\|D_t^dD_\theta^\varrho D_\xi^r R^{(1)}(t,\theta,\xi)\|+\|D_t^dD_\theta^\varrho D_\xi^r F^{(1)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant N_s^{l_0}\quad \textit{при}\ d+|\varrho|+|r|=l_0.$$

Доказательство. Сделаем в (1.3) замену переменных (3.5), в результате придем к системе

$$\left(E+\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)\frac{d\theta}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\cdot\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=R(t,\theta+\Phi,\xi+Y),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}+\left(E+\frac{\partial Y}{\partial\xi}\right)\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial Y}{dt}=A(\theta+\Phi)(\xi+Y)+F(t,\theta+\Phi,\xi+Y). \tag{3.12}$$

Определим $\Phi(t,\theta,\xi)$ и $Y(t,\theta,\xi)$ ограниченными решениями системы

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}TA(\theta)\,\xi+\frac{\partial\Phi}{\partial t}=T^0R(t,\theta,\xi),\\ \frac{\partial Y}{\partial\xi}TA(\theta)\,\xi+\frac{\partial Y}{\partial t}=TA(\theta)\,Y+\frac{\partial TA(\theta)\xi}{\partial\theta}\Phi+T'F(t,\theta,\xi),\end{gathered} \tag{3.13}$$

в которой $T=T^{(0)}_{Q_s}$, $T^0=T^{(1)}_{N_s}$; $T'=T^{(2)}_{N_s}$, $T^{(0)}_{Q_s}$, $T^{(1)}_{N_s}$, $T^{(2)}_{N_s}$ — сглаживающие операторы § 2.

Вычитая из (3.12) тождества (3.13) и разрешая полученную систему относительно $\left\{\dfrac{d\theta}{dt},\ \dfrac{d\xi}{dt}-A(\theta)\,\xi\right\}$, приходим к системе

$$\frac{d\theta}{dt}=R^{(1)}(t,\theta,\xi),\qquad \frac{d\xi}{dt}=A(\theta)\,\xi+F^{(1)}(t,\theta,\xi), \tag{3.14}$$

в которой обозначено

$$\begin{pmatrix}R^{(1)}\\ F^{(1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E+\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial\theta} & E+\dfrac{\partial Y}{\partial\xi}\end{pmatrix}^{-1}\times$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&R(t,\theta+\Phi,\xi+Y)-T^0R(t,\theta,\xi)-\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}[A(\theta)-TA(\theta)]\,\xi\\ &F(t,\theta+\Phi,\xi+Y)-T'F(t,\theta,\xi)+[A(\theta+\Phi)-TA(\theta)](\xi+Y)-\\ &-\frac{\partial TA(\theta)\,\xi}{\partial\theta}\Phi-\left(E+\frac{\partial Y}{\partial\xi}\right)[A(\theta)-TA(\theta)]\,\xi\end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Рассмотрим систему уравнений (3.13). Прежде всего отметим, что так как $\|A(\theta)-TA(\theta)\|\leqslant q_1Q_s^{-l_1}\|A(\theta)\|_{l_1}\leqslant aq_1Q_s^{-l_1}$ для $\theta\in D_1-Q_s^{-1}$, то при достаточно малом δ_0 матрица $TA(\theta)$ имеет жордановый вид и ее собственные значения удовлетворяют неравенству вида (2.10).

В силу этого к системе (3.13) можно применить лемму 2 и получить для $\Phi(t, \theta, \xi)$ и $Y(t, \theta, \xi)$ интегральное представление

$$\Phi(t, \theta, \xi) = -\int_0^\infty T^0 R(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi)\, dz,$$

$$Y(t, \theta, \xi) = -\int_0^\infty \left[\frac{\partial TA(\theta)\xi}{\partial\theta}\, \Phi(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi) + \right.$$

$$\left. + e^{-TA(\theta)z} T' F(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi)\right] dz \tag{3.16}$$

и оценку

$$\|\Phi(t, \theta, \xi)\| + \|Y(t, \theta, \xi)\| \leqslant q_2 (\|D_\xi T^0 R\|_0 + \|D_r TA\|_0 \cdot \|D_\xi T^0 R\|_0 +$$

$$+ \|D_\xi^2 T' F\|_0) \leqslant q_2' (N_s \delta_{s-1} + Q_s a N_s \delta_{s-1} + N_s^3 \delta_{s-1}) \leqslant N_{s-1}^{-\varkappa} = N_s^{-1}. \tag{3.17}$$

Учитывая (3.16), найдем оценку производных функций $\Phi(t, \theta, \xi)$ и $Y(t, \theta, \xi)$. Имеем

$$D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r \Phi(t, \theta, \xi) = -\int_0^\infty D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r T^0 R(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi)\, dz. \tag{3.18}$$

Отметим теперь, что для дифференцируемой функции $f(y, \eta(y)) = f(y_1, \ldots, y_k, \eta_1(y_1, \ldots, y_k), \ldots, \eta_l(y_1, \ldots, y_k))$ ее частные производные $D_y^\varrho f(y, \eta(y))$ являются линейной комбинацией выражений*

$$D_y^{i_1} D_\eta^{i_2} f(y, \eta) \cdot D_y^{j_0+1} \eta_{\beta_0} D_y^{j_1+1} \eta_{\beta_1} \ldots D_y^{j_{i_2}+1} \eta_{\beta_{i_2}},$$

т. е.

$$D_y^\varrho f(y, \eta(y)) = L_{|\varrho|} [D_y^{i_1} D_\eta^{i_2} f(y, \eta)\, D_y^{j_0+1} \eta_{\beta_0} \ldots D_y^{j_{i_2}+1} \eta_{\beta_{i_2}}], \tag{3.19}$$

где $i_1, i_2, j_1, \ldots, j_{i_2}$ — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие соотношениям $i_1 + i_2 = 1, 2, \ldots, |\varrho|$, $j_1 + j_2 + \ldots + j_{i_2} = |\varrho| - (i_1 + i_2)$, β_i при $i = 1, \ldots, i_2$ — числа ряда $1, 2, \ldots, l$, $D_y^{j_0+1} \eta_{\beta_0} = 1$, $L_{|\varrho|}[\cdot]$ — линейная форма с неотрицательными целочисленными коэффициентами. Учитывая (3.19), при $|r| > 0$ можем написать

$$D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r T^0 R(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi) = D_t^d D_\theta^\varrho L_{|r|} [D_\eta^{|r|} T^0 R(t+z, \theta,$$

$$\eta = e^{TA(\theta)z}\xi)\, D_\xi \{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_1} \ldots D_\xi \{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_{|r|}}] = L_{|r|} [D_\theta^\varrho D_t^d D_\eta^{|r|} T^0 R(t+z, \theta, \eta =$$

$$= e^{TA(\theta)z}\xi)\, \{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_1\beta_1} \ldots \{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}}]. \tag{3.20}$$

Но $D_\theta^\varrho [a(\theta) \cdot b(\theta)]$ есть линейная комбинация выражений $D_\theta^{i_1} a(\theta) \cdot D_\theta^{i_2} b(\theta)$, т. е.

$$D_\theta^\varrho [a(\theta)\, b(\theta)] = L_{|\varrho|} [D_\theta^{i_1} a(\theta) \cdot D_\theta^{i_2} b(\theta)], \tag{3.21}$$

где i_1, i_2 — неотрицательные целые числа, удовлетворящие условию $i_1 + i_2 = |\varrho|$, $L_{|\varrho|}[\cdot]$ — линейная форма с неотрицательными целочисленными коэффициентами.

---

* Начиная отсюда, верхний индекс у оператора дифференцирования D часто будет не вектором, а числом, указывающим только порядок оператора.

Поэтому

$$D_{\theta}^{\varrho}\Big(D_t^d D_\eta^{|r|} T^0 R\,(t+z,\theta,\eta=e^{TA(\theta)z}\xi)\cdot\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_1,\beta_1}\ldots\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_{|r|},\beta_{|r|}}\Big)=$$
$$=L_{|\varrho|}\,[D_\theta^{i_1}D_t^{d}\,D_\eta^{|r|}T^0R\,(t+z,\theta,\eta=e^{TA(\theta)z}\xi)\cdot D_\theta^{i_2}(\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_1,\beta_1}\ldots$$
$$\ldots\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}})]. \tag{3.22}$$

Согласно (2.16) имеем

$$\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_1\beta_1}\ldots\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}}=\frac{T\varepsilon_{\nu_{\alpha_1}}^{\nu_{\alpha_1\beta_1}}\ldots T\varepsilon_{\nu_{\alpha_{|r|}}}^{\nu_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}}}}{\nu_{\alpha_1\beta_1}!\ldots\nu_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}}!}\,. \tag{3.23}$$

$$z^{\nu_{\alpha_1\beta_1}+\ldots+\nu_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}}}e^{[T\mu_{\alpha_1}+\ldots+T\mu_{\alpha_{|r|}}]z}=P_1(z,T\varepsilon)\,e^{T\mu(\theta)z},$$

где $T\mu(\theta)=T\mu_{\nu_{\alpha_1}}+\ldots+T\mu_{\nu_{\alpha_{|r|}}}$. Можем написать теперь

$$\|D_\theta^{i_2}(P_1(z,T\varepsilon)e^{T\mu(\theta)z})\|\leqslant L_{i_2}[P_1(z,\|D_\theta^{i_3}T\varepsilon(\theta)\|)\,\|D_\theta^{i_2-i_3}e^{T\mu(\theta)z}\|]\leqslant$$
$$\leqslant a_1P_2(z)\,Q_s^{i_2}\,\|e^{T\mu(\theta)z}\|\leqslant a_1Q_s^{i_2}P_2(z)\,e^{-\gamma_1z} \tag{3.24}$$

где a_1 и γ_1 — положительные постоянные, не зависящие от Q_s; $P_2(z)$ — полином от z с положительными коэффициентами, не зависящими от Q_s.

Оценим выражение

$$D_\theta^{i_1}D_t^dD_\eta^{|r|}T^0R\,(t+z,\theta,\eta=e^{TA(\theta)z}\xi)=L_{i_1}\,[D_\theta^{i_1'}D_\eta^{i_2'}\,(D_t^dD_\eta^{|r|}T^0R\,(t+z,\theta,\eta)\times$$
$$\times D_\theta^{j_0+1}\{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_0}\cdot D_\theta^{j_1+1}\{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_1}\ldots D_\theta^{j_{i_2'}+1}\{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_{i_2'}}].$$

Согласно (2.16) имеем (при $z\geqslant 0$)

$$D_\theta^{j_k+1}\,\{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_k}\,\|\leqslant a_2Q_s^{j_k+1}\,\|\,\{e^{TA(\theta)z}\xi\}_{\beta_k}\,\|\leqslant\bar a_2Q_s^{j_k+1}, \tag{3.25}$$

так что

$$\|\,D_\theta^{i_1}D_t^dD_\eta^{|r|}T^0R\,(t+z,\theta,\eta=e^{TA(\theta)z}\xi)\,\|\leqslant L_{i_1}\,[\,\|\,D_t^dD_\theta^{i_1'}D_\eta^{|r|+i_2'}T^0R\,(t,\theta,\eta)\,\|\times$$
$$\times a_3Q_s^{j_1+j_2+\ldots+j_{i_2'}+i_2'}]\leqslant L_{i_1}\,[qN_s^{d+i_1'+|r|+i_2'}\|\,R\,(t,\theta,\eta)\,\|\,a_3Q_s^{i_1-(i_1'+i_2')+i_2'}]\leqslant$$
$$\leqslant L_{i_1}\,[qQ_3N_s^{d+|r|+i_1}Q_s^{i_1-i_1'}\delta_{s-1}]\leqslant a_4N_s^{d+|r|+i_1}Q_s^{i_1}\delta_{s-1}. \tag{3.26}$$

С учетом (3.24), (3.26) из (3.22) получаем оценку

$$\|\,D_\theta^{\varrho}\,(D_t^dD_\eta^{|r|}T^0R\,\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_1\beta_1}\ldots\{e^{TA(\theta)z}\}_{\alpha_{|r|}\beta_{|r|}})\,\|\leqslant$$
$$\leqslant L_{|\varrho|}\,[a_4N_s^{d+|r|+i_1}Q_s^{i_1}\delta_{s-1}a_1Q_s^{i_2}P_2(z)\,e^{-\gamma_1z}]\leqslant a_5P_2(z)\,e^{-\gamma_1z}N_s^{d+|r|+|\varrho|}Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1},$$

благодаря которой находим

$$\|\,D_t^dD_\theta^{\varrho}D_\xi^rT^0R\,(t+z,\theta,e^{TA(\theta)z}\xi)\,\|\leqslant a_6P_2(z)\,e^{-\gamma_1z}N_s^{d+|r|+|\varrho|}Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}. \tag{3.27}$$

Оценивая теперь интеграл (3.18), получаем

$$\|\,D_t^dD_\theta^{\varrho}D_\xi^r\Phi\,(t,\theta,\xi)\,\|\leqslant a_6N_s^{d+|r|+|\varrho|}Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}\int\limits_0^\infty P_2(z)\,e^{-\gamma_1z}dz\leqslant$$

$$\leqslant a_7 N_s^{a+|\varrho|+|r|} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}, \tag{3.28}$$

где a_7—постоянная, не зависящая от Q_s.

При $|r|=0$ из (3.18) получаем

$$D_t^d D_\theta^\varrho \Phi(t,\theta,\xi) = -\int_0^\infty [D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t+z,\theta,e^{TA(\theta)z}\xi) - D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t+z,\theta,0)]\,dz,$$

так как $D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t+z,\theta,0)=0$. Но в силу (3.27)

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t+z,\theta,e^{TA(\theta)z}\xi) - D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t+z,\theta,0)\| \leqslant$$

$$\leqslant a_8 \| D_\xi D_t^d D_\theta^\varrho T^0 R(t,\theta,e^{TA(\theta)z}\xi)\|_0 \|e^{TA(\theta)z}\| \leqslant$$

$$\leqslant a_6 a_8 \| P_2(z) e^{-\gamma_1 z}\|_0 N_s^{d+|\varrho|+1} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1} \| e^{TA(\theta)z}\|,$$

поэтому

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho \Phi(t,\theta,\xi)\| \leqslant \int_0^\infty a_6 a_8 \| P_2(z) e^{-\gamma_1 z}\|_0 N_s^{d+|\varrho|+1} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1} \| e^{TA(\theta)z}\|\,dz <$$

$$< a_9 N_s^{d+|\varrho|+1} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}, \tag{3.29}$$

где a_9 — постоянная, не зависящая от Q_s.

Объединяя неравенства (3.28), (3.29), приходим к следующей оценке производных функций $\Phi(t,\theta,\xi)$

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r \Phi(t,\theta,\xi)\| \leqslant b N_s^{d+|\varrho|+|\bar r|} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}, \tag{3.30}$$

где b — постоянная, не зависящая от Q_s, $|\bar r| = \begin{cases} |r| & \text{при } |r|>0, \\ 1 & \text{при } |r|=0. \end{cases}$

Произведя оценки, аналогичные приведенным выше, для производных функции $Y(t,\theta,\xi)$ найдем оценку

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r Y(t,\theta,\xi)\| \leqslant b N_s^{d+|\varrho|+|r|+2} Q_s^{|\varrho|}\delta_{s-1}, \tag{3.31}$$

С учетом (3.2) из неравенств (3.30) и (3.31) получаем

$$\|\Phi(t,\theta,\xi)\|_{s_0} + \|Y(t,\theta,\xi)\|_{s_0} \leqslant b[N_s^{s_0+1} Q_s^{s_0}\delta_{s-1} +$$

$$+ N_s^{s_0+3} Q_s^{s_0}\delta_{s-1}] \leqslant 2b N_s^{s_0+3} Q_s^{s_0}\delta_{s-1} = 2b N_s^{\left(s_0+3+\frac{s_0}{\alpha}\right)}\delta_{s-1} =$$

$$= 2b N_{s-1}^{\varkappa\left(s_0+3+\frac{s_0}{\alpha}\right)-\beta} < Q_{s-1}^{-1}, \tag{3.32}$$

лишь только δ_0 достаточно мало.

Мы показали, следовательно, что замена (3.5) существует и удовлетворяет свойствам (3.7), (3.8) индуктивной теоремы.

Перейдем к оценке функций $R^{(1)}(t,\theta,\xi)$ и $F^{(1)}(t,\theta,\xi)$. Прежде всего отметим, что из (3.32) следует, что матрица

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} E + \dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\Phi}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial\theta} & E + \dfrac{\partial Y}{\partial\xi} \end{pmatrix}^{-1} \tag{3.33}$$

существует и удовлетворяет неравенству $\| A^{-1} \| < 2$. В силу обозначений (3.15) можем написать

$$\| R^{(1)} \| + \| F^{(1)} \| \leqslant 2b_{10} \Big\{ \| R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T^0 R(t, \theta, \xi) \| + \\ + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} [A - TA] \xi \right\| + \| F(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T' F(t, \theta, \xi) \| + \\ + \left\| [A(\theta + \Phi) - TA(\theta)] \xi - \frac{\partial TA(\theta) \xi}{\partial \theta} \Phi \right\| + \| [A(\theta + \Phi) - TA(\theta) Y \| + \\ + \left\| \left(E + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) [A - TA] \xi \right\| \Big\}. \tag{3.34}$$

С учетом свойств операторов T, T^0, T' и неравенств (3.30), (3.31), находим

$$\| R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T^0 R(t, \theta, \xi) \| \leqslant \| R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - \\ - T^0 R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) \| + \| T^0 R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T^0 R(t, \theta, \xi) \| \leqslant \\ \leqslant \bar{q}_1 [N_s^{-l_0} \| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r R(t, \theta, \xi) \|_0 + \| D_\theta T^0 R(t, \theta, \xi) \|_0 \| \Phi \| + \\ + \| D_\xi T^0 R \|_0 \| Y \|] \leqslant \bar{q}_1 \left[\left(\frac{N_{s-1}}{N_s} \right)^{l_0} + q N_s \delta_{s-1} b N_s \delta_{s-1} + \\ + q N_s \delta_{s-1} b N_s^3 \delta_{s-1} \right] \leqslant \tilde{q}_1 \left[\left(\frac{N_{s-1}}{N_s} \right)^{l_0} + N_s^4 \delta_{s-1}^2 \right]. \tag{3.35}$$

Аналогично получаем

$$\| F(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T' F(t, \theta, \xi) \| \leqslant \bar{q}_1 \left[\left(\frac{N_{s-1}}{N_s} \right)^{l_0} + q N_s^2 \delta_{s-1} b N_s \delta_{s-1} + \\ + q N_s^2 \delta_{s-1} b N_s^3 \delta_{s-1} \right] \leqslant \tilde{q}_1 \left[\left(\frac{N_{s-1}}{N_s} \right)^{l_0} + N_s^5 \delta_{s-1}^2 \right]. \tag{3.36}$$

Имеем также

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} [A - TA] \xi \right\| + \left\| \left(E + \frac{\partial Y}{\partial \xi} \right) [A - TA] \xi \right\| \leqslant b_{11} \| A - TA \|_0 \leqslant \\ \leqslant b_{11} Q_s^{-l_1} \| A \|_{l_1} \leqslant \tilde{q}_1 Q_s^{-l_1};$$

$$\left\| [A(\theta + \Phi) - TA(\theta)] \xi - \frac{\partial TA(\theta) \xi}{\partial \theta} \Phi \right\| \leqslant \| [A(\theta + \Phi) - \\ - TA(\theta + \Phi] \xi \| + \left\| [TA(\theta + \Phi) - TA(\theta)] \xi - \frac{\partial TA(\theta) \xi}{\partial \theta} \Phi \right\| \leqslant \\ \leqslant q_2 [Q_s^{-l_1} + \| D_\theta^2 TA(\theta) \|_0 \| \Phi \|_0^2 \leqslant \tilde{q}_1 [Q_s^{-l_1} + Q_s^2 N_s^2 \delta_{s-1}^2]; \tag{3.37}$$

$$\| [A(\theta + \Phi) - TA(\theta)] Y \| \leqslant b_{13} (\| A(\theta + \Phi) - TA(\theta + \Phi) \| + \| TA(\theta + \Phi) - \\ - TA(\theta) \|) \| Y \| \leqslant \tilde{b}_{13} (Q_s^{-l_1} \| A \|_{l_1} + \| D_\theta TA \|_0 \| \Phi \|) \| Y \| \leqslant \\ \leqslant \tilde{q}_1 (Q_s^{-l_1} N_s^3 \delta_{s-1} + Q_s N_s^4 \delta_{s-1}^2).$$

Учитывая неравенства (3.2) и (3.35) — (3.37), приходим к оценке

$$\| R^{(1)}(t, \theta, \xi) \| + \| F^{(1)}(t, \theta, \xi) \| \leqslant \tilde{q}_1 [2N_{s-1}^{(1-\varkappa)l_0} + N_s^4\delta_{s-1}^2 + N_s^5\delta_{s-1}^2 + $$
$$+ 2Q_s^{-l_1} + Q_s^2 N_s^2 \delta_{s-1}^2 + Q_s N_s^4 \delta_{s-1}^2 + Q_s^{-l_1} N_s^3 \delta_{s-1}] \leqslant$$
$$\leqslant 4\tilde{q}_1 (N_{s-1}^{(1-\varkappa)l_0} + N_s^5 \delta_{s-1}^2 + Q_s^{-l_1}) \leqslant 4\tilde{q}_1 (N_{s-1}^{\beta\varkappa-(\varkappa-1)l_0} +$$
$$+ N_{s-1}^{5\varkappa-\beta(2-\varkappa)} + Q_s^{-l_1+\beta\alpha})\, \delta_s \leqslant \delta_s, \tag{3.38}$$

доказывающей первое из неравенств (3.11).

Перейдем к оценке l_0-ых производных функций $R^{(1)}(t, \theta, \xi)$ и $F^{(1)}(t, \theta, \xi)$. Для этого представим вектор $\{R^{(1)}, F^{(1)}\}$ в виде суммы двух векторов

$$\{R^{(1)}, F^{(1)}\} = B_1 + B_2, \tag{3.39}$$

где

$$B_1 = A_1^{-1} \begin{Bmatrix} R(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T^0 R(t, \theta, \xi) \\ F(t, \theta + \Phi, \xi + Y) - T' F(t, \theta, \xi) \end{Bmatrix}, \tag{3.40}$$

$$B_2 = A_1^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi}(TA - A)\xi \\ [A(\theta+\Phi) - TA(\theta)](\xi+Y) - \dfrac{\partial TA(\theta)\,\xi}{\partial \theta}\Phi + \left(E + \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}\right)(TA(\theta) - A(\theta))\xi \end{Bmatrix} =$$
$$= A_1^{-1} B_3,$$

A_1^{-1} — матрица (3.33).

Оценим l_0-ые производные вектора B_1. С этой целью положим

$$\Phi_1(t_1, \theta_1, \xi_1) = N_s \Phi\left(\frac{t_1}{N_s}, \frac{\theta_1}{N_s}, \frac{\xi_1}{N_s}\right); \quad Y(t_1, \theta_1, \xi_1) = N_s Y\left(\frac{t_1}{N_s}, \frac{\theta_1}{N_s}, \frac{\xi_1}{N_s}\right);$$
$$R_1(t_1, \theta_1, \xi_1) = N_s R\left(\frac{t_1}{N_s}, \frac{\theta_1}{N_s}, \frac{\xi_1}{N_s}\right); \quad F_1(t_1, \theta_1, \xi_1) = N_s F\left(\frac{t_1}{N_s}, \frac{\theta_1}{N_s}, \frac{\xi_1}{N_s}\right); \tag{3.41}$$
$$B_1^{(1)}(t_1, \theta_1, \xi_1) = N_s B_1\left(\frac{t_1}{N_s}, \frac{\theta_1}{N_s}, \frac{\xi_1}{N_s}\right).$$

Тогда

$$\| D_{t_1}^d D_{\theta_1}^{\varrho} D_{\xi_1}^r \Phi_1 \| + \| D_{t_1}^d D_{\theta_1}^{\varrho} D_{\xi_1}^r Y_1 \| \leqslant N_s \cdot N_s^{-(d+|\varrho|+|r|)} \times$$
$$\times [\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r \Phi(t, \theta, \xi) \| + \| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r Y(t, \theta, \xi) \|] \leqslant$$
$$\leqslant b N_s N_s^{-d-|\varrho|-|r|} (N_s^{d+|\varrho|+|\bar{r}|} Q_s^{|\varrho|} \delta_{s-1} + N_s^{d+|\varrho|+|\bar{r}|+2} Q_s^{|\varrho|} \delta_{s-1}) \leqslant$$
$$\leqslant 2b N_s^4 Q_s^{|\varrho|} \delta_{s-1} = 2b N_{s-1}^{\varkappa\left(4+\frac{|\varrho|}{\alpha}\right)-\beta} < 1$$

для всех $d + |\varrho| + |r| \leqslant l_0 + 1$;

$$\| D_{t_1}^d D_{\theta_1}^\varrho D_{\xi_1}^r R_1 \| + \| D_{t_1}^d D_{\theta_1}^\varrho D_{\xi_1}^r F_1 \| \leqslant N_s \cdot N_s^{-d-|\varrho|-|r|} \times$$
$$\times (\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r R(t, \theta, \xi) \| + \| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r F(t, \theta, \xi) \|) \leqslant$$
$$\leqslant N_s \left(\frac{N_{s-1}}{N_s}\right)^{l_0} \leqslant N_s N_s^{(1-\varkappa)l_0} = N_{s-1}^{\varkappa-(\varkappa-1)l_0} < 1 \tag{3.42}$$

при $d+|\varrho|+|r|=l_0$;

$$\| R_1 \| + \| F_1 \| \leqslant N_s (\| R(t, \theta, \xi) \|_0 + \| F(t, \theta, \xi) \|_0) \leqslant N_s \delta_{s-1} < 1.$$

Неравенства (3.42) показывают, что функции R_1, F_1 и их производные по $z=(t_1, \theta_1, \xi_1)$ l_0-го порядка ограничены единицей. Из этого следует, что производные от R_1 и F_1 меньшего, чем l_0, порядка ограничены не зависящей от N_s постоянной.

Возвращаясь к обозначениям (3.40), (3.41) можем утверждать теперь, что $B_1^{(1)}(t_1, \theta_1, \xi_1)$ записывается с помощью функций, производные которых до порядка l_0 включительно оцениваются постоянной, не зависящей от N_s:

$$\| D_{t_1}^d D_{\theta_1}^{\varrho} D_{\xi_1}^r B_1^{(1)}(t_1, \theta_1, \xi_1) \| \leqslant q_6 \qquad \text{при } d+|\varrho|+|r|=l_0.$$

Из последнего неравенства следует

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r B_1(t, \theta, \xi) \| \leqslant q_6 N_s^{-1} N_s^{l_0} \leqslant \frac{N_s^{l_0}}{4} \text{ при } d+|\varrho|+|r|=l_0 \tag{3.43}$$

для всех (t, θ, ξ) из области (3.6).

Оценим теперь l_0-ые производные вектора B_2.

В силу (3.40), (3.21) имеем:

$$D_z^{l_0} B_2(z) = L_{l_0} \{ D_z^{i_1} A_1^{-1}(z) D_z^{i_2} B_3(z) \}, \tag{3.44}$$

где $i_1+i_2=l_0$, $z=(t, \theta, \xi)$.

Покажем, что

$$\| D_z^{i_1} A_1^{-1}(z) \| \leqslant q_7 N_s^{i_1+4} Q_s^{1+i_1} \delta_{s-1} \quad \text{при } 0 \leqslant i_1 \leqslant l_0. \tag{3.45}$$

Действительно, при $i_1=0$ формула (3.45) верна в силу вида матрицы A_1^{-1} и оценок (3.30), (3.31).

Пусть (3.45) имеет место для всех $0 \leqslant i_1 \leqslant k < l_0$. Имеем тогда

$$\begin{aligned} \| D_z^{k+1} A_1^{-1}(z) \| &\leqslant \| D_z^k (-A_1^{-1} D_z A_1(z) A_1^{-1}) \| \leqslant L_k [\| D_z^{j_1} A_1^{-1} \| \| D_z^{j_2+1} A_1(z) \| \times \\ &\times \| D_z^{j_3} A_1^{-1} \|] \leqslant L_k [q_7 N_s^{j_1+j_3+8} Q_s^{j_1+j_3+2} \delta_{s-1}^2 \| D_z^{j_2+2} Y(z) \|] \leqslant \\ &\leqslant q_7 L_k (N_s^{j_1+j_3+8} Q_s^{j_1+j_3+2} b N_s^{j_2+5} Q_s^{j_2+2} \delta_{s-1}^3) \leqslant q_8 N_s^{k+13} Q_s^{k+4} \delta_{s-1}^3 \leqslant \\ &\leqslant q_8 N_s^8 Q_s^2 \delta_{s-1}^2 N_s^{k+5} Q_s^{k+2} \delta_{s-1} < q_7 N_s^{k+5} Q_s^{k+2} \delta_{s-1}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

так как $q_8 N_s^8 Q_s^2 \delta_{s-1}^2 = q_8 (N_s^4 Q_s \delta_{s-1})^2 < q_7$. Неравенство (3.46) доказывает (3.45) в силу метода полной индукции.

Покажем теперь, что

$$\| D_z^{i_2} B_3(z) \| \leqslant q_7 N_s^{i_2} Q_s^{i_2} \quad \text{при } i_2 = 0, 1, \ldots, l_0. \tag{3.47}$$

Действительно, согласно обозначений (3.40) имеем

$$\begin{aligned} \| D_z^{i_2} B_3(z) \| \leqslant q_3 \Big(&\| D_z^{i_2} A(\theta+\Phi) \xi \| + \| D_z^{i_2} T A(\theta) Y \| + \| D_z^{i_2} A(\theta+\Phi) Y \| + \\ &+ \| D_z^{i_2} T A(\theta) \xi \| + \left\| D_z^{i_2} \frac{\partial T A(\theta) \xi}{\partial \theta} \Phi \right\| + \left\| D_z^{i_2} \frac{\partial Y}{\partial \xi} T A(\theta) \xi \right\| + \\ &+ \| D_z^{i_2} A(\theta) \xi \| + \left\| D_z^{i_2} \frac{\partial Y}{\partial \xi} A(\theta) \xi \right\| \Big). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Учитывая (3.19) и оценку (3.30), находим

$$\| D_z^{i_2} A(\theta+\Phi)\xi \| \leqslant q_{10} \| D_{t,\theta,\xi}^{i_1} A(\theta+\Phi) \| \leqslant q_{10} L_{i_2} [\| D_\eta^{\nu} A(\eta) \| \times$$

$$\times \| D_{t,\theta,\xi}^{j_0+1} (\theta+\Phi)_{\beta_0} \| \ldots \| D_{t,\theta,\xi}^{j_\nu+1} (\theta+\Phi)_{\beta_\nu} \|] \leqslant \bar{q}_{10} L_{i_2} [(l_1 +$$

$$+ N_s^{j_1+2} Q_s^{j_1+1} \delta_{s-1}) \ldots (l_\nu + N_s^{j_\nu+2} Q_s^{j_\nu+1} \delta_{s-1})], \tag{3.49}$$

где постоянные $l_1, \ldots, l_\nu$ равны 0 или 1, $\nu = 1, 2, \ldots, i_2$, $j_1+j_2+\ldots+j_\nu = i_2 - \nu$. Из (3.49) следует

$$\| D_z^{i_2} A(\theta+\Phi)\xi \| \leqslant \bar{q}_{10} L_{i_2} [N_s^{i_2-\nu} Q_s^{i_2-\nu} (l_1 N_s^{-j_1} Q_s^{-j_1} + N_s^2 Q_s \delta_{s-1}) \ldots$$

$$\ldots (l_\nu N_s^{-j_\nu} Q_s^{-j_\nu} + N_s^2 Q_s \delta_{s-1})] \leqslant q_{11} N_s^{i_2-1} Q_s^{i_2-1}, \tag{3.50}$$

так как $N_s^2 Q_s \delta_{s-1} < 1$.

Учитывая (3.50), находим

$$\| D_z^{i_2} A(\theta+\Phi) Y \| \leqslant q_{10} L_{i_2} [D_z^{\nu} A(\theta+\Phi) \| \| D_z^{i_2-\nu} Y \|] \leqslant$$

$$\leqslant \bar{q}_{11} L_{i_2} [N_s^{\nu-1} Q_s^{\nu-1} N_s^{i_2-\nu+3} Q_s^{i_2-\nu} \delta_{s-1}] \leqslant \bar{q}_{11} L_{i_2} [N_s^{i_2+2} Q_s^{i_2-1} \delta_{s-1}] \leqslant q_{12} N_s^{i_2} Q_s^{i_2}, \tag{3.51}$$

так как $N_s^2 \delta_{s-1} < 1$.

Произведя аналогичные приведенным выше оценки, получаем

$$\begin{gathered}
\| D_z^{i_2} TA(\theta)\xi \| \leqslant q_{13} Q_s^{i_2}; \quad \| D_z^{i_2} TA(\theta) Y \| \leqslant q_{13} N_s^{i_2+3} Q_s^{i_2} \delta_{s-1}; \\
\left\| D_z^{i_2} \frac{\partial TA(\theta)\xi}{\partial\theta} \Phi \right\| \leqslant q_{13} N_s^{i_2+1} Q_s^{i_2+1} \delta_{s-1}; \\
\left\| D_z^{i_2} \frac{\partial Y}{\partial\xi} TA(\theta)\xi \right\| \leqslant q_{13} N_s^{i_2+4} Q_s^{i_2+1} \delta_{s-1}; \\
\| D_z^{i_2} A(\theta)\xi \| \leqslant q_{13}; \quad \left\| D_z^{i_2} \frac{\partial Y}{\partial\xi} A(\theta)\xi \right\| \leqslant q_{13} N_s^{i_2+4} Q_s^{i_2+1} \delta_{s-1}
\end{gathered} \tag{3.52}$$

для всех $i_2 = 0, 1, \ldots, l_0$.

Неравенства (3.48) — (3.52) приводят к оценке (3.47):

$$\| D_z^{i_2} B_3(z) \| \leqslant N_s^{i_2} Q_s^{i_2} [q_{11} N_s^{-1} Q_s^{-1} + q_{12} + q_{13} N_s^3 \delta_{s-1} + q_{13} N_s^{-i_2} + q_{13} N_s Q_s \delta_{s-1} +$$

$$+ 2 q_{13} N_s^4 Q_s \delta_{s-1} + q_{13} N_s^{-i_2} Q_s^{-i_2}] \leqslant q_7 N_s^{i_2} Q_s^{i_2},$$

так как выражение в скобках можно сделать меньшим постоянной, не зависящей от N_s.

Из равенства (3.44) с учетом (3.45), (3.47) получаем

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r B_2(t, \theta, \xi) \| \leqslant L_{l_0} [q_7 N_s^{i_1+i_2} Q_s^{i_1+i_2} N_s^4 Q_s \delta_{s-1}] \leqslant N_s^{l_0} L_{l_0} [q_7 N_s^4 Q_s^{l_0+1} \delta_{s-1}] \leqslant$$

$$\leqslant q_{14} N_s^4 Q_s^{l_0+1} \delta_{s-1} N_s^{l_0} \leqslant q_{14} N_{s-1}^{4\varkappa + \frac{(l_0+1)\varkappa}{\alpha} - \beta} N_s^{l_0} < \frac{N_s^{l_0}}{4} \text{ при } d + |\varrho| + |r| = l_0. \tag{3.53}$$

Неравенства (3.43), (3.53) приводят к оценке

$$\| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r R^{(1)}(t, \theta, \xi) \| + \| D_t^d D_\theta^\varrho D_\xi^r F^{(1)}(t, \theta, \xi) \| \leqslant N_s^{l_0} \text{ при } d + |\varrho| + |r| = l_0,$$

т. е. ко второму из неравенств (3.11) индуктивной теоремы.

Из формулы (3.15) в силу свойств (3.7) функций Φ и Y, а также свойств (2.7) операторов T^0 и T', следует тождество (3.10) индуктивной теоремы, что и завершает доказательство этой теоремы.

§ 4. Теорема о приводимости

Вопрос о проведении решений системы (1) в окрестности многообразия (3) был сведен нами (§ 1) к вопросу о поведении решений системы (1.3) в окрестности многообразия $x = 0$.

Используя индуктивную теорему докажем здесь, что система (1.3) посредством гладкой ограниченной для всех $t \in (-\infty, \infty)$ замены переменных

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \Phi(t, c_0, y) \\ x &= y + Y(t, c_0, y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

приводится к виду

$$\frac{dc_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = A(c_0)\, y. \tag{4.2}$$

Этим самым покажем, что решение системы (1.3) в окрестности многообразия $x = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \Phi(t, c_0, e^{A(c_0)t} y_0) \\ x &= e^{A(c_0)t} y_0 + Y(t, c_0, e^{A(c_0)t} y_0), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где c_0, y_0 — произвольные постоянные.

Более того, мы докажем здесь же, что замена (4.1) является периодической, квазипериодической или почти периодической по t равномерно относительно c_0, y в зависимости от того, является ли таковой правая часть системы (1.3).

Основной результат работы заключается в следующем утверждении.

Т е о р е м а 1. *Пусть $R(t, c, x)$ и $F(t, c, x)$ есть ограниченные в области*

$$-\infty < t < \infty, \ c \in D_1, \ \|x\| < \eta \tag{4.4}$$

векторные функции.

Тогда для данных $a_0, a, \gamma, \bar{\eta}$ и данного целого s_0 ($s_0 \geqslant 2$) существуют $\delta_0 = \delta_0(a_0, \gamma, \bar{\eta}, s_0)$ и целые $l_0 = l_0(s_0)$, $l_1 = l_1(s_0)$ такие, что если $R(t, c, x)$ и $F(t, c, x)$ l_0 раз непрерывно дифференцируемы в области (4.4), *удовлетворяют тождеству*

$$R(t, c, 0) = F(t, c, 0) = \frac{\partial F(t, c, 0)}{\partial x} = 0 \tag{4.5}$$

и неравенствам

$$\begin{aligned} &\| R(t, c, x) \| + \| F(t, c, x) \| \leqslant \delta_0, \\ &\| R(t, c, x) \|_{l_0} + \| F(t, c, x) \|_{l_0} \leqslant a_0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

а $A(c) = C(c)\, J(c)\, C^{-1}(c)$ есть l_1 раз непрерывно дифференцируемая вместе с $C(c)$ матрица, удовлетворяющая неравенствам

$$\begin{aligned} &\| A(c) \|_{l_1} \leqslant a, \ \| C(c) \|_{l_1} \leqslant a, \ \det \operatorname{Re} C(c) \neq 0, \\ &\operatorname{Re} [\mu_\alpha(c) + \mu_\beta(c) - \mu_j(c)] \leqslant -\gamma \end{aligned} \tag{4.7}$$

для всех $c \in D_1$ и любых α, β, $j = 1, 2, \ldots, n-m$, где $J(c)$ — жорданова матрица, $\mu_1(c), \ldots, \mu_{n-m}(c)$ — собственные значения $A(c)$, то существуют *ограниченные и $s_0 - 1$ раз непрерывно дифференцируемые в области*

$$-\infty < t < \infty, \ \theta \in D_1 - \overline{\eta}, \ \|\xi\| < \eta - \overline{\eta} \tag{4.8}$$

векторные функции $\Phi(t, \theta, \xi)$ и $Y(t, \theta, \xi)$, удовлетворяющие тождеству

$$\Phi(t, \theta, 0) = Y(t, \theta, 0) = \frac{\partial Y(t, \theta, 0)}{\partial \xi} = 0 \tag{4.9}$$

и неравенствам

$$\| Y(t, \theta, \xi) \|_{s_0 - 1} + \| \Phi(t, \theta, \xi) \|_{s_0 - 1} < \overline{\eta} \tag{4.10}$$

такие, что система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= R(t, c, x), \\ \frac{dx}{dt} &= A(c)\, x + F(t, c, x). \end{aligned} \tag{4.11}$$

заменой переменных

$$\begin{aligned} c &= \theta + \Phi(t, \theta, \xi), \\ x &= \xi + Y(t, \theta, \xi) \end{aligned} \tag{4.12}$$

приводится к виду

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\xi}{dt} = A(\theta)\, \xi. \tag{4.13}$$

Доказательство теоремы 1 проводится методом Ньютоновского типа [10—14]. Основную роль при этом играет индуктивная теорема. Чтобы приспособить систему (4.11) к применению этой теоремы, нужно привести матрицу $A(c)$ к жордановскому виду.

Возможность такого приведения обеспечивается ограничениями, наложенными на матрицу $C(c)$, приводящую $A(c)$ к жорданову виду. Не вдаваясь в детальное обсуждение общности этих ограничений, отметим лишь, что представление

$$A(c) = C(c)\, J(c) \cdot C^{-1}(c)$$

всегда осуществимо в классе локально гладких матриц, т. е. матриц, гладких в некоторой окрестности любого фиксированного значения c, лишь только $A(c)$ является консервативной матрицей, т. е. матрицей сохраняющей при всех c одну и ту же жорданову форму (см. [30]). Для осуществления указанного представления в классе гладких при всех $c \in D_1$ матриц, помимо консервативности требуется наложить некоторые ограничения на топологию области D_1, потребовав, например, чтобы D_1 было гемеоморфно шару, или тору, или прямому произведению шара на окружность.

Перейдем теперь к преобразованиям системы (4.11). Начнем с того, что осуществим замену переменных, заменив x на $\frac{1}{2}(C(c)\, x + \overline{C}(c)\, \overline{x})$, где x, C и $\overline{x}, \overline{C}$—взаимно сопряженные величины. Произведя все выкладки и устранив произвол, возникший в результате перехода от действительных x к комплексным, путем введения дополнительного требования, заключающегося в выполнении равенства

$$\frac{dx}{dt} - Jx = \frac{d\overline{x}}{dt} - \overline{J}\overline{x},$$

мы придем к системе уравнений вида (4.11), содержащей действительные функции $R(t, c, x) = R(t, c, x, \bar{x})$, $F(t, c, x) = F(t, c, x, \bar{x})$ и имеющей матрицу $A(c)$ в жордановом виде.

К полученной системе, которую мы отождествим простоты ради с системой (4.11), можно применить уже индуктивную теорему.

Согласно этой теоремы существует замена переменных

$$\begin{gathered} c = c^{(1)} + \Phi^{(1)}(t, c^{(1)}, x^{(1)}), \\ x = x^{(1)} + Y^{(1)}(t, c^{(1)}, x^{(1)}), \end{gathered} \tag{4.14}$$

приводящая (4.11) к виду

$$\begin{gathered} \frac{dc^{(1)}}{dt} = R^{(1)}(t, c^{(1)}, x^{(1)}), \\ \frac{dx^{(1)}}{dt} = A(c^{(1)})x^{(1)} + F^{(1)}(t, c^{(1)}, x^{(1)}), \end{gathered} \tag{4.15}$$

при этом функции $\Phi^{(1)}$, $Y^{(1)}$, $R^{(1)}$ и $F^{(1)}$ удовлетворяют всем соотношениям индуктивной теоремы, если положить в них $s = 1$.

Применяя к (4.15) опять индуктивную теорему и поступая так дальше, на s-ом шаге найдем замену переменных

$$\begin{gathered} c^{(s-1)} = c^{(s)} + \Phi^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}), \\ x^{(s-1)} = x^{(s)} + Y^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}), \end{gathered} \tag{4.16}$$

приводящую систему уравнений для $(c^{(s-1)}, x^{(s-1)})$ к виду

$$\begin{gathered} \frac{dc^{(s)}}{dt} = R^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}), \\ \frac{dx^{(s)}}{dt} = A(c^{(s)})x^{(s)} + F^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}). \end{gathered} \tag{4.17}$$

В силу утверждений индуктивной теоремы функции $\Phi^{(s)}$, $Y^{(s)}$, $R^{(s)}$ и $F^{(s)}$ определены в области

$$-\infty < t < \infty, \; c^{(s)} \in D_1 - \sum_{\nu=1}^{s} (Q_\nu^{-1} + N_\nu^{-1}), \; \|x^{(s)}\| < \eta - 2\sum_{\nu=1}^{s} N_\nu^{-1}, \tag{4.18}$$

l_0 раз непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют тождеству

$$\begin{gathered} \frac{\partial Y^{(s)}(t, c^{(s)}, 0)}{\partial x} = \Phi^{(s)}(t, c^{(s)}, 0) = Y^{(s)}(t, c^{(s)}, 0) = R^{(s)}(t, c^{(s)}, 0) = \\ = F^{(s)}(t, c^{(s)}, 0) = \frac{\partial F^{(s)}(t, c^{(s)}, 0)}{dx} = 0 \end{gathered} \tag{4.19}$$

и неравенствам

$$\|\Phi^{(s)}\|_{s_0} + \|Y^{(s)}\|_{s_0} \leqslant Q_{s-1}^{-1}; \quad \|R^{(s)}\| + \|F^{(s)}\| \leqslant \delta_s; \tag{4.20}$$

$$\|D_t^d D_c^\varrho D_x^r R^{(s)}\| + \|D_t^d D_c^\varrho D_x^r F^{(s)}\| \leqslant N_s^{l_0} \text{ при } d + |\varrho| + |r| = l_0.$$

Учитывая (4.20), докажем сходимость итерационного процесса (4.14), (4.16).

С этой целью выразим c и x через $c^{(s)}$ и $x^{(s)}$:

$$c = c^{(s)} + \Psi^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}), \quad x = x^{(s)} + X^{(s)}(t, c^{(s)}, x^{(s)}). \tag{4.21}$$

Функции $\Psi^{(s)}, X^{(s)}$ определены в области (4.18), l_0 раз непрерывно дифференцируемы, удовлетворяют тождеству вида (4.19) и соотношениям

$$\begin{gathered}\Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)=\Phi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)+\Psi^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+Y^{(s+1)}),\\ X^{(s+1)}(t,\theta,\xi)=Y^{(s+1)}(t,\theta,\xi)+X^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+Y^{(s+1)}).\end{gathered}\tag{4.22}$$

Пусть $\theta\in D_1-\sum\limits_{\nu=1}^{s+1}(Q_\nu^{-1}+N_\nu^{-1}),\ \|y\|<\eta-2\sum\limits_{\nu=1}^{s+1}N_\nu^{-1}$. Дифференцируя (4.22), находим

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1}D_\theta^\varrho D_\xi^r\Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)=\sum_{|\varrho|+|r|=1}D_\theta^\varrho D_\xi^r\Phi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{m}\frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial\theta_\beta}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial\Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial\theta_\alpha}+\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{\partial\Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial\xi_\alpha}\right)+\sum_{\beta=1}^{n-m}\frac{\partial\Psi^{(s)}}{\partial\xi_\beta}\left(1+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial Y_\beta^{(s+1)}}{\partial\theta_\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha=1}^{n-m}\frac{\partial Y_\beta^{(s+1)}}{\partial\xi_\alpha}\right),\tag{4.23}$$

Учитывая (4.23) и (4.20) легко получить

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1}\|D_\theta^\varrho D_\xi^r\Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant nQ_s^{-1}+\sum_{|\varrho|+|r|=1}\|D_\theta^\varrho D_\xi^r\Psi^{(s)}\|\quad(1+nQ_s^{-1}).\tag{4.24}$$

Положим $\sum\limits_{|\varrho|+|r|=1}\|D_\theta^\varrho D_\xi^r\Psi^{(s)}\|_0=z_s$, тогда (4.24) есть

$$z_{s+1}\leqslant nQ_s^{-1}+(1+nQ_s^{-1})z_s,\ \ z_0=0.\tag{4.25}$$

Разрешая (4.25), находим

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1}\|D_\theta^\varrho D_\xi^r\Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant z_s\leqslant\prod_{0\leqslant\nu<\infty}(1+nQ_\nu^{-1})-1\leqslant B_1(Q_0^{-1}),\tag{4.26}$$

где $B_1(Q_0^{-1})$ — стремится к 0 при $Q_0\to\infty$. Аналогичным образом находим оценку для $X^{(s)}$:

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1}\|D_\theta^\varrho D_\xi^r X^{(s)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant B_1(Q_0^{-1}).\tag{4.27}$$

Выберем δ_0 настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}(Q_\nu^{-1}+N_\nu^{-1})<\bar\eta,$$

тогда для θ, ξ из области (4.8) в силу (4.26), (4.27) можем написать

$$\begin{gathered}\|\Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)-\Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant\|\Phi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)\|+\|\Psi^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+\\ +Y^{(s+1)})-\Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant Q_s^{-1}+B_1Q_s^{-1}\leqslant(1+B_1)Q_s^{-1}.\end{gathered}\tag{4.28}$$

Из (4.28) получаем критерий равномерной сходимости функций $\Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)$:

$$\|\Psi^{(s+k)}(t,\theta,\xi)-\Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)\|\leqslant(1+B_1)\sum_{\nu=0}^{k-1}Q_{s+\nu}^{-1}.\tag{4.29}$$

Аналогично получаем

$$\| X^{(s+k)}(t, \theta, \xi) - X^{(s)}(t, \theta, \xi) \| \leqslant (1 + B_1) \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{s+\nu}^{-1}. \tag{4.30}$$

Неравенства (4.29), (4.30) показывают, что равномерно по t, θ, ξ из области (4.8) имеют место соотношения

$$\begin{gathered} \Psi^{(s)}(t, \theta, \xi) \to \Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi), \\ X^{(s)}(t, \theta, \xi) \to X^{(\infty)}(t, \theta, \xi) \end{gathered} \tag{4.31}$$

и неравенство

$$\| \Psi^{(\infty)}(t,\theta,\xi)\| + \|X^{(\infty)}(t, \theta, \xi) \| \leqslant 2 \left[(1 + B_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_{1+\nu}^{-1} + Q_0^{-1} \right] < \bar{\eta}. \tag{4.32}$$

Из тождеств для $\Psi^{(s)}$ и $X^{(s)}$ вида (4.19) следует

$$\Psi^{(\infty)}(t, \theta, 0) = X^{(\infty)}(t, \theta, 0) = 0. \tag{4.33}$$

Так как, более того, согласно (4.20) $R^{(s)}(t, \theta, \xi) \to 0$, $F^{(s)}(t, \theta, \xi) \to 0$ при $s \to \infty$ равномерно по (t, θ, ξ), то для доказательства теоремы остается положить

$$\Phi(t, \theta, \xi) = \Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi), \; Y(t, \theta, \xi) = X^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$$

и показать непрерывную дифференцируемость функций $\Psi^{(\infty)}$ и $X^{(\infty)}$ $s_0 - 1$ раз и установить неравенство $\det \left| E + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \theta}, & \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} \end{pmatrix} \right| \neq 0.$

Оценим для этого s_0-ые производные функций $\Psi^{(s)}$ и $X^{(s)}$. Положим $s_0 = 2$. Дифференцируя (4.23), находим:

$$\begin{aligned} \sum_{|\varrho|+|r|=1} D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s+1)} = {} & \sum_{|\varrho|+|r|=1} D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Phi^{(s+1)} + \sum_{\beta=1} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial t \partial \theta_\beta} \Bigg(1 + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial \Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial \theta_\alpha} + \\ & + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial \Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial \xi_\alpha} \Bigg) + \sum_{\beta=1} \frac{\partial^2 \Psi^{(s)}}{\partial t \partial \xi_\beta} \Bigg(1 + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial Y_\beta^{(s+1)}}{\partial \theta_\alpha} + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial Y_\beta^{(s+1)}}{\partial \xi_\alpha} \Bigg) + \\ & + \sum_{\beta=1} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \theta_\beta} \Bigg(\sum_{\alpha=1} \frac{\partial^2 \Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial t \partial \theta_\alpha} + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial^2 \Phi_\beta^{(s+1)}}{\partial t \partial \xi_\alpha} \Bigg) + \sum_{\beta=1} \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial \xi_\beta} \Bigg(\sum_{\alpha=1} \frac{\partial^2 Y_\beta^{(s+1)}}{\partial t \partial \theta_\alpha} + \\ & + \sum_{\alpha=1} \frac{\partial^2 Y_\beta^{(s+1)}}{\partial t \partial \xi_\alpha} \Bigg). \end{aligned}$$

Учитывая (4.20), (4.26) легко получить

$$\begin{aligned} \sum_{|\varrho|+|r|=1} \| D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s+1)} \| < {} & \sum_{|\varrho|+|r|=1} Q_s^{-1} + \sum_{|\varrho|+|r|=1} \| D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s)} \| (1 + nQ_s^{-1}) + \\ & + B_1 n Q_s^{-1} = \Big(\sum_{|\varrho|+|r|=1} 1 + nB_1 \Big) Q_s^{-1} + (1 + nQ_s^{-1}) \sum_{|\varrho|+|r|=1} \| D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s)} \|. \end{aligned}$$

Положим $\sum\limits_{|\varrho|+|r|=1} \| D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s)} \|_0 = z_s$. Тогда (4.35) есть

$$z_{s+1} \leqslant n(1+B_1) Q_s^{-1} + (1 + nQ_s^{-1}) z_s, \; z_0 = 0. \tag{4.36}$$

Решая (4.36), находим

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1} \| D_t D_\theta^\varrho D_\xi^r \Psi^{(s)} \| \leqslant z_s \leqslant n\,(1+B_1) \sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu^{-1} \prod_{0\leqslant\nu<\infty} (1+nQ_\nu^{-1}) = B_2\,(Q_0^{-1}), \quad (4.37)$$

где $B_2(Q_0^{-1}) \to 0$ при $Q_0 \to \infty$.

Используя (4.37), докажем существование частной производной по t функции $\Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$. Согласно (4.22) имеем

$$\frac{\partial \Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+Y^{(s+1)})}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1} \frac{\partial \Psi^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+Y^{(s+1)})}{\partial \theta_\alpha} \cdot \frac{\partial \Phi_\alpha^{(s+1)}}{\partial t} +$$

$$+ \sum_{\alpha=1} \frac{\partial \Psi^{(s)}(t,\theta+\Phi^{(s+1)},\xi+Y^{(s+1)})}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial Y_\alpha^{(s+1)}}{\partial t},$$

откуда с учетом (4.20), (4.26) и (4.37) находим

$$\left\| \frac{\partial \Psi^{(s+1)}(t,\theta,\xi)}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^{(s)}(t,\theta,\xi)}{\partial t} \right\| \leqslant (1+B_1+B_2)\, Q_s^{-1}. \quad (4.38)$$

Из (4.38) получаем критерий равномерной сходимости функций $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}$:

$$\left\| \frac{\partial \Psi^{(s+k)}}{\partial t} - \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial t} \right\| \leqslant (1+B_1+B_2) \sum_{\nu=0}^{k-1} Q_{s+\nu}^{-1}. \quad (4.39)$$

Неравенство (4.39) показывает, что функция $\Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$ имеет непрерывную производную по t, причем

$$\left\| \frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial t} \right\| < \frac{\bar\eta}{2}, \quad \frac{\partial \Psi^{(s)}}{\partial t} \underset{s\to\infty}{\to} \frac{\partial \Psi^{(\infty)}}{\partial t} \quad (4.40)$$

равномерно относительно t, θ, ξ из области (4.8).

Аналогичным образом доказывается дифференцируемость функции $\Phi = \Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$ по θ, ξ, а также дифференцируемость по t, θ, ξ функции $Y = X^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$. Тождество (4.9) получается из аналогичного для $\Psi^{(k)}$, $X^{(k)}$ предельным переходом.

Невырожденность якобиана $\det \left| E + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}, & \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \theta}, & \dfrac{\partial Y}{\partial \xi} \end{pmatrix} \right|$ легко следует из неравенств типа (4.40) для $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \dfrac{\partial Y}{\partial \theta}, \dfrac{\partial Y}{\partial \xi}$ и малости $\bar\eta$. При $s_0 = 2$ теорема доказана.

При $s_0 > 2$ дифференцируемость функций $\Phi(t, \theta, \xi)$ и $Y(t, \theta, \xi)$ $s_0 - 1$ раз следует в силу соотношений (4.22) из ограниченности производных функций $\Psi^{(s)}(t, \theta, \xi)$ и $X^{(s)}(t, \theta, \xi)$. Ограниченность же последних до порядка s_0 включительно доказывается по индукции.

Зависимость l_0 и l_1, от s_0, о которой говорится в теореме, задается неявно системой неравенств (3.2). Из нее, в частности, следует, что для приведения системы (4.11) к виду (4.13) посредством 5 раз непрерывно дифференцируемой заменой (4.12) достаточно, чтобы R и F были 50, а $A(c)$ — 125 раз непрерывно дифференцируемыми (см. (3.3)).

Следует отметить, что система (3.2) определяет зависимость l_0 и l_1 от s_0 не однозначно. Придавая параметрам α и $\varkappa$ конкретные значения, можно выделить ту или иную конкретную зависимость l_0, l_1 от s_0. Так, в частности, если матрица $A(c)$ бесконечно дифференцируемая, то α можно взять достаточно большим, $\varkappa$ положить равным $\dfrac{2s_0+1}{s_0+3}$, а для $l_0 = l_0(s_0)$ получить зависимость

$$l_0 = \left[\frac{2(s_0+1)(2s_0+1)}{s_0-2}\right] + 1 \qquad (s_0 \geqslant 5), \tag{4.41}$$

в которой $[a]$ означает целую часть числа a.

Из (4.41) видно, например, что для приведения системы (4.11) к виду (4.13) в случае $A = \mathrm{const}$ посредством 4 раза непрерывно дифференцируемой заменой переменных (4.12) достаточно, чтобы правая часть системы (4.11) была 45 раз непрерывно дифференцируемая.

Выясним в заключение вопрос о почти периодичности по t замены (4.12) для случая, когда правая часть системы (4.11) почти периодична по t.

Докажем для этого следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 и, кроме того, существует последовательность вещественных чисел* $\{\tau_m\}$ *такая, что правые части системы* (4.11) *удовлетворяют равномерно в области* (4.4) *соотношениям*

$$\begin{aligned} &\| R(t+\tau_m, c, x) - R(t, c, x) \| \to 0, \\ &\| F(t+\tau_m, c, x) - F(t, c, x) \| \to 0. \end{aligned} \qquad m \to \infty \tag{4.42}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\| \Phi(t+\tau_m, \theta, \xi) - \Phi(t, \theta, \xi) \| \to 0, \\ &\| Y(t+\tau_m, \theta, \xi) - Y(t, \theta, \xi) \| \to 0 \end{aligned} \qquad m \to \infty \tag{4.43}$$

равномерно относительно t, θ, ξ *из области* (4.8), *где* $\Phi(t, \theta, \xi)$, $Y(t, \theta, \xi)$ — *функции* (4.12), *приводящие систему* (4.11) *к виду* (4.13).

Из теоремы 2 с учетом определения почти периодической функции следует, что если правая часть системы (4.11) почти периодична по t равномерно относительно c, x с частотным базисом $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\alpha, \ldots$, то и замена (4.12) почти периодична по t равномерно относительно θ, ξ с тем же частотным базисом. В частности, если правая часть (4.11) периодична (квазипериодична) по t, то и замена (4.12) периодична (квазипериодична) по t с той же частотой (тем же частотным базисом).

Перейдем к д о к а з а т е л ь с т в у теоремы 2. Для этого покажем, что если правая часть системы (1.3) удовлетворяет соотношениям (4.42), то замена (3.5), а также правая часть системы (3.9) удовлетворяет таким же соотношениям.

Действительно, согласно (3.16) и свойств сглаживающих операторов имеем

$$\| \Phi(t+\tau_m, \theta, \xi) - \Phi(t, \theta, \xi) \| = \Big\| \int\limits_0^\infty T^0 [R(t+\tau_m+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi) -$$

$$- R(t+z, \theta, e^{TA(\theta)z}\xi)]\, dz \Big\| \leqslant q_2 \| D_\xi T^0 [R(t+\tau_m, \theta, \xi) - R(t, \theta, \xi)] \|_0 \leqslant$$

$$\leqslant q_2 N_s \| R(t+\tau_m, \theta, \xi) - R(t, \theta, \xi) \|_0,$$

откуда следует

$$\| \Phi(t+\tau_m, \theta, \xi) - \Phi(t, \theta, \xi) \| \to 0, \qquad m \to \infty \tag{4.44}$$

равномерно относительно t, θ, ξ из области (3.6). Аналогично получаем

$$\| Y(t+\tau_m, \theta, \xi) - Y(t, \theta, \xi) \| \to 0, \qquad m \to \infty$$

$$\sum_{|\varrho|+|r|=1} \| D_\theta^\varrho D_\xi^r [\Phi(t+\tau_m, \theta, \xi) - \Phi(t, \theta, \xi)] \| + \| D_\theta^\varrho D_\xi^r [Y(t+\tau_m, \theta, \xi) - - Y(t, \theta, \xi)] \| \to 0 \tag{4.45}$$

равномерно относительно t, θ, ξ из (3.6).

Из соотношений (4.44), (4.45) с учетом (3.15) следует, что

$$\| R^{(1)}(t+\tau_m, \theta, \xi) - R^{(1)}(t, \theta, \xi) \| + \| F^{(1)}(t+\tau_m, \theta, \xi) - F^{(1)}(t, \theta, \xi) \| \to 0 \tag{4.46}$$

при $m \to \infty$ равномерно относительно t, θ, ξ из (3.6).

Замены (4.14), (4.16), а также правые части системы (4.15), (4.17) удовлетворяют, следовательно, соотношениям (4.42), (4.43) для $s = 1, 2, \ldots$, Согласно (4.22) можем утверждать теперь, что функции $\Psi^{(s)}(t, \theta, \xi)$, $X^{(s)}(t, \theta, \xi)$, а следовательно, и предельные функции $\Phi = \Psi^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$, $Y = X^{(\infty)}(t, \theta, \xi)$ удовлетворяют соотношениям (4.42). Последнее утверждение завершает доказательство теоремы 2.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. И. Арнольду и Д. В. Аносову за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
2. H. Poincaré, Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, Thése, Paris, 1879.

2′. O. Perron, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten den Integrale von Differentialgleichungssystemen, Math. Z., Bd. 29, 1928.

3. А. М. Ляпунов, Общая задача устойчивости движения, ОНТИ, Харьков, 1892.

3′. H. Dulac, Solutions d'un systéme d'equations differentielles dans le voisinage des valeurs Singuliéres, Bull. Soc. Math. France, t. 40, 1912.

4. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
5. Ю. А. Митропольский, Об исследовании интегрального многообразия для системы нелинейных уравнений с переменными коэффициентами, УМЖ, т. X, № 3, 1958.
6. Ю. А. Митропольский, Метод интегральных многообразий в теории нелинейных дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, К., 1963.
7. J. K. Hale, Integral manifold of perturbed differential systems, Ann. Math., Vol. 73, 1961.
8. S. P. Diliberto, Perturbation theorems for periodic surfaces — I. Definitions and main theorems, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, Vol. 9, 1960.
9. S. P. Diliberto, Perturbation theorems for periodic surfaces, II, Rend Circ. Mat. Palermo, Ser. 2, Vol. 10, 1961.
10. А. Н. Колмогоров, О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, ДАН СССР, т. 98, № 4, 1954.
11. В. И. Арнольд, Малые знаменатели, I, Об отображении окружности на себя, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 1, 1961.
12. В. И. Арнольд, Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, УМН, т. XVIII, № 5, 1963.
13. В. И. Арнольд, Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике, УМН, т. XVIII, № 6, 1963.
14. Н. Н. Боголюбов, О квазипериодических решениях в задачах нелинейной механики, Первая летняя матем. школа, ч. 1, изд-во «Наукова думка», К., 1964.
15. J. Moser, A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 47, 1961.
16. J. Moser, On invariant curves of area-preserving mappings of on annulus, Abh. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., № 1, 1962.
17. Э. Г. Белага, О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения, ДАН СССР, т. 143, № 2, 1962.

18. Ю. А. Митропольский, О построении общего решения нелинейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего «ускоренную» сходимость, УМЖ, т. XVI, № 4, 1964.
19. А. М. Самойленко, О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности гладкого тороидального многообразия, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 5, 1966.
20. J. Moser, On invariant surfaces and almost periodic solutions for ordinary differential equations, Not. Amer. Math. Soc., Vol. 12, Num 1, Part 1, № 79, 1965.
21. R. Sacker, A New Approach to the Perturbation Theory of Invariant Surfaces, Comm. Pure Appl. Math., Vol XVIII, Num. 4, 1965.
22. J. Kupka, Stabilité des variétés invariantes d'un champ de vecteurs pour les petites perturbations, Comp. Rend. Acad. Sci, Paris, t. 258, № 17, 1964.
23. M. G. Floquet, Sur les équations differentielles linéares a coefficients périodiques, Ann. Sci. École Norm., XII, 1883.
24. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
25. А. Е. Гельман, О приводимости одного класса систем дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. 116, № 4, 1957.
26. А. Е. Гельман, О приводимости систем с квазипериодической матрицей, Диф. уравн., т. 1, № 3, 1963.
27. И. Н. Блинов, Аналитическое представление решений системы линейных дифференциальных уравнений с почти периодическими коэффициентами, зависящими от параметра, Диф. уравн., т. 1. № 3, 1965.
28. Л. Я. Адрианова, О приводимости системы n линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами Вест. ЛГУ, № 7, 1962.
29. Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, О построении решений линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами с помощью метода ускоренной сходимости, УМЖ, т. XVII, № 6, 1965.
30. Ю. С. Богданов, Г. Н. Чеботарев, О матрицах, коммутирующих со своей производной, Изв. высш. уч. завед., Матем., № 4, 1959.

Поступила 15.II 1966 г.
Киев