О сильной разрешимости задачи Трикоми

Н. Г. Сорокина

В настоящей работе рассматривается граничная задача типа Трикоми для дифференциального выражения Чаплыгина. В основании работы лежит исследование обобщенных решений системы дифференциальных уравнений первого порядка, сопоставленной уравнению смешанного типа, методами, развитыми в работах К. Фридрихса [1, 2], П. Лакса и Р. Филлипса [3]. При этом для некоторых постановок граничных задач в [2, 3] доказывалось, что слабое решение системы существует, единственно и совпадает с сильным. Вопрос об обобщенной разрешимости для системы уравнений существенно связывался с ограничением на форму границы области в ее эллиптической части. В работах Ю. М. Березанского [4, 5], без такого ограничения, доказано существование слабого решения из $L_2(G)$ для краевой задачи типа Трикоми для уравнения смешанного типа, но его единственность и совпадение с сильным доказаны не были (из результатов [2, 3] это непосредственно не вытекает). В настоящей статье доказывается единственность слабого решения поставленной задачи и его совпадение с сильным. Используются методы работ [1, 2, 3] и оценки [5]. Далее, ставится задача на собственные значения для выражения Чаплыгина и граничных условий Трикоми и доказывается ее фредгольмовость. Последнее оказалось возможным благодаря неравенству $\|Lu\|_{L_2(G)} \geqslant c\|u\|_{W_2^1(G)}$. Отметим, что такое неравенство было получено В. П. Диденко [6, 7]. В другом плане обобщенная разрешимость задачи Трикоми исследовалась также Л. И. Коваленко [8, 9].

§ 1. Сильное решение задачи Трикоми

Рассмотрим уравнение

$$Lu = k(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, \qquad f \in L_2(G) \tag{1}$$

в области G с кусочно гладкой границей $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ (см. рис. 1). Функции u, f предполагаются вообще комплексными. Обозначим $h_1 = \min\limits_G y$, $h_2 = \max\limits_G y$. Функция $k(y)$ непрерывно дифференцируемая, причем

$$k(y)\, y \geqslant 0, \qquad k'(y) > 0 \qquad (h_1 < y < h_2). \tag{2}$$

В верхней полуплоскости выражение $L = k\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ гиперболично и γ_1, γ_2 его характеристики. Относительно нехарактеристического участка границы Γ_0 будем предполагать дважды непрерывную дифференцируемость и выполнение следующего условия вдоль кривой

$$\sqrt{k(h_2)}\,|dy| < |dx|. \tag{3}$$

Граничная задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения (1) в классе функций из соболевского пространства $W_2^2(G)$, принимающих следующие граничные значения

$$u\big|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0, \qquad u\big|_{\gamma_1} \sim \tag{4}$$

(«волна» означает, что граничное условие снято). Мы будем исследовать только обобщенную разрешимость задачи (1), (4). Отметим, что с условием (3) связан основной результат § 1 работы, заключенной в теореме 1. Его обобщение для произвольной формы границы в эллиптической области содержит теорема 2.

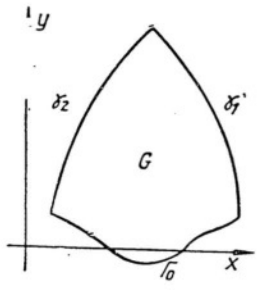

Рис. 1.

С задачей (1), (4) свяжем дифференциальный оператор Λ' (гр) в $L_2(G)$; Λ' (гр) действует на функции $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющие (4), так, что $\Lambda'(\text{гр})\, u = Lu$. Этот оператор допускает замыкание, которое обозначим Λ (гр) — т. н. сильный оператор задачи (см. [5], стр. 97). Функция u называется сильным решением (1), (4), если $u \in \mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр}))$ ($\mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр}))$—область определения Λ (гр)) и $\Lambda(\text{гр})\, u = f$. Как обычно, под существованием слабого решения (1), (4) будем понимать существование функции $u \in L_2(G)$ такой, что в смысле скалярного произведения в $L_2(G)$ $(u, L^+v) \equiv (u, Lv) = (f, v)$ для всех $v \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих сопряженным граничным условиям (L^+ — формально сопряженное к L дифференциальное выражение). Нетрудно убедиться, что сопряженные граничные условия будут иметь вид

$$v\big|_{\Gamma_0 \cup \gamma_1} = 0, \qquad v\big|_{\gamma_2} \sim . \tag{5}$$

Теорема 1. *Задача (1), (4) при любой $f \in L_2(G)$ имеет единственное сильное решение, принадлежащее пространству $W_2^1(G)$. Всякое слабое решение этой задачи является сильным.*

Заметим сразу, что единственность слабого решения (1), (4) и, значит, единственность сильного, следует из сильной разрешимости сопряженной граничной задачи $L^+ v \equiv Lv = g$ при любой правой части $g \in L_2(G)$. Легко видеть, что решение последней сводится к решению задачи вида (1), (4) заменой переменной $x' = -x$. Достаточно доказать, что задача (1), (4) имеет сильное решение при любой $f \in L_2(G)$.

Доказательство теоремы 1 достаточно провести в вещественных пространствах, так как задача (1), (4) для комплексных функций разделяется на две задачи

$$L(\operatorname{Re} u) = \operatorname{Re} f, \qquad L(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} f,$$

причем вещественные функции $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u$ удовлетворяют (4). Мы будем считать вещественными все используемые пространства.

В доказательстве применяются методы работ К. Фридрихса [2] и П. Лакса, Р. Филлипса [3]. Приведем кратко используемую при этом схему.

С задачей (1), (4) свяжем систему уравнений первого порядка:

$$\hat{L}\hat{u} = \hat{f}, \qquad \hat{f} \in \hat{L}_2(G) \tag{6}$$

$$\left(\hat{u} = (u_1, u_2), \qquad \hat{f} = (f_1, f_2), \qquad \|\hat{f}\| = \|\hat{f}\|_{\hat{L}_2(G)} = \int\limits_G (f_1^2 + f_2^2)\, dxdy\right),$$

полагая $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u_1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = u_2$. Матричное дифференциальное выражение $\hat{L}$ имеет вид

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}. \tag{7}$$

Система (6) соответствует уравнению (1), если $\hat{f} = (f_1, f_2) = (f, 0)$, так что $(\hat{L}\hat{u})_1 = k \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = f$, $(\hat{L}\hat{u})_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$.

Соответствующие граничные условия будут

$$(u_1 n_y - u_2 n_x)|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0, \qquad (u_1, u_2)|_{\gamma_1} \sim \ (u_1, u_2 \in W_2^1(G)) \tag{8}$$

($\hat{n} = (n_x, n_y)$ — внешняя нормаль к Γ).

Сильный оператор $\hat{\Lambda}$(гр) задачи (6), (8) вводится как замыкание в $\hat{L}_2(G)$ оператора $\hat{\Lambda}'$(гр), который определен как $\hat{\Lambda}'(\text{гр})\,\hat{u} = \hat{L}\hat{u}$ на функциях $\hat{u}$, удовлетворяющих (8) (это замыкание существует). Функция $\hat{u}$ является сильным решением (6), (8), если $\hat{u} \in \mathfrak{D}(\hat{\Lambda}(\text{гр}))$ и $\hat{\Lambda}(\text{гр})\,\hat{u} = \hat{f}$.

Лемма 1. *Задача* (6), (8) *имеет единственное сильное решение* $\hat{u}$ *для любой* $\hat{f} \in \hat{L}_2(G)$.

Доказательство. Утверждение леммы означает: существует последовательность функций, удовлетворяющих (8), $\hat{u}_n$ такая, что при $n \to \infty$ $\| \hat{u}_n - \hat{u} \| \to 0$, $\| \hat{L}\hat{u}_n - \hat{f} \| \to 0$.

Приведем подход К. Фридрихса к решению (6), (8). Рассмотрим систему общего вида в области $G \in R_m$ с кусочно гладкой границей Γ

$$Ku = 2\alpha^{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} u + \gamma u = f \qquad (\varrho = 1, \ldots, m;\ u = (u_1, \ldots, u_k),\ f = (f_1, \ldots, f_k))$$

(«уголок» над функциями в доказательстве леммы будем опускать, по ϱ производится суммирование). Здесь $\alpha^{\varrho} = \alpha^{\varrho}(x_1, \ldots, x_m)$ кусочно непрерывно дифференцируемые, $\gamma = \gamma(x_1, \ldots, x_m)$ кусочно непрерывная матрицы порядка k. Введем матрицу

$$\varkappa = \gamma - \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} \alpha^{\varrho}.$$

Если α^{ϱ} $(\varrho = 1, \ldots, m)$ симметричны и $\varkappa + \varkappa'$ положительно определенные, система называется положительно симметричной. Из соотношений

$$\begin{aligned} K &= \alpha^{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} + \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} \alpha^{\varrho} + \varkappa, \\ K^{+} &= -\alpha^{\varrho} \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial x_{\varrho}} \alpha^{\varrho} + \varkappa' \end{aligned} \qquad (K + K^{+} = \varkappa + \varkappa') \tag{9}$$

следует, что формально сопряженная система K^{+} тоже положительно симметрична.

На границе Γ области G введем матрицу $\beta = \alpha^{\varrho} n_{\varrho}$ $(n = (n_1, \ldots, n_m)$ — внешняя нормаль к Γ). Определим скалярное произведение $(.,.)$, как $(u, v) = \int_G (u_1 v_1 + \ldots + u_k v_k)\, dx$ $(dx = dx_1 \ldots dx_m)$; положим $u_1 v_1 + \ldots + u_k v_k = \langle u, v \rangle$. Применим к K формулу Грина

$$(Ku, v) = (u, K^{+} v) + 2 \int_{\Gamma} \langle u, \beta v \rangle\, ds. \tag{10}$$

Она имеет место на функциях, компоненты которых суммируемы с квадратом вместе с первыми производными. Пространство таких функций обозначим H_1. Обозначим H_1(гр) подпространство H_1 (содержащее финитные функции). Условие $u \in H_1$(гр) примем в качестве граничного. Множество $v \in H_1$, для которых почти везде на границе области $\langle u, \beta v\rangle \equiv \langle \beta u, v\rangle = 0$ при любой $u \in H_1$(гр), обозначим H_1^+(гр); H_1^+(гр) — подпространство, задающее сопряженные граничные условия. Если граничная задача поставлена таким образом, что почти везде

$$\langle u, \beta u\rangle|_\Gamma \geqslant 0, \qquad u \in H_1(\text{гр}), \tag{11}$$

$$\langle v, -\beta v\rangle|_\Gamma \geqslant 0, \qquad v \in H_1^+(\text{гр}), \tag{12}$$

(матрица $-\beta$ соответствует β, вычисленной для K^+) и задача положительно симметрична, из (9) и (10) имеем

$$(Ku, u) = (u, K^+u) + 2\int_\Gamma \langle u, \beta u\rangle\, ds,$$

$$2(Ku, u) = (u, (\varkappa + \varkappa')\, u) + 2\int_\Gamma \langle u, \beta u\rangle\, ds \geqslant c_1 \| u \|^2,$$

$$\| Ku \| \geqslant c \| u \|, \qquad u \in H_1(\text{гр}). \tag{13}$$

Аналогично получим

$$\| K^+ v \| \geqslant c \| v \|, \qquad v \in H_1^+(\text{гр}). \tag{14}$$

Из неравенства (14) следует, что задача $Ku = f, f \in L_2(G)$, $u \in H_1$(гр), имеет слабое решение. Это означает — для любой $f \in L_2(G)$ существует функция $u \in L_2(G)$ такая, что $(u, K^+v) = (f, v)$, $v \in H_1^+$(гр). Из (13) следует, что сильное решение этой задачи единственно.

Вернемся к задаче (6), (8). Преобразуем дифференциальное выражение (7) в положительно симметричное. Для этого используем матрицу

$$Z = 2\begin{pmatrix} b & ck \\ c & b \end{pmatrix}$$

и заменим оператор $\hat{L}$ оператором

$$K = ZL = 2\begin{pmatrix} bk & ck \\ ck & b \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} - 2\begin{pmatrix} ck & b \\ b & c \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Положим $b = 1 - 2\sigma x$, $c = \dfrac{b}{l} - \sigma(y - x)$, число $l = (1 + \varepsilon)\sqrt{k(h_2)}$, числа $\varepsilon, \sigma > 0$. Числа ε, σ выбираются ниже. Пусть сначала $\varepsilon = \varepsilon_0$ зафиксировано. Покажем, что если σ достаточно мало, Z невырождена, т. е. $b^2 - c^2k > 0$ в G. Ясно, что уменьшая σ, для сколь угодно малого $\delta > 0$ можно получить $b > 1 - \delta$, $0 < c < \dfrac{1}{l} + \delta$, так что $b^2 - c^2k > (1-\delta)^2 - \left(\dfrac{1}{l} + \delta\right)^2 k \geqslant (1-\delta)^2 - \left(\dfrac{1}{l} + \delta\right)^2 k(h_2) > 0\ (y > 0)$, если задать δ достаточно малым. Убедимся, что при достаточно малом σ матрица $\varkappa + \varkappa' = 2\varkappa$ положительно определенна:

$$\varkappa = \begin{pmatrix} ck' + \sigma k & -\sigma\left(1 - \dfrac{2}{l}\right)k \\ -\sigma\left(1 - \dfrac{2}{l}\right)k & \sigma \end{pmatrix}.$$

Действительно $\varkappa_{11} = ck' + \sigma k > 0$, если σ достаточно мало; $\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \varkappa_{12}\varkappa_{21} = (ck' + \sigma k)\sigma - \sigma^2 \left(1 - \frac{2}{l}\right)^2 k^2 > 0$ при малом σ.

Проверим выполнение (11), (12); подпространство H_1(гр) задается условиями (8). Нетрудно подсчитать, что H_1^+(гр) задается условиями

$$(bv_1 + cv_2)|_{\Gamma_0} = 0, \qquad (v_1 n_y - v_2 n_x)|_{\gamma_1} = 0, \qquad (v_1, v_2)|_{\gamma_2} \sim. \tag{15}$$

Имеем

$$\langle w, \beta w\rangle = (bn_x + cn_y)^{-1} \{(b^2 - c^2 k)(n_y w_1 - n_x w_2)^2 - (n_y^2 - n_x^2 k)(bw_1 + cw_2)^2\}. \tag{16}$$

При σ достаточно малом $b, c > 0$. На Γ_0 в силу (3) $n_y^2 - n_x^2 k > 0$. Ясно, что для $w = u \in H_1$(гр) почти везде $\langle u, \beta u\rangle|_{\Gamma_0} \geqslant 0$, если $bn_x + cn_y < 0$. При этом же условии почти везде $\langle v, -\beta v\rangle|_{\Gamma_0} \geqslant 0$, $v \in H_1^+$(гр). Подсчитаем на Γ_0 выражение $bn_x + cn_y = b\left(n_x + \frac{n_y}{l}\right) - \sigma n_y (y - x)$. Сдвигая начало координат влево по оси $\vec{ox}$, добъемся: $n_y (y - x) > 0$. Из (3) следует, что при ε достаточно малом $n_x + \frac{n_y}{l} < 0$ $(l = (1 + \varepsilon)\sqrt{k(h_2)})$. Такое значение ε примем за ε_0. Таким образом на Γ_0 получим $bn_x + cn_y < 0$.

Проверка (11), (12) на γ_1, γ_2 получается простой подстановкой в (16) условия $n_y^2 + n_x^2 k = 0$ и граничного условия, если учесть, что на γ_1 $n_y = n_x \sqrt{k}$, $bn_x + cn_y > 0$, на γ_2 $n_y = -n_x \sqrt{k}$, $bn_x + cn_y < 0$.

Отсюда следует, что для задачи (6), (8) имеют место неравенства (13), (14) и, тем самым, существование слабого решения u для уравнения вида $Ku = f$ при любой $f \in L_2(G)$, удовлетворяющего в слабом смысле граничным условиям, и единственность сильного.

Покажем, что найденное слабое решение является сильным*. Доказательство проведем методом работы П. Лакса и Р. Филлипса [3]. Ясно, что для доказательства достаточно построить последовательность функций $u_\varepsilon \in H_1$(гр) такую, что $\|u_\varepsilon - u\| \to 0$, $\|Ku_\varepsilon - f\| \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$.

Как и в [3] (см. теорема 1), доказательство можно локализовать: если u слабое решение $Ku = f$, $\sum_{i=1}^{k} \varphi_i = 1$ разложение единицы для G, то $u_i = \varphi_i u$ $(i = 1, \ldots, k)$ является слабым решением $Ku = f_i \in L_2(G)$, где $f_i = \varphi_i f + 2\alpha^\varrho \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varrho} u$ $(\varrho = 1, 2)$. Разложение единицы возьмем для следующего разбиения G на подобласти $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, где G_1, G_2 и G_3 — такие как на рис. 2. Все подобласти G_i, примыкающие к гладким участкам Γ_i границы Γ, достаточно малы так, чтобы можно было невырожденно отобразить их в полосу $(0 < y' \leqslant 1, \ -\infty < x' < \infty)$, причем участок Γ_i переходил бы в $y' = 1$. Подобласть G_1, примыкающая к S_1, отображается в полуполосу $(0 < y' \leqslant 1, \ -\infty < x' \leqslant 0)$ так, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_0$ переходит в $y' = 1$, $\Gamma_1 \cap \gamma_2$ в $x' = 0$. Подобласть G_2 отображается в $(0 < y' \leqslant 1, \ 0 \leqslant x' < \infty)$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_0$ в $y' = 1$, $\Gamma_2 \cap \gamma_1$ в $x' = 0$; G_3 отображается в $(-\infty < y' \leqslant 0, \ 0 \leqslant x' < \infty)$, $\Gamma_3 \cap \gamma_2$ в $x' = 0$, $\Gamma_3 \cap \gamma_1$ в $y' = 0$. Функции u_i, сосредоточенные на внут-

---

* В силу проведенных построений, утверждение леммы 1 можно было бы получить переформулировкой теоремы 3.2 [3], справедливой для кусочно гладкой границы с углами такого типа, как в настоящей задаче. Мы приводим другую схему доказательства, которую будет удобно применить снова в доказательстве теоремы 1.

ренних подобластях G_i и на подобластях, примыкающих к нехарактеристическим участкам границы, являются сильными решениями, соответственно, уравнений $Ku = f_i$, что непосредственно усматривается из доказательства теоремы 1 [3].

Опишем подробнее построение соответствующих приближающих последовательностей. Пусть $j(x, y) \geqslant 0$ бесконечно дифференцируемая функция, финитная в круге $x^2 + y^2 < 1$ и такая, что $\int j(x, y)\, dx dy = 1$. Для $\varepsilon > 0$ положим $j_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2} j\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$. В качестве приближающих последовательностей для внутренних подобластей достаточно взять усреднения

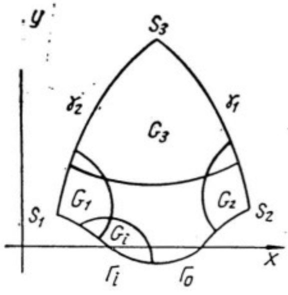

Рис. 2.

$$u_{i,\varepsilon} = I_\varepsilon u_i = \int j_\varepsilon(x - x', y - y')\, u_i(x', y')\, dx' dy'.$$

Пусть также $j(x) \geqslant 0$ бесконечно дифференцируемая и финитная на интервале $|x| < 1$. Положим $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Для подобластей, примыкающих к нехарактеристическим участкам Γ_j границы, после вышеуказанного локального отображения задача приводится к виду $K\widetilde{u} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y'} + M\left(x', y', \frac{\partial}{\partial x'}\right)\widetilde{u} = \widetilde{f}, \widetilde{u}_1|_{y'=1} = 0$ (вводятся новые неизвестные функции). После этого приближающие последовательности строятся как усреднения по касательной переменной x':

$$\widetilde{u}_{j,\varepsilon} = I_\varepsilon^t \widetilde{u}_j = \int j_\varepsilon(x' - x'')\, \widetilde{u}_j(x'', y')\, dx''.$$

Точки S_1, S_2 являются вершинами углов типа, рассмотренного в [3], § 4. Именно, они относятся к тем случаям, когда на одной стороне угла $(y' = 1)$ β имеет постоянный и полный ранг, а на другой либо сопряженные граничные условия сняты (случай $A_n = -2\beta \geqslant 0$ в [3]), либо сняты основные (случай $A_n = -2\beta \leqslant 0$ в [3]). Это означает, что слабые решения u_i задач $Ku = f_i$ $(i = 1, 2)$ тоже являются сильными.

В области G_3 после отображения поступим следующим образом. Так как на γ_2 сопряженные граничные условия сняты, мы можем продолжить задачу в полуплоскость $(y' \leqslant 0,\ -\infty < x' < \infty)$, полагая $\alpha^\varrho(x', y') = \alpha^\varrho(0, y')$ $(\varrho = 1, 2)$, $f_3(x', y') = 0$, $u_3(x', y') = 0$, при $x' < 0$. (Мы сохранили обозначения после отображения). Так как на γ_1 основные граничные условия сняты, в качестве приближающих функций можно взять усреднения по обеим переменным x', y' по формуле

$$u_{3,\varepsilon} = I'_\varepsilon u_3 = \int j'_\varepsilon(x' - x'', y' - y'')\, u_3(x'', y'')\, dx'' dy''.$$

В качестве ядра усреднения следует взять функцию вида

$$j'_\varepsilon(x, y) = \frac{1}{\varepsilon^2} j\left(\frac{x - 2\varepsilon}{\varepsilon}, \frac{y - 2\varepsilon}{\varepsilon}\right).$$

Легко проверить, что функции $u_{3,\varepsilon}(x', y') = 0$ при $x' < \varepsilon$ и, тем самым, на γ_2 удовлетворяют граничным условиям. Сдвиг по y в ядре $j(x, y)$ играет следующую роль: $j'_\varepsilon(x' - x'', y' - y'')$, рассматриваемая как функция x'', y'' при фиксированном $y' \leqslant 0$, финитна в полуплоскости $-\infty < y'' \leqslant 0$. Благодаря этому интеграл в определении $u_{3,\varepsilon}$ в действительности распространяется только на те значения x'', y'', где функция u_3 определена. После этого мы можем рассуждать так же, как и в случае внутренних подобластей [1, 3]. При этом все построения [1] можно производить для функций, определенных в полуплоскости $y' < 0$, и иметь в виду, что $Ku_3 = f_3$ в смысле функционалов на функциях, финитных в этой полуплоскости, а также тот факт, что оператор $I_\varepsilon''^*$ с ядром $\frac{1}{\varepsilon^2} j\left(-\frac{x+2\varepsilon}{\varepsilon}, -\frac{y+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$ переводит множество таких функций в себя (см. также сноску на стр. 74). Ясно, что при $\varepsilon \to 0$ носитель функции $u_{3,\varepsilon}$ стремится к носителю усредняемой функции так, что $u_{3,\varepsilon}$ как функция x, y удовлетворяет граничным условиям на всей Γ.

Легко видеть что искомой последовательностью u_ε будет $u_\varepsilon = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i u_{i,\varepsilon}$.

Мы доказали, что задача (8) для уравнения $Ku = f$ имеет единственное сильное решение. В силу невырожденности Z, этот факт справедлив для задачи (6), (8).

Отметим, что (как устанавливается в [3]) локальные приближающие функции $u_{j,\varepsilon}$ ($j \neq 3$) можно взять такими, что сами функции $u_{j,\varepsilon}$ непрерывны и принимают граничные значения в каждой точке. То же можно утверждать для области G_3, т. к. приближения в G_3 строятся гладким усреднением по обеим переменным и, значит, непрерывно дифференцируемы. Из вида локальных приближающих функций нетрудно усмотреть, что приближающие последовательности на самом деле можно взять непрерывно дифференцируемыми во всей области G (вообще отличными от построенных в лемме). Лемма 1 доказана.

Следствие. *Задача* (1), (4) *имеет слабое решение из пространства* $W_2^1(G)$ *для любой* $f \in L_2(G)$.

Докажем следствие. Пусть $\hat{u} = (u_1, u_2)$ сильное решение (6), (8) ($\hat{f} = (f, 0)$) и, следовательно, сильное решение уравнения $\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0$. Пусть $\hat{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n})$ соответствующая приближающая последовательность, причем функции $u_{1,n}$, $u_{2,n}$ непрерывно дифференцируемы. Запишем G в виде $y_-(x) < y < y_+(x)$ и положим $\psi_n(x, y) = \int\limits_{y_-(x)}^{y} u_{2,n}(x, y')\, dy'$. Последовательность ψ_n имеет сильный предел ψ. Легко убедиться, что φ имеет сильные производные $\frac{\partial\psi}{\partial x} = u_1$, $\frac{\partial\psi}{\partial y} = u_2$ и обращается в нуль на $\Gamma_0 \cup \gamma_2$ (в среднем). Покажем, что ψ слабое решение (1), (4). Ясно, что ψ слабое решение (6), (8):

для всех $\hat{v}$, удовлетворяющих условиям

$$v_1|_{\Gamma_0} = 0, \qquad (v_1 n_y - v_2 n_x)|_{\gamma_1} = 0, \qquad (v_1, v_2)|_{\gamma_2} \sim. \tag{17}$$

(Условия (17) можно получить из (15), положив $b = 1$, $c = 0$, т. к. при вычислении (15) используется только невырожденность матрицы Z). Пусть $v \in W_2^2(G)$ удовлетворяет (5). Подсчитаем

$$(\psi, L^+v) = \left(\psi, k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = -\left(u_1, k\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(u_2, \frac{\partial v}{\partial y}\right) -$$

$$-\int\limits_{\Gamma} \varphi\left(k\frac{\partial v}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx\right) = -\left(u_1, k\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) - \left(u_2, \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(u_1, \frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(u_2, \frac{\partial w}{\partial x}\right)-\int_\Gamma \ldots=(f, v)-\left(u_1, \frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$

$$+\left(u_2, \frac{\partial w}{\partial x}\right)-\int_\Gamma \ldots=(f, v). \tag{18}$$

Здесь w — произвольная финитная в G бесконечно дифференцируемая функция, так что пара $\hat{v}=(v_1, v_2)=(v, w)$ удовлетворяет (17). Поясним последнее равенство в (18). Имеем

$$-\left(u_1, \frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(u_2, \frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x}\right)=$$

$$=\left(\psi, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)-\left(\psi, \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right)=0.$$

В свою очередь $\int\limits_\Gamma \psi\left(k \frac{\partial v}{\partial x} \partial y+\frac{\partial v}{\partial y} \partial x\right)=\int\limits_{\gamma_1} \psi\left(k \frac{\partial v}{\partial x} \partial y+\frac{\partial v}{\partial y} \partial x\right)=$ $=-\int\limits_{\gamma_1} \psi\left(\frac{\partial v}{\partial x} n_y-\frac{\partial v}{\partial y} n_x\right) \frac{dx}{n_x}=0$, т. к. $v|_{\gamma_1}=0$. Следствие доказано.

Мы покажем теперь, что функция ψ, построенная в следствии, является сильным решением (1), (4), чем теорема 1 будет доказана.

Метод доказательства тот же, что и в лемме 1. Мы проведем его здесь подробно. Пусть разбиение $G=\bigcup\limits_{i=1}^k G_i$ и разложение $1=\sum\limits_{i=1}^k \varphi_i$ те же, что и в лемме 1. Функции $u_i=\varphi_i \psi$ являются слабыми решениями уравнений $Lu=f_i \equiv \varphi_i f+\psi L \varphi_i+2k \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}-2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \in L_2(G)$ $(i=1, \ldots, k)$. Достаточно показать, что они являются сильными решениями. Мы будем использовать классические леммы, приведенные в [3]. Ниже это леммы 2 и 3. Пусть $L_1=\sum\limits_{j=1,2} a_j D_j+b\left(D_1=\frac{\partial}{\partial x},\ D_2=\frac{\partial}{\partial y}\right)$ дифференциальное выражение первого порядка, причем функции a_1, a_2 кусочно непрерывно дифференцируемы, b кусочно непрерывна.

Лемма 2. (Лемма К. Фридрихса). *Операторы* $\{L_1 I_\varepsilon-I_\varepsilon L_1\}$ (*рассматриваемые при различных значениях* ε) *преобразуют* $L_2(R_2)$ *в* $L_2(R_2)$ *и равномерно ограничены по норме. Для любой* $u \in L_2(R_2)$ $\|\{L_1 I_\varepsilon-I_\varepsilon L_1\} u\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Пусть $L_2=\sum\limits_{j,k=1,2} a_{jk} D_j D_k+\sum\limits_{j=1,2} a_j D_j+b$ дифференциальное выражение второго порядка с кусочно непрерывно дифференцируемыми коэффициентами a_{jk}, a_j $(j=1,2)$ и кусочно непрерывным b. Из леммы 2 вытекает простое

Следствие. *Операторы* $\{L_2 I_\varepsilon-I_\varepsilon L_2\}$ *преобразуют* $W_2^1(R_2)$ *в* $W_2^1(R_2)$ *и равномерно ограничены по норме. Для любой* $u \in W_2^1(R_2)$ $\|\{L_2 I_\varepsilon-I_\varepsilon L_2\} u\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство следует из леммы 2 и того факта, что оператор I_ε коммутирует с оператором чистого дифференцирования.

Введем также операторы M_1 и M_2 вида L_1 и L_2, но такие, что они содержат только дифференцирование по переменной x. Мы будем рассматривать M_1, M_2 и оператор I_ε^t усреднения по переменной x в полосе Π $(0 \leqslant y \leqslant 1,\ -\infty<x<\infty)$.

Лемма 3. *Операторы* $\{M_1 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_1\}$ *преобразуют* $L^1_2(\Pi)$ *в* $L^1_2(\Pi)$ *и равномерно ограничены по норме. Для любой* $u \in L^1_2(\Pi)$ $\| \{M_1 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_1\} u \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Следствие. *Операторы* $\{M_2 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_2\}$ *преобразуют* $W^1_2(\Pi)$ *в* $W^1_2(\Pi)$ *и равномерно ограничены по норме. Для любой* $u \in W^1_2(\Pi)$ $\| \{M_2 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_2\} u \| \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Вернемся к доказательству теоремы. На внутренних областях G_i в качестве необходимых приближающих последовательностей снова возьмем усреднения $u_{i,\varepsilon} = I_\varepsilon u_i = \int j_\varepsilon (x - x' \; y - y')\, u_i(x', y')\, dx' dy'$. Тот факт, что $\| L u_{i,\varepsilon} - f \| \to 0$ вместе с $\| u_{i,\varepsilon} - u \|$ при $\varepsilon \to 0$ вытекает из следствия леммы 2. Ясно, что $u_{i,\varepsilon}$ при достаточно малых ε финитны в G вместе с u_i.

Для областей, примыкающих к границе, произведем распрямления, как указано в лемме 1. Вблизи нехарактеристических участков границы после распрямлений в достаточно малых областях задачу $Lu = f_i$ всякий раз можно привести к виду $Lu = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + M_1 \dfrac{\partial u}{\partial y'} + M_2 u = f$. При этом M_1, M_2, такие, как в лемме 3 и следствии из нее. (Мы будем сохранять обозначения L, u, f здесь и ниже вблизи точек S_1, S_2, S_3 после преобразования координат и самого уравнения). Покажем, что всякое слабое решение этой задачи из $W^1_2(\Pi)$ (равное нулю при $y' = 1$), сосредоточенное в ограниченной области $G' \subset \Pi$ и финитное вблизи оси $\vec{ox}$, является сильным. Достаточно показать, что $u_\varepsilon = I^t_\varepsilon u = \int j_\varepsilon (x' - x'')\, u(x'', y')\, dx''$ является последовательностью из $W^2_2(\Pi)$, удовлетворяющей граничному условию, и при этом $\| L u_\varepsilon - f \| \to 0$ вместе с $\| u_\varepsilon - u \|$ при $\varepsilon \to 0$. (Последняя сходимость имеет место как следствие леммы 3 при $L_1 = 1$). Учитывая, что оператор I^t_ε коммутирует с $\dfrac{\partial}{\partial y'}$, $\dfrac{\partial^2}{\partial y'^2}$, получим

$$L I^t_\varepsilon u = I^t_\varepsilon L u + \{M_1 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_1\} \frac{\partial u}{\partial y'} + \{M_2 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_2\} u =$$

$$= I^t_\varepsilon f + \{M_1 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_1\} \frac{\partial u}{\partial y'} + \{M_2 I^t_\varepsilon - I^t_\varepsilon M_2\} u. \tag{19}$$

Равенства (19) следует понимать в смысле функционалов на финитных бесконечно дифференцируемых функциях из полосы Π (в этом смысле $Lu = f$). В силу леммы 3 и следствия из нее правая часть второго равенства принадлежит $L_2(\Pi)$. Это означает, что функция $L I^t_\varepsilon u \in L_2(\Pi)$. Из (19), применив лемму 3 и следствие из нее, заключаем $\| L u_\varepsilon - f \| \to 0$, $\varepsilon \to 0$, что и требовалось. Осталось показать, что u_ε имеет вторые производные (первые она имеет вместе с u) Производная $\dfrac{\partial^2}{\partial x'^2} u_\varepsilon$ существует в силу свойства оператора усреднения I^t_ε. Аналогично получим существование $\dfrac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} u_\varepsilon = \dfrac{\partial}{\partial x} I^t_\varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial y'}$, так как функция $\dfrac{\partial u}{\partial y'} \in L_2(\Pi)$. Имеем $\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial y'^2} = L u_\varepsilon - M_1 \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial y'} - M_2 u_\varepsilon \in L_2(\Pi)$ в силу уже доказанного. (Все вторые производные суммируемы с квадратом.) Так как $u|_{y'=1} = 0$, это имеет место и для u_ε.

Обратимся к подобластям, примыкающим к углам на границе. После отображения окрестности точки S_1 на полуполосу замечаем, что так как на оси $x' = 0$ сопряженные граничные условия сняты, задачу можно продолжить в полосу. После этого она сводится к вышерассмотренной. Достаточно положить, сохраняя кусочную гладкость коэффициентов $L = \sum_{j,k=1,2} a_{jk}D_jD_k + \sum_{j=1,2} a_jD_j + b$, $a_{jk}(x', y') = a_{jk}(0, y')$, $a_j(x', y') = a_j(0, y')$, $b(x', y') = b(0, y')$ при $x' > 0$. При этом правая часть f и слабое решение u задачи вида $Lu = f$ продолжаются нулем на $x' > 0$. Далее рассуждаем как выше, но только в качестве ядра усреднения следует взять функцию $j'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} j\left(\frac{x+2\varepsilon}{\varepsilon}\right)$. Благодаря этому функции $u_\varepsilon = 0$ при $x' > -\varepsilon$ и на $x' = 0$, тем самым, удовлетворяют граничным условиям.

После отображения окрестности точки S_2 на полуполосу локальную задачу тоже можно исследовать так, как в случае, когда окрестность примыкает к гладкому куску границы. Достаточно в качестве ядра усреднения взять снова функцию $j'_\varepsilon(x)$. Легко проверить, что функция $j'_\varepsilon\ (x' - x'')$, рассматриваемая как функция от x'' при фиксированном $x' \geqslant 0$ обращается в нуль при $x'' < \varepsilon$. Поэтому интеграл $I^t_\varepsilon u = u_\varepsilon = \int j'_\varepsilon\,(x' - x'')\,u\,(x'', y')\,dx''$, вычисленный в точках $x' \geqslant 0$, в действительности зависит только от значений u в полуполосе. Повторяя рассуждения, относящиеся к равенствам (19), будем понимать их в смысле функционалов над финитными в полуполосе функциями*. Удовлетворение граничным условиям на $x' = 0$ от функций u_ε теперь не требуется (они сняты).

После отображения окрестности точки S_3 на квадрант $(-\infty < y' \leqslant 0,\ 0 \leqslant x' < \infty)$ сначала поступим так, как в окрестности точки S' (на $x' = 0$ сопряженные граничные условия сняты), продолжим задачу в полуплоскость. В качестве необходимой приближающей последовательности достаточно теперь взять усреднения по обеим переменным x', y' с ядром $j'_\varepsilon\,(x, y)$ (из леммы 1)

$$u_\varepsilon = I'_\varepsilon u = \int j'_\varepsilon(x' - x'', y' - y'')\,u\,(x'', y'')\,dx''dy''.$$

Так как функции $u_\varepsilon = 0$ при $x' < \varepsilon$, они на $x' = 0$ удовлетворяют граничным условиям. Функция $j'_\varepsilon\,(x' - x'', y' - y'')$, рассматриваемая как функция от x'', y'' при фиксированном $y' \leqslant 0$ финитна в полуплоскости $-\infty < y'' \leqslant 0$. Поэтому интеграл в действительности распространяется на полуплоскость. Далее можно рассуждать так же, как в случае внутренних подобластей. При этом имеется в виду, что $Lu = f$ в смысле функционалов над функциями, финитными в полупространстве $y' < 0$. Теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Из неравенства (13) легко следует неравенство для дифференциального выражения* L

$$\|Lu\| \geqslant c\,\|u\|_{W^1_2(G)} \qquad (u \in W^2_2(G),\ u|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0). \tag{20}$$

В самом деле, пара $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ удовлетворяет (8) и ее можно подставить в (13). (20) следует из неравенства $\|K\hat{u}\| = \|(b^2 + c^2)\,Lu\| \geqslant c\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|\right)$ $(b, c > \delta > 0$ в $C)$ и того, что $u = 0$ на куске границы. Из неравенства (20) заключаем, что приближающая последовательность для сильного решения (1), (4) на самом деле сходится в $W^1_2(G)$.

Мы покажем, теперь, что если функция $k(y)$ удовлетворяет некоторому дополнительному условию, то теорема 1 имеет место в области, имеющей произвольную форму границы в своей эллиптической части. Нижесформу-

---

* В указанном смысле $(I^t_\varepsilon Lu, \varphi) = (u, L^+(I^{t*}_\varepsilon \varphi)) = (f, I^{t*}_\varepsilon \varphi) = (I^t_\varepsilon f, \varphi)$, так как $I^{t*}_\varepsilon \varphi$, легко проверить, финитна в той же полуполосе, что и φ.

лированное утверждение основано на результате Ю. М. Березанского [4, 5]. Мы будем предполагать в соответствии с [5, гл. IV], что $k(y)$ удовлетворяет так называемому условию Франкля

$$2\left(\frac{k(y)}{k'(y)}\right)' + 1 \geqslant \delta > 0, \qquad 0 < y \leqslant h_2. \tag{21}$$

Теорема 2. *Пусть нехарактеристическая часть Γ_0 границы Γ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет условию (3) только на кусках, заключенных в полосе $-h \leqslant y < h_2$ ($h > 0$ фиксированное сколь угодно малое число). В остальном Γ_0 имеет произвольную форму. Если для $k(y)$ имеет место (21), то справедлива теорема 1.*

Для доказательства рассмотрим полосу $\pi(h < h' < y < h'' < 0)$. Построим разложение единицы для области G, $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ такое, чтобы $\varphi_1 = 0$ при $y \leqslant h'$, $\varphi_2 = 0$ при $y \geqslant h''$. Как следует из теоремы (3.1) главы IV в [5] в условиях настоящей теоремы задача (1), (4) имеет слабое решение u при любом правой части $f \in L_2(G)$. Положим $u_1 = \varphi_1 u$, $u_2 = \varphi_2 u$. Из теории эллиптических уравнений следует, что функция u имеет в области $G \cap (y > 0)$ сильные первые и вторые производные, суммируемые с квадратом, и обращается в нуль на $\Gamma_0 \cap (y > 0)$ (см. [5], гл. III, теорема 4.6). Отсюда можно заключить, что функции u_i являются слабыми решениями в области G соответственно уравнений

$$Lu = f_i \in L_2(G), \text{ где } f_i = \varphi_i f + (L\varphi_i)\,u + 2k\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} - 2\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (i = 1, 2).$$

При этом ясно сразу, что u_2 является и сильным решением. Нетрудно видеть, что u_1 является слабым решением задачи вида (1), (4) в некоторой области $G' \subset G$, лежащей в полосе $h' \leqslant y \leqslant h_2$, нехарактеристическая часть Γ_0' границы которой удовлетворяет условию (3). В силу теоремы 1, u_1 в области G' является и сильным решением. Пусть u_ε соответствующая приближающая последовательность функций, определенных в области G'. Эту последовательность мы возьмем такой, какая строится в доказательстве теоремы 1.

Так как вблизи Γ_0' u_ε строятся как усреднения по касательным переменным, то u_ε обращаются тождественно в нуль в полоске вблизи Γ_0' вместе с функцией u_1. Поэтому u_ε можно доопределить нулем во всей области G. Отсюда следует, что u_1, рассматриваемая уже в области G, является сильным решением задачи $Lu = f_1$. Легко видеть, что вместе с u_1 и u_2 функция $u = u_1 + u_2$ тоже является сильным решением (1), (4), по построению из $W_2^1(G)$. Теорема доказана.

Как показано в [5], условие Франкля для $k(y)$ можно заменить менее ограничительным. Более того, вид дифференциального выражения в эллиптической части области в [5] предполагался весьма произвольным. На этих обобщениях мы останавливаться не будем.

Замечание 2. *При выполнении условия Франкля в условиях теоремы 2 имеют место неравенства*

$$\| Lu \| \geqslant c \| u \|_{W_2^1(G)} \qquad (u \in W_2^2(G),\ u|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0), \tag{22}$$

$$\| Lv \| \geqslant c \| v \|_{W_2^1(G)} \qquad (v \in W_2^2(G),\ v|_{\Gamma_0 \cup \gamma_1} = 0). \tag{22'}$$

Доказательство основано на использовании неравенства, полученного Ю. М. Березанским [5] и (20). Пусть $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ разложение единицы, построенное в теореме 2. Обозначим $|u|_1^2 = \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|^2$. Так как $\varphi_2 u$ сосредоточена в эллиптической части области и вместе с функцией u

удовлетворяет граничным условиям, имеет место неравенство $\| L\varphi_2 u \| \geqslant c_2 | \varphi_2 u |_1$. Функция $\varphi_1 u$ удовлетворяет граничным условиям (4) в некоторой области $G' \subset G$, подчиненной условиям выполнения (20). В силу (20) $\| L\varphi_1 u \| \geqslant c_1 | \varphi_1 u |_1$. Имеем $\| L\varphi_2 u \| + \| L\varphi_1 u \| \geqslant c_3 (| \varphi_1 u |_1 + | \varphi_2 u |_1) \geqslant c_3 | \varphi_1 u + \varphi_2 u |_1 = c_3 | u |_1$. Покажем теперь, что $\| L\varphi_j u \| \leqslant c_4 \| Lu \|$ $(j = 1, 2)$. Воспользуемся следующим неравенством из [5], которое справедливо в условиях теоремы 2

$$c \| Lu \|^2 \geqslant \| u \|^2 + \int\limits_{G \cap (y<0)} \left(-k \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dxdy + $$

$$+ \int\limits_{G \cap (y>0)} \left| \sqrt{k} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 dxdy \tag{23}$$

на гладких функциях, удовлетворяющих (4). Отсюда следует неравенство

$$c \| Lu \|^2 \geqslant \| u \|^2 + c_5 \int\limits_{G \cap \pi} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^2 \right) dxdy. \tag{24}$$

Пользуясь (24), оценим $\| L\varphi_j u \|^2 \leqslant c_6 (\| u \|^2 + | u |^2_{1, \pi \cap G} + \| Lu \|^2) \leqslant C \| Lu \|^2$. Отсюда и из (23) следует (22). Неравенство (22′) получится так же, как и (22), после замены $x' = -x$.

Теорема 3. *Задача* (1), (4) *обобщенно разрешима при любой правой части* $f \in W_2^1(G)$.

Утверждение теоремы является следствием неравенства (22′).

§ 2. Задача на собственные значения

Мы будем исследовать обобщенную разрешимость задачи

$$Lu - \lambda u = f, \ f \in L_2(G), \tag{25}$$

где u удовлетворяет (4), λ комплексный параметр. Все утверждения настоящего параграфа справедливы в условиях теоремы 1 или теоремы 2.

Пусть $\Lambda(\text{гр})$ сильный оператор задачи (1), (4). Обозначим $\Lambda^+(\text{гр})^+$ сильный оператор сопряженной задачи. Оператор $\Lambda(\text{гр})$, в силу теорем 1 (2) § 1, имеет непрерывный обратный $\Lambda(\text{гр})^{-1}$, определенный на всем $L_2(G)$ (Напомним, что то же имеет место одновременно и для $\Lambda^+(\text{гр})^+$). Легко убедиться, что $\Lambda(\text{гр})^{-1}$ вполне непрерывен. В самом деле, введем оператор A действующий из всего $L_2(G)$ в пространство $W_2^1(G)$ по закону $Au = \Lambda(\text{гр})^{-1}$ и $\in W_2^1(G)$. Оператор $\Lambda(\text{гр})^{-1}$ можно теперь представить как $\Lambda(\text{гр})^{-1} = OA$, где O оператор вложения $W_2^1(G)$ в $L_2(G)$. Так как O вполне непрерывен, а A ограничен — в силу неравенства (20) (соответственно 22), то $\Lambda(\text{гр})^{-1}$ вполне непрерывен.

Лемма 4. *Оператор* $\Lambda^+(\text{гр})^+$ *совпадает с сопряженным к* $\Lambda(\text{гр})$ *в* $L_2(G)$.

Доказательство. Имеет место равенство

$$(\Lambda(\text{гр})\, u, \ v) = (u, \ \Lambda^+(\text{гр})^+ v) \ (u \in \mathfrak{D}(\Lambda(\text{гр})), \ v \in \mathfrak{D}(\Lambda^+(\text{гр})^+)). \tag{26}$$

Это равенство очевидно на гладких функциях u, v из указанных множеств и получается отсюда предельным переходом. Полагая $\Lambda(\text{гр})u = \alpha$, $\Lambda^+(\text{гр})^+ v = \beta$, из (26) получим $(\alpha, \ (\Lambda^+(\text{гр})^+)^{-1}\beta) = (\Lambda(\text{гр})^{-1}\alpha, \ \beta)$ $\alpha, \ \beta \in L_2(G)$. Отсюда $(\Lambda^+(\text{гр})^+)^{-1} = (\Lambda(\text{гр})^{-1})^*$ и, значит, $\Lambda^+(\text{гр})^+ = \Lambda(\text{гр})^*$.

Лемма доказана.

В силу полной непрерывности $\Lambda(\text{гр})^{-1}$, пара уравнений в $L_2(G)$

$(E - \lambda\Lambda(\text{гр})^{-1})\, u' = f'$, $(E - \lambda(\Lambda(\text{гр})^{-1})^*)\, v' = g'$ будет фредгольмова. Но тогда фредгольмовой будет и пара

$$(\Lambda(\text{гр}) - \lambda E)\, u = f, \ (\Lambda(\text{гр})^* - \lambda E)\, u = g. \tag{27}$$

Благодаря лемме 4, фредгольмовость пары (27) можно интерпретировать как нормальную разрешимость для обобщенных решений (25).

Теорема 4. *Задача $Lu - \lambda u = 0$, $u|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0$ имеет отличные от нуля сильные решения из пространства $W_2^1(G)$, собственные функции, не более чем для счетного числа значений параметра $\lambda = \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $|\lambda_k| \to \infty$, ее собственных чисел. Отвечающие каждому λ_k собственное подпространство конечномерно. У сопряженной задачи $Lv - \lambda v = 0$, $v|_{\Gamma_0 \cup \gamma_1} = 0$ собственные числа равны $\bar{\lambda}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Собственные подпространства для основной и сопряженной задачи, отвечающие λ_k и $\bar{\lambda}_k$, имеют одинаковую размерность. Задача (26) разрешима (в смысле сильного решения) для тех и только тех f, которые ортогональны к собственному подпространству сопряженной задачи, отвечаещему $\bar{\lambda}$.*

Выражаю глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за руководство этой работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K. O., The Identity of weak and strong extensions of differential operators, Trans. Amer. Math. Soc., 55, 1944, 132—151.
2. Friedrichs K. O., Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 11, 1958, 333—418.
3. Lax P. D. and Phillips R. S., Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 13, 1960, 427—455.
4. Ю. М. Березанский, Некоторые примеры «неклассических» краевых задач для уравнений в частных производных, ДАН СССР, 132, 1, 1960, 9—12.
5. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, изд-во «Наукова думка», К., 1965.
6. В. П. Диденко, О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа, ДАН СССР, 144, № 4, 1962.
7. В. П. Диденко, О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Дифф. ур., II, № 1, 1966.
8. Л. И. Коваленко, Разностный метод и единственность обобщенного решения для задачи Трикоми, ДАН СССР, 162, 4, 1965, 751—754.
9. Л. И. Коваленко, Обобщенные решения задачи Трикоми, ДАН СССР, 162, 5, 1965. 988—991.

Поступила 24.XII 1965 г.
Киев