1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О непрерывности некоторых конформных инвариантов

П. М. Тамразов

1. В ряде вопросов геометрической теории функций важную роль играет свойство непрерывности различных конформных инвариантов. Поскольку экстремальная длина является весьма общей формой определения конформных инвариантов, то естественно попытаться установить свойство непрерывности экстремальной длины при как можно более общих предположениях, выраженных в геометрических терминах. В некоторых частных случаях эта задача решена. Прежде всего это относится к результату о непрерывности модуля двусвязной области, установленному в довоенной работе Г. Х. Хажалия [1] и недавно повторенному в работе Геринга [2]. Можно упомянуть также наши результаты о непрерывности модуля «четырехугольника» [3] (подробнее см. в [4]; под «четырехугольником» понимается область произвольной связности, на одной из граничных компонент которой отмечены два изолированных граничных интервала).

Наиболее интересный результат о непрерывности экстремальной длины установлен Волонтисом [5]. Этот результат относится к широкой группе экстремальных длин, называемых экстремальными расстояниями (см. также [6, 7]).

2. Пусть D — область комплексной плоскости; E и F — два отделимых множества, лежащих в области D; Γ — семейство всех кривых, лежащих в D и соединяющих E и F. Экстремальная длина семейства Γ называется э к с т р е м а л ь н ы м р а с с т о я н и е м* м е ж д у E и F о т н о с и т е л ь н о D и обозначается через $\lambda_D(E, F)$.

Сформулируем результат Волонтиса.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть D — область; E и F — два отделимых компактных подмножества области D; $\{E_n, F_n\}$ — последовательность пар компактных подмножеств области D, покрывающих соответственно E и F и сходящихся к E и F (в том смысле, что по каждому $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ множества E_n и F_n лежат в ε — окрестностях соответственно множеств E и F). Тогда*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) = \lambda_D(E, F). \qquad (1)$$

При доказательстве предложения 1 существенным образом используется условие

$$E_n \supset E, \ F_n \supset F, \ n = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

* Как известно [6, 5], определение экстремального расстояния может быть обобщено в том смысле, что E и F могут содержать достижимые точки границы области D. Для этого расширенного определения можно рассмотреть те же вопросы, которые ниже решаются для основного определения экстремального расстояния.

которое, согласно принципу монотонности экстремальной длины, сразу приводит к очевидному неравенству

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_D(E_n, F_n) \leqslant \lambda_D(E, F). \tag{3}$$

Естественно попытаться освободиться от условия (2). Из примера, который будет ниже построен, станет ясно, что нельзя попросту отбросить условие (2), не нарушив при этом непрерывности экстремального расстояния. Однако будет также показано, что при невыполнении условия (2) непрерывность экстремального расстояния все же будет иметь место, если на множества E_n и F_n наложить надлежащие ограничения метрического характера, причем этот результат справедлив даже для незамкнутых множеств E, F E_n, F_n, $n = 1, 2, \ldots$

3. Совокупность всех точечных множеств на плоскости обычным образом превратим в метрическое пространство с помощью метрики уклонений

$$h(E_1, E_2) = \max\{\sup_{z_1\in E_1}\inf_{z_2\in E_2}|z_1 - z_2|; \qquad \sup_{z_2\in E_2}\inf_{z_1\in E_1}|z_1 - z_2|\}. \tag{4}$$

В дальнейшем, говоря о сходимости последовательности множеств, мы имеем в виду сходимость по метрике $h(E_1, E_2)$. Легко видеть, что при условиях предложения 1 заведомо $E_n \to E$, $F_n \to F$.

Обозначим через $d(E)$ нижнюю грань диаметров компонент связности множества E.

Т е о р е м а 1. *Пусть D — область; E и F — два отделимых компактных подмножества области D; $\{E_n, F_n\}$ — последовательность пар подмножеств области D, удовлетворяющих условию*

$$E_n \to E, \ F_n \to F. \tag{5}$$

Если выполнены условия

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, d(E_n) > 0, \tag{6}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, d(F_n) > 0, \tag{7}$$

то тогда справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) = \lambda_D(E, F). \tag{8}$$

Справедливость теоремы не нарушится, если условие (6) (аналогичным образом, условие (7)) заменить требованием, чтобы множества E_n (соответственно, F_n), $n = 1, 2, \ldots$, были связны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя методику, примененную Волонтисом [5] к доказательству предложения 1 (основная идея этого доказательства, согласно указанию Волонтиса, заимствована им из одной неопубликованной работы Бейрлинга), можно получить одностороннюю оценку

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_D(E_n, F_n) \geqslant \lambda_D(E, F). \tag{9}$$

Теперь докажем обратное неравенство. Для этого сначала заметим, что если множества E_n, $n = 1, 2, \ldots$, связны и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(E_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} d(E_n) = 0$ и $d(E) = 0$. Тогда из рассуждений Херша [8, глава 1, § 2, D, C] следует, что $\lambda_D(E, F) = \infty$. Несколько видоизменяя эти рассуждения Херша, можно показать, что $\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) = \infty$. Таким образом, осталось рассмотреть лишь тот случай, когда выполнены соотношения (6) и (7).

Так как $\lambda_D(E, F) > 0$, то из (9) видно, что существует целое число $M > 1$, такое, что

$$\lambda_D(E_n, F_n) > \frac{1}{M-1}, \quad n = M, M+1, \ldots \tag{10}$$

Это означает, что при каждом $n \geqslant M$ существует метрика ϱ_n, для которой выполнены условия

$$\iint_D \varrho_n^2 dxdy < \frac{1}{\lambda_D(E_n, F_n)} + \frac{1}{n} < M; \tag{11}$$

$$\int_{\gamma_n} (\varrho_n |dz| \geqslant 1 \quad (\gamma_n \in \Gamma_n), \tag{12}$$

где Γ_n — семейство всех кривых, лежащих в D и соединяющих E_n и F_n.

Пусть $r(E', E'')$ — эвклидово расстояние между множествами E' и E'', а ∂D — граница области D. Пусть $n_0 (\geqslant M)$ настолько велико, что при всех $n \geqslant n_0$ имеет место неравенство

$$2[h(E_n, E) + h(F_n, F)] < \min\left\{\frac{1}{10} r(E, F); \quad \frac{1}{4} r(E \cup F, \partial D); \right. \tag{13}$$

$$\left. \frac{1}{4} d(E_n \cup F_n)\right\} \equiv r_n.$$

Фиксируем $n \geqslant n_0$ и произвольную кривую $\gamma \in \Gamma$. На кривой γ можно указать точку z_1, удаленную от E на расстояние, не большее, чем число $h(E_n, E)$. Тогда z_1 удалено от E_n на расстояние, не большее, чем число $2h(E_n, E)$. Легко видеть, что всякая окружность $|z - z_1| = r$, где $2h(E_n, E) < r < r_n$, пересекает кривую γ и множество E_n и полностью лежит в D.

С другой стороны,

$$M > \iint_{|z-z_1| \leqslant r_n} \varrho_n^2 dxdy \geqslant \frac{1}{2\pi} \int_{2h(E_n, E)}^{r_n} \left(\int_{|z-z_1|=r} \varrho_n |dz| \right)^2 \frac{dr}{r} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_n}{2h(E_n, E)} \cdot \inf_{2h(E_n, E) < r < r_n} \left(\int_{|z-z_1|=r} \varrho_n |dz| \right)^2. \tag{14}$$

Отсюда видно, что существует такое r, $2h(E_n, E) < r < r_n$, что окружность $|z - z_1| = r$ пересекает кривую γ и множество E_n и в то же время

$$\int_{|z-z_1|=r} \varrho_n |dz| < 2 \sqrt{\frac{2\pi M}{\ln \dfrac{r_n}{2h(E_n, E)}}} \equiv e_n. \tag{15}$$

Таким образом, кривую γ можно соединить с E_n дугой δ', полностью лежащей в D и такой, что

$$\int_{\delta'} \varrho_n |dz| < e_n. \tag{16}$$

Аналогичным образом кривую γ можно соединить с F_n дугой δ'', полностью лежащей в D и такой, что

$$\int_{\delta''} \varrho_n |dz| < f_n, \tag{17}$$

где

$$f_n = 2 \sqrt{\frac{2\pi M}{\ln \frac{r_n}{2h(F_n, F)}}}. \tag{18}$$

Из частей кривой γ и дуг δ' и δ'' можно сконструировать кривую $\tilde{\gamma} \in \Gamma_n$, для которой

$$\int_{\tilde{\gamma}} \varrho_n |dz| < \int_{\gamma} \varrho_n |dz| + e_n + f_n. \tag{19}$$

Из (12) и (19) вытекает, что

$$\int_{\gamma} \varrho_n |dz| > 1 - e_n - f_n. \tag{20}$$

Из (11) и (20) получаем

$$\frac{\int_{\gamma} \varrho_n |dz|}{\sqrt{\iint_D \varrho_n^2 dxdy}} > \frac{1 - e_n - f_n}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_D(E_n, F_n)} + \frac{1}{n}}}. \tag{21}$$

Ввиду произвольности $\gamma \in \Gamma$, отсюда следует, что

$$\frac{\inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \varrho_n |dz|}{\sqrt{\iint_D \varrho_n^2 dxdy}} \geqslant \frac{1 - e_n - f_n}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_D(E_n, F_n)} + \frac{1}{n}}}. \tag{22}$$

Отсюда видно, что

$$\sqrt{\lambda_D(E, F)} \geqslant \frac{1 - e_n - f_n}{\sqrt{\frac{1}{\lambda_D(E_n, F_n)} + \frac{1}{n}}}, \tag{23}$$

и в виду произвольности $n \geqslant n_0$, имеем

$$\lambda_D(E, F) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \lambda_D(E_n, F_n). \tag{24}$$

Из (9) и (24) следует, что теорема 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Компактность (замкнутость) множеств E и F использовалась лишь при доказательстве соотношения (9), а при доказательстве неравенства (24) она не нужна.

4. Теперь построим пример нарушения непрерывности экстремального расстояния. В качестве D возьмем всю плоскость, в качестве E и F — соответственно окружности $C_1: |z| = 1$ и $C_{\frac{1}{2}}: |z| = \frac{1}{2}$. Фиксируем натуральное n. Обозначим $\varepsilon_{nj} = \exp\left(\frac{2\pi i}{n} \cdot j\right)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Обозначим через v'_{nj} круг $|z-\varepsilon_{nj}| \leqslant \frac{1}{4n}\cdot e^{-2n^2}$, через V'_{nj} — круг $|z-\varepsilon_{nj}| < \frac{1}{4n}$, через v''_{nj} — круг $\left|z-\frac{1}{2}\varepsilon_{nj}\right| \leqslant \frac{1}{8n}e^{-2n^2}$, а через V''_{nj} — круг $\left|z-\frac{1}{2}\varepsilon_{nj}\right| < \frac{1}{8n}$. Введем еще следующие обозначения

$$E_n = C_1 \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} v'_{nj}\right); \tag{25}$$

$$F_n = C_{\frac{1}{2}} \cap \left(\bigcup_{j=0}^{n-1} v''_{nj}\right); \tag{26}$$

$$\varrho_n(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{4n^2|z-\varepsilon_{nj}|}, & \text{если } z \in V'_{nj} \setminus v'_{nj}, \quad j=0,1,\ldots,n-1; \\ \dfrac{1}{4n^2\left|z-\frac{1}{2}\varepsilon_{nj}\right|}, & \text{если } z \in V''_{nj} \setminus v''_{nj}, \quad j=0,1,\ldots,n-1; \\ 0, & \text{если } z \in D \setminus \left[\left(\bigcup\limits_{j=0}^{n-1} V'_{nj} \setminus v'_{nj}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j=0}^{n-1} V''_{nj} \setminus v''_{nj}\right)\right]. \end{cases} \tag{27}$$

Легко видеть, что

$$E_n \to E, \qquad F_n \to F. \tag{28}$$

Можно подсчитать, что

$$\frac{2n}{\pi} \leqslant \lambda_D(E_n, F_n) < \infty. \tag{29}$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) = \infty \tag{30}$$

и в то же время

$$\lambda_D(E, F) = \frac{\ln 2}{2\pi}. \tag{31}$$

Итак, в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) > \lambda_D(E, F), \tag{32}$$

т. е. непрерывности экстремального расстояния нет.

Легко заметить, что в построенном примере выполнены все условия предложения 1, кроме условия (2), и выполнены все условия теоремы 1, кроме условий (6) и (7).

5. С вопросом о непрерывности экстремальной длины связан вопрос о роли замкнутости соответствующих точечных множеств. В работе Волонтиса [5] утверждается, что если $\overline{E}$ и $\overline{F}$ являются замыканиями множеств E и F, то всегда

$$\lambda_D(\overline{E}, \overline{F}) = \lambda_D(E, F). \tag{33}$$

Там же приведено доказательство этого утверждения и делается вывод о том, что требование замкнутости множеств несущественно.

С этими утверждениями нельзя согласиться. Ниже мы контрпримером опровергнем эти утверждения Волонтиса и укажем ошибку в его доказательстве. С другой стороны, будет установлен также некоторый положительный результат в этом вопросе.

Ошибка Волонтиса заключается в следующем: фиксируя (см. [5], стр. 593) допустимую метрику ϱ, точку z и последовательность точек $\{z_n\}$ таких, что $|z - z_n| < 2^{-n}$, он молчаливо считает, что интеграл $\int\limits_{\gamma_n} \varrho\,|dz|$, взятый по ломаной линии $\gamma_n = z_n z_{n+1} z_{n+2} \ldots$, стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Но это принципиально неверно, что можно усмотреть из контрпримера, который сейчас будет построен.

Фиксируем натуральное n и обозначим: $e_{nj} = \exp\left(\frac{2\pi i}{2^n} \cdot j\right)$, $j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, 2^n - 1$; $z_{nj} = e_{nj}(1 + 2^{-n+2})$. Через E обозначим множество всех точек z_{nj}, $j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$; $n = 1, 2, \ldots$; а в качестве F возьмем окружность $C_{\frac{1}{2}}$. В качестве области D возьмем z-плоскость.

Легко видеть, что множество $\overline{E}$ содержит в себе единичную окружность C_1, а потому всякая кривая, соединяющая $\overline{E}$ и $\overline{F}$, содержит в себе некоторую кривую, соединяющую C_1 и $C_{\frac{1}{2}}$. Отсюда следует, что

$$\lambda_D(\overline{E}, \overline{F}) = \lambda_D(C_1, C_{\frac{1}{2}}) = \frac{\ln 2}{2\pi}. \tag{34}$$

Теперь покажем, что $\lambda_D(E, F) = \infty$. Для этого построим допустимую метрику $\varrho(z)$ по формуле:

$$\varrho(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{|z - z_{nj}| \cdot 2^n \cdot k}, \text{ если } 2^{-n-k-1} < |z - z_{nj}| < 2^{-n-k} \\ (j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1;\ n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots); \\ 0 \text{ при всех остальных значениях } z. \end{cases} \tag{35}$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что для всякой кривой γ, соединяющей точку z_{nj} (n и j любые такие, что $0 \leqslant j \leqslant 2^n - 1$) с какой-нибудь точкой $z_0 \neq z_{nj}$, выполнено равенство

$$\int\limits_{\gamma} \varrho\,|dz| = +\infty. \tag{36}$$

В частности, это верно для любой кривой γ, соединяющей E и F. С другой стороны, подсчет дает

$$\iint\limits_D \varrho^2 dx dy = \frac{\pi^3 \ln 2}{3}. \tag{37}$$

Таким образом, $\lambda_D(E, F) = \infty$, откуда следует, что

$$\lambda_D(E, F) > \lambda_D(\overline{E}, \overline{F}). \tag{38}$$

Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть D — область; E и F — два отделимых множества, замыкания которых компактны в D. Если выполнены условия*

$$d(E) > 0, \tag{39}$$

$$d(F) > 0, \tag{40}$$

то тогда

$$\lambda_D(E, F) = \lambda_D(\overline{E}, \overline{F}). \tag{41}$$

Справедливость теоремы не нарушится, если условие (39) (*аналогичным образом, условие* (40)) *заменить требованием о том, чтобы множество E* (*соответственно, F*) *было связным.*

Доказательство теоремы 2 основано на том, что при всякой фиксированной метрике ϱ, допустимой для семейства $\overline{\Gamma}$ кривых, соединяющих $\overline{E}$ и $\overline{F}$ в D, по каждой кривой $\gamma \in \overline{\Gamma}$ и натуральному n можно построить кривую $\widetilde{\gamma}_n$, соединяющую E и F и такую, что

$$\int_{\widetilde{\gamma}_n} \varrho\,|dz| \leqslant \int_{\gamma} \varrho\,|dz| + e_n + f_n, \tag{42}$$

где e_n и f_n бесконечно малы при $n \to \infty$ (указанное построение кривой $\widetilde{\gamma}_n$ несколько напоминает построение кривой $\widetilde{\gamma}$ в доказательстве теоремы 1). Отсюда уже выводится утверждение теоремы 2 (рассуждения напоминают соответствующее место из доказательства теоремы 1).

6. Комбинируя теоремы 1 и 2, получим следующее утверждение, обобщающее теорему 1.

Теорема 3. *Пусть D — область; E и F — два отделимых подмножества области D, замыкания которых компактны в D; $\{E_n, F_n\}$ — последовательность пар подмножеств области D, удовлетворяющих условию*

$$E_n \to E, \qquad F_n \to F. \tag{43}$$

Если выполнены условия

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} d(E_n) > 0, \tag{44}$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} d(F_n) > 0, \tag{45}$$

то тогда справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_D(E_n, F_n) = \lambda_D(\overline{E}, \overline{F}) = \lambda_D(E, F). \tag{46}$$

Справедливость теоремы не нарушится, если условие (44) (*аналогичным образом, условие* (45)) *заменить требованием о том, чтобы множества E_n* (*соответственно, F_n*), $n = 1, 2, \ldots$, *были связны.*

Доказательство. Из условий (44) и (45) следует справедливость соответственно неравенств (39) и (40); из связности множеств E_n (аналогично F_n), $n = 1, 2, \ldots$, следует связность множества E (соответственно, F); из соотношений (43) следует, что $E_n \to \overline{E}$, $F_n \to \overline{F}$. Поэтому из теоремы 1 следует справедливость первого из соотношений (46), а из теоремы 2 — справедливость второго из соотношений (46). Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Хажалия, О конформном отображении двусвязных областей на кольцо, Тр. Тбилисского мат. инст., **1**, 1937, 89—107.
2. F. W. Gehring, A remark on the moduli of rings. Comm. Math. Helv., **36**, 1961, 42—46.
3. П. М. Тамразов, О некоторых экстремальных задачах теории функций, Сб. научн. Тр. асп. Киевск. политехн. ин-та, 1961, 269—277.
4. П. М. Тамразов, Метод экстремальной метрики и конформное отображение, Канд. дисс., Киев, 1962.
5. V. Wolontis, Properties of conformal invariants, Amer. J. Math. **74**, 1952, 587—606.
6. L. V. Ahlfors, A. Beurling, Conformal invariants and functiontheoretic null-sets, Acta Math., **83**, 1950, 101—129.
7. L. V. Ahlfors, A. Beurling, Conformal invariants, Constr. and appl. of conformal maps, U. S. Depart. of Commerce, Nat. Bueur. of Stand, Appl. Math. Ser., 18, 1952, 243—245.
8. J. Hersch, Longueurs extrémales et théorie des fonctions, Comm. Math. Helv., **29**, 1955.

Поступила 9.XI 1965 г.
Киев