1966 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 18, № 6
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными

Н. И. Шкиль

§ 1. Введение

В настоящей статье строится асимптотическое решение в смысле [1] гиперболической системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1(\tau, \varepsilon, x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau, \varepsilon, x)\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon A_3(\tau, \varepsilon, x)\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+ \varepsilon A_4(\tau, \varepsilon, x)u + \varepsilon G(\tau, \varepsilon, x)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad 0 \leqslant \tau = \varepsilon t \leqslant L, \tag{1}$$

где u, $G(\tau, \varepsilon, x)$ — n-мерные векторы, $A_k(\tau, \varepsilon, x)$ $(k = 1, \ldots, 4)$ — действительные квадратные матрицы порядка n, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x, \varepsilon), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, \varepsilon) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0. \tag{3}$$

Предполагается, что выполняются следующие условия:

1°. Коэффициенты и свободный член системы (1), а также векторы $\varphi(x, \varepsilon)$, $\psi(x, \varepsilon)$ удовлетворяют условиям разрешимости из [2].

2°. Имеют место формальные разложения

$$A_1(\tau, \varepsilon, x) = A_0(\tau) + \varepsilon\widetilde{A}_1(\tau, \varepsilon, x) = A_0(\tau) + \varepsilon\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\widetilde{A}_{1s}(\tau, x),$$

$$A_j(\tau, \varepsilon, x) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_{js}(\tau, x), \qquad j = 2, 3, 4,$$

$$G(\tau, \varepsilon, x) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s G_s(\tau, x), \tag{4}$$

где ε — малый положительный параметр (правые части в (4) могут быть и полиномами от ε).

3°. Матрицы $A_0(\tau)$, $A_{1s}(\tau, x)$, $\widetilde{A}_{js}(\tau, x)$ $(j = 2, 3, 4)$, векторы $G_s(\tau, x)$ $(s = 0, 1, \ldots)$ и функция

$$\nu(\tau) = \frac{d\theta(t, \varepsilon)}{dt} \tag{5}$$

неограниченно дифференцируемые по τ на сегменте $[0, L]$.

4^0. На сегменте $[0, L]$ при любом ν, $s = 0, 1, \ldots$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\| \frac{d^{\nu}A_{m,ks}^{(\tau)}}{d\tau^{\nu}} \right\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left\| \frac{d^{\nu}B_{m,ks}^{(\tau)}}{d\tau^{\nu}} \right\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\left\| \frac{d^{\nu}F_{ks}(\tau)}{d\tau^{\nu}} \right\|^2, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$A_{m,ks}(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l [A_{3s}(\tau, x)\,\omega_k \cos\omega_k x + A_{4s}(\tau, x)\sin\omega_k x -$$

$$- \omega_k^2 A_{1s}(\tau, x)\sin\omega_k x]\sin\omega_m x dx,$$

$$B_{m,ks}(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l A_{2s}(\tau, x)\sin\omega_k x \sin\omega_m x dx, \tag{7}$$

$$F_{ks}(\tau) = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l G_s(\tau, x)\sin\omega_k x dx, \quad \omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

5^0. Собственные числа матрицы $A_0(\tau)$ при любом $\tau \in [0, L]$ сохраняют постоянную кратность и положительные.

Тогда решение системы (1), следуя [3], будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\omega_j x \cdot z_j, \tag{8}$$

где z_j — n-мерные векторы, подлежащие определению.

Подставив вектор u в систему (1), получим тождество. Умножая обе части его на $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\omega_m x dx$ $(m = 1, 2, \ldots)$ и интегрируя по x $(0 \leqslant x \leqslant l)$, придем к бесконечной системе уравнений

$$\frac{d^2 z_m}{dt^2} = -\omega_m^2 A_0(\tau)\, z_m + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s A_{m,ks}(\tau)\, z_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s B_{m,ks}(\tau)\frac{dz_k}{dt}\right] + \varepsilon\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s F_{ms}(\tau)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Полагая

$$z_m = q_{1m}, \quad \frac{dz_m}{dt} = q_{2m}, \tag{10}$$

приведем систему (9) к системе первого порядка

$$\frac{dq_m}{dt} = H_m(\tau)\, q_m + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k}(\tau, \varepsilon)\, q_k + \varepsilon P_m(\tau, \varepsilon)\, e^{i\theta(t,\varepsilon)} \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где q_m, $P_m(\tau, \varepsilon)$ — векторы размерности $2n$, $H_m(\tau)$, $H_{m,k}(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка $2n$, имеющие вид

$$q_m = [q_{1m}, q_{2m}], \quad P_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s P_{m,s}(\tau) = \left[0, \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s F_{ms}(\tau)\right],$$

$$H_{m,k}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_{m,ks}(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0, & 0 \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{m,ks}(\tau), & \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{m,ks}(\tau) \end{matrix} \right\|, \tag{12}$$

$$H_m(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0, & E \\ -\omega_m^2 A_0(\tau), & 0 \end{matrix} \right\|, \quad m, k = 1, 2, \ldots,$$

(E — единичная матрица).

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $H_m^{(\tau)}$:

$$\det \| H_m(\tau) - \lambda_m(\tau) E \| = 0. \tag{13}$$

Обозначим его корни через $\lambda_{m1}(\tau), \ldots, \lambda_{m2n}(\tau)$.

В литературе рассмотрен случай простых корней уравнения (13) [4, 5]. Вопрос об асимптотическом понижении порядка системы (11) при любом поведении корней рассматривался в работах [6, 7].

Здесь мы строим асимптотическое решение системы (11) в том случае, когда среди корней уравнения (13) появляются корни постоянной кратности с кратными элементарными делителями.

Заметим, что этот случай в конечномерном пространстве всесторонне исследован автором, [8—10]. Для бесконечных систем появляется новая особенность, связанная с тем, что в коэффициенты формальных рядов входят функциональные ряды, исследованию сходимости которых и посвящена в основном настоящая работа.

Допустим, что корень $\lambda_{m1}(\tau)$ на сегменте $[0, L]$ обладает постоянной кратностью k_{m1}, корень $\lambda_{m2}(\tau)$ — кратностью k_{m2}, и т. д., корень $\lambda_{mp_m}(\tau)$ — кратностью k_{mp_m} ($k_{m1} + \ldots + k_{mp_m} = 2n$).

Как известно, кратным корням могут соответствовать простые и кратные элементарные делители. Мы будем рассматривать, как более сложный, случай кратных элементарных делителей, предполагая при этом, что их кратность совпадает с кратностью соответствующих корней уравнения (13).

Тогда для матрицы $H_m(\tau)$ можно указать неособенную матрицу $T_m(\tau)$, что

$$W_m(\tau) = T_m^{-1}(\tau) H_m(\tau) T_m(\tau) = \left\| \begin{matrix} W_{m1}(\tau) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & W_{mp_m}(\tau) \end{matrix} \right\|, \tag{14}$$

где

$$W_{mj}(\tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda_{mj}(\tau) & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \lambda_{mj}(\tau) & 1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & \ldots \lambda_{mj}(\tau) \end{matrix} \right\| \quad j = 1, \ldots, p_m, \; m = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$T_m^{-1}(\tau)$ — матрица, обратная к матрице $T_m(\tau)$.

В дальнейшем нам понадобится лемма, обеспечивающая дифференцируемость по τ величин, входящих в решение.

Лемма. *Если элементы матрицы $H_m(\tau)$ на сегменте $[0, L]$ обладают непрерывными производными вплоть до «r» порядка включительно, то и элементы матрицы $T_m(\tau)$ будут иметь на сегменте $[0, L]$ непрерывные производные до этого же порядка.*

На доказательстве данной леммы мы не будем останавливаться, отсылая читателя к работе [11].

Перейдем теперь к построению асимптотического решения системы (11), причем будем рассматривать отдельно два случая: 1) «резонансный» — функция $i\nu(\tau)$ ($i = \sqrt{-1}$) при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ становится равной одному из корней уравнения (13), например, $\lambda_{11}(\tau)$, однако,

$$
\begin{aligned}
&i\nu(\tau) \neq \lambda_{mj}(\tau),\ m = 2, 3, \ldots;\ j = 1, \ldots, p_m,\\
&i\nu(\tau) \neq \lambda_{1k}(\tau),\ k = 2, \ldots, p_1
\end{aligned}
\tag{16}
$$

для всех $\tau \in [0, L]$ и 2) «нерезонансный», когда

$$
i\nu(\tau) \neq \lambda_{mj}(\tau)\ j = 1, \ldots, p_m,\ m = 1, 2, \ldots \tag{17}
$$

при любом $\tau \in [0, L]$.

§ 2. Формальное решение в «резонансном» случае

Вид формального решения в «резонансном» случае дает следующая теорема.

Теорема 1. *Если выполняются условия* $1^0 - 5^0$ *и матрица*

$$
C(\tau) = T_1^{-1}(\tau)\left[H_{1,10}(\tau)\,T_1(\tau) - \frac{dT_1(\tau)}{d\tau}\right] \tag{18}
$$

такова, что ее элемент $\{c(\tau)\}_{k_{11},1}$ *удовлетворяет условию*

$$
\{c(\tau)\}_{k_{11},1} \neq 0 \tag{19}
$$

при любом $\tau \in [0, L]$, *то формальное частное решение системы* (11) *может быть представлено в виде*

$$
q_m = [U_m(\tau, \mu_1)\,\eta + R_m(\tau, \mu_1)]\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{20}
$$

где $U_m(\tau, \mu_1)$, $R_m(\tau, \mu_1)$ — $2n$*-мерные векторы, а* η — *скалярная функция, определяемая дифференциальным уравнением*

$$
\frac{d\eta}{dt} = [\lambda_1(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau)]\,\eta + z(\tau, \mu_1), \tag{21}
$$

причем допускается, что имеют место формальные разложения

$$
U_m(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu_1^s U_m^{(s)}(\tau), \quad \lambda_1(\tau, \mu_1) = \sum_{s=1}^{\infty}\mu_1^s\lambda_1^{(s)}(\tau) + \lambda_{11}(\tau), \tag{22}
$$

$$
R_m(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu_1^s R_m^{(s)}(\tau),\ z(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty}\mu_1^s z^{(s)}(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{23}
$$

где

$$
\mu_1 = \sqrt[k_{11}]{\varepsilon}. \tag{24}
$$

Доказательство. Для доказательства данной теоремы нужно так определить коэффициенты рядов (22), (23), чтобы вектор q_m удовлетворял системе (11).

Остановимся вкратце (подробно см. [10]) на определении коэффициентов рядов (22) (определение коэффициентов рядов (23) проводится аналогично).

В силу [10] упомянутые коэффициенты должны удовлетворять системе уравнений

$$
(H_m - \lambda_{11}E)\,U_m^{(s)} = \sum_{j=0}^{s-1} U_m^{(j)}\lambda_1^{(s-j)} + V_m^{(s)}, \tag{25}
$$

где

$$
V_m^{(s)} = \overset{\tau}{U'}{}_m^{(s-k_{11})} - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\left[\frac{s-k_{11}}{k_{11}}\right]} H_{m,kj}U_k^{(s-k_{11}(j+1))}\ \ m = 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, \ldots \tag{26}
$$

(здесь и в дальнейшем аргументы встречающихся величин мы опускаем).

Предположим, что вектор $V_m^{(s)}$ $(s = 0, 1, \ldots; m = 1, 2, \ldots)$ на сегменте $[0, L]$ неограниченно дифференцируемый (неограниченная дифференцируемость этого вектора будет доказана ниже).

Тогда векторному уравнению (25) на основании (14) можно придать вид

$$(W_m - \lambda_{11}E)\, Q_m^{(s)} = \sum_{j=0}^{s-1} Q_m^{(j)} \lambda_1^{(s-j)} + Z_m^{(s)}, \tag{27}$$

где

$$Q_m^{(s)} = T_m^{-1} U_m^{(s)}, \quad Z_m^{(s)} = T_m^{-1} V_m^{(s)} \quad m = 1, 2, \ldots; \quad s = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

Так как матрица W_m имеет квазидиагональный вид (14), то уравнение (27) распадается на p_m уравнений

$$(W_{mi} - \lambda_{11}E)\, Q_{mi}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s-1} Q_{mi}^{(j)} \lambda_1^{(s-j)} + Z_{mi}^{(s)}. \tag{29}$$

В силу предположений относительно корней уравнения (13)

$$\det \| W_{mi} - \lambda_{11}E \| \neq 0 \tag{30}$$

для всех $m = 2, 3, \ldots, i = 1, \ldots, p_m$ и при $m = 1$ для всех $i = 2, \ldots, p_1$. Поэтому считая функции $\lambda_1^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$ известными, из (29) находим

$$Q_{mi}^{(s)} = (W_{mi} - \lambda_{11}E)^{-1} \left(\sum_{j=0}^{s-1} Q_{mi}^{(j)} \lambda_1^{(s-j)} + Z_{mi}^{(s)} \right) \; s = 0, 1, \ldots \tag{31}$$

Таким образом, остается определить векторы $Q_{11}^{(s)}$ и функции $\lambda_1^{(s+1)}$ $(s = 0, 1, \ldots)$. С этой целью положим в уравнении (29) $m = i = 1$. Будем иметь

$$I_1 Q_{11}^{(s)} = \sum_{j=0}^{s-1} Q_{11}^{(j)} \lambda_1^{(s-j)} + Z_{11}^{(s)}, \tag{32}$$

где

$$I_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & & \ldots & 0 \end{Vmatrix}. \tag{33}$$

При $s = 0$ уравнение (32) приобретает вид

$$I_1 Q_{11}^{(0)} = 0. \tag{34}$$

Отсюда следует, что все компоненты вектора $Q_{11}^{(0)}$, кроме первой, равны нулю

$$\{q_{11}^{(0)}\}_r = 0, \; r = 2, \ldots, k_{11}. \tag{35}$$

Компонента $\{q_{11}^{(0)}\}_1$ остается произвольной. Имея в виду получить нетривиальное решение, положим

$$\{q_{11}^{(0)}\}_1 = 1. \tag{36}$$

Вектор $Q_{11}^{(0)}$ определен. Зная его, из (28) находим

$$U_1^{(0)} = T_1 Q_1^{(0)}. \tag{37}$$

Исследуем уравнение (32) при $s \geqslant 1$, которое содержит теперь два неизвестных: вектор $Q_{11}^{(s)}$ и функцию $\lambda_1^{(s)}$.

Заметим, что из вида матрицы I_1 следует, что первые компоненты векторов $Q_{11}^{(s)}$ остаются произвольными. Будем считать их равными нулю

$$\{q_{11}^{(s)}\}_1 = 0, \ s = 1, 2, \ldots \tag{38}$$

Тогда, умножая обе части уравнения (32) на матрицу $I_1^{k_{11}-1}$, приходим к скалярному уравнению

$$\sum_{j_{k_{11}-1}=k_{11}-1}^{s-1} \ \sum_{j_{k_{11}-2}=k_{11}-2}^{j_{k_{11}-1}-1} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \lambda_1^{(j_1)} \lambda_1^{(j_2-j_1)} \ldots \lambda_1^{(s-j_{k_{11}-1})} + \{f_{11}^{(s)}\}_1 = 0$$

$$s = 1, 2, \ldots, \tag{39}$$

где

$$F_{11}^{(s)} = I_1^{k_{11}-1} L_{11}^{(s)} + \sum_{j_1=k_{11}}^{s-1} I_1^{k_{11}-2} L_{11}^{(j_1)} \lambda_1^{(s-j_1)} + \ldots +$$

$$+ \sum_{j_{k_{11}-2}=2k_{11}-2}^{s-1} \cdots \sum_{j_1=k_1}^{j_2-1} L_{11}^{(j_1)} \lambda_1^{(j_2-j_1)} \ldots \lambda_1^{(s-j_{k_{11}-2})}. \tag{40}$$

Из уравнения (39) без особого труда могут быть найдены функции $\lambda_1^{(s)}$ $(s = 1, 2, \ldots)$. В самом деле, положив в нем $s = k_{11}$ (при $1 \leqslant s \leqslant k_{11}-1$ оно обращается в тождество), находим

$$(\lambda_1^{(1)})^{k_{11}} + \{f_{11}^{(k_1)}\}_1 = 0. \tag{41}$$

Отсюда, учтя (26), (40), получим

$$\lambda_1^{(1)} = \sqrt[k_{11}]{\{c\}\, k_{11},\ 1}. \tag{42}$$

Чтобы определить функцию $\lambda_1^{(2)}$, положим в уравнении (39) $s=k_{11}+1$. Будем иметь

$$\lambda_1^{(2)} = -\frac{\{f_{11}^{(k_{11}+1)}\}_1}{k_{11}\,(\lambda_1^{(1)})^{k_{11}-1}}. \tag{43}$$

Таким образом, полагая в уравнении (39) $s = k_{11}, k_{11}+1, \ldots$, каждый раз получаем уравнения, из которых определяются соответственно функции $\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots$ Зная последние, из системы (32) очень легко могут быть найдены компоненты векторов $Q_{11}^{(s)}$.

Для полного доказательства теоремы осталось показать, что векторы $V_m^{(s)}$ неограниченно дифференцируемые на сегменте $[0, L]$.

С этой целью заметим, что матрицы H_m, $H_{m,ks}$ $(m, k = 1, 2, \ldots;$ $s = 0, 1, \ldots)$ в силу условия 3⁰ и (12) обладают на сегменте $[0, L]$ производными всех порядков. Кроме этого, согласно 4⁰, (12) при любом $\nu = 0, 1, \ldots$ ряды

$$\sum_{r=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu H_{m,rs}}{d\tau^\nu} \right\|^2, \quad s = 0, 1, \ldots \tag{44}$$

равномерно сходятся относительно $\tau \in [0, L]$.

При $0 \leqslant s \leqslant k_{11}-1$ дифференцируемость вектора $V_m^{(s)}$ очевидна, ибо в силу (26)

$$V_m^{(s)} \equiv 0, \ 0 \leqslant s \leqslant k_{11}-1 \quad m = 1, 2, \ldots \tag{45}$$

Тогда на основании (25) делаем вывод, что и вектор

$$U_m^{(s)} \equiv 0, \ \ m \geqslant 2, \ \ 0 \leqslant s \leqslant k_{11}-1. \tag{46}$$

Следовательно, при $s = k_{11}$ из (26) имеем

$$V_m^{(k_{11})} = U_m^{\tau'(0)} - H_{m,10} U_1^{(0)} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{47}$$

Векторы $U_m^{(0)}$ в силу их построения есть собственные векторы матрицы H_m, которая неограниченно дифференцируемая. Поэтому на основании [11] векторы $U_m^{(0)}$, а значит и векторы $V_m^{(k_{11})}$, имеют производные всех порядков.

Учитывая теперь (28), (31), (32), (42), приходим к выводу, что вектор $U_1^{(1)}$, а вместе с ним и вектор

$$V_m^{(k_{11}+1)} = \overset{\tau}{U}{}_m'^{(1)} - H_{m,10} U_1^{(1)}, \tag{48}$$

неограниченно дифференцируемые на сегменте $[0,L]$.

Таким же путем можно доказать дифференцируемость векторов $V_m^{(k_{11}+2)}, \ldots, V_m^{(2k_{11}-1)}$, которые на основании (26), (46) есть конечные суммы векторов, имеющих производные всех порядков.

Докажем теперь дифференцируемость векторов $V_m^{(2k_{11})}$, $V_m^{(2k_{11}+1)}, \ldots$

Покажем сначала, что вектор

$$V_m^{(2k_{11})} = \overset{\tau}{U}{}_m'^{(k_{11})} - H_{m,10} U_1^{(k_{11})} - H_{m,11} U_1^{(0)} - \sum_{r=2}^{\infty} H_{m,r0} U_r^{(k_{11})} \tag{49}$$

неограниченно дифференцируемый на сегменте $[0, L]$.

Дифференцируемость векторов $U_m^{(k_{11})}$ следует из (25), (28), (29), (32). Таким образом остается показать, что ряды

$$\sum_{r=2}^{\infty} \frac{d^\nu}{d\tau^\nu} (H_{m,r0} U_r^{(k_{11})}) = \sum_{r=2}^{\infty} \sum_{j=0}^{\nu} C_\nu^j \frac{d^{\nu-j} H_{m,r0}}{d\tau^{\nu-j}} \cdot \frac{d^j U_r^{(k_{11})}}{d\tau^j}, \tag{50}$$

(C_ν^j — число комбинаций из ν по j) при любом $\nu = 0, 1, \ldots$ равномерно сходятся на сегменте $[0, L]$. Для этого, как известно, достаточно показать, что ряд

$$\sum_{r=2}^{\infty} \left\| \frac{d^j U_r^{(k_{11})}}{d\tau^j} \right\|^2 \tag{51}$$

при каждом $j = 0, 1, \ldots, \nu$ сходится равномерно.

Покажем сначала, что равномерно сходится ряд (51) при $j = 0$, т. е. ряд

$$\sum_{r=2}^{\infty} | U_r^{(k_{11})} |^2. \tag{52}$$

С этой целью оценим общий член ряда, который на основании (28) равен

$$| U_r^{(k_{11})} |^2 = | T_r Q_r^{(k_{11})} |^2 \leqslant \| T_r \|^2 | Q_r^{(k_{11})} |^2. \tag{53}$$

Из (27), (28) находим

$$Q_r^{(k_{11})} = (W_r - \lambda_{11} E)^{-1} T_r^{-1} V_r^{(k_{11})}, \quad r \geqslant 2. \tag{54}$$

Подставляя сюда значение вектора $V_r^{(k_{11})}$ из (47), получаем

$$Q_r^{(k_{11})} = -(W_r - \lambda_{11} E)^{-1} T_r^{-1} H_{r,10} U_1^{(0)}. \tag{55}$$

Тогда

$$| Q_r^{(k_{11})} |^2 \leqslant \alpha_r^2 \| H_{r,10} \|^2, \tag{56}$$

где

$$\alpha_r = \| (W_r - \lambda_{11}E)^{-1} \| \| T_r^{-1} \| | U_1^{(0)} |. \tag{57}$$

Матрица T_r^{-1} и вектор $U_1^{(0)}$ дифференцируемые на сегменте $[0, L]$. Следовательно, они на этом сегменте ограничены. Матрица $(W_r - \lambda_{11}E)^{-1}$ также ограничена, ибо согласно (14), (15)

$$(W_r - \lambda_{11}E)^{-1} \left\| \begin{matrix} (W_{r1} - \lambda_{11}E)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (W_{rp_r} - \lambda_{11}E)^{-1} \end{matrix} \right\|, \tag{58}$$

где

$$(W_{rj} - \lambda_{11}E)^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\lambda_{rj} - \lambda_{11}}, \frac{-1}{(\lambda_{rj} - \lambda_{11})^2}, \ldots, \frac{(-1)^{k_{rj}-1}}{(\lambda_{rj} - \lambda_{11})^{k_{rj}}} \\ 0, \frac{1}{\lambda_{rj} - \lambda_{11}}, \ldots, \frac{(-1)^{k_{rj}-2}}{(\lambda_{rj} - \lambda_{11})^{k_{rj}-1}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0, \quad 0, \ldots, \quad \frac{1}{\lambda_{rj} - \lambda_{11}} \end{matrix} \right\|$$

$$j = 1, 2, \ldots, p_r; \quad r = 2, 3, \ldots. \tag{59}$$

Кроме этого, так как последовательности с общими членами $|\lambda_{rj}|$ ($j = 1, \ldots, p_r$, $r = 2, 3, \ldots$) на основании (7), (12) монотонно возрастают, то последовательности норм матриц $(W_r - \lambda_{11}E)^{-1}$ ($r = 2, 3, \ldots$) согласно (58), (59) монотонно стремятся к нулю.

Следовательно,

$$\lim_{r \to \infty} \alpha_r = 0. \tag{60}$$

Тогда, учитывая оценки (53), (56), в силу (44) и признака Абеля [12] (стр. 432) заключаем, что ряд (52) сходится равномерно.

Покажем теперь, что ряд (51) сходится равномерно при любом $j \geqslant 1$. Этим самым будет доказано, что вектор $V_m^{(2k_{11})}$ на сегменте $[0, L]$ обладает производными любого порядка.

Действительно, согласно (27), (28)

$$U_r^{(k_{11})} = B_r U_1^{(0)}, \tag{61}$$

где

$$B_r = -T_r (W_r - \lambda_{11}E)^{-1} T_r^{-1} H_{r,10}. \tag{62}$$

Матрица B_r, как это следует из последнего равенства, имеет производные любого порядка.

Тогда

$$\left| \frac{d^j U_r^{(k_{11})}}{d\tau^j} \right|^2 = \left| \sum_{i=0}^{j} C_j^i \frac{d^i B_r}{d\tau^i} \cdot \frac{d^{j-i} U_2^{(0)}}{d\tau^{j-i}} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=0}^{j} \left\| \frac{d^i B_r}{d\tau^i} \right\| \left| \frac{d^{j-i} (C_j^i U_1^{(0)})}{d\tau^{j-i}} \right| \right)^2. \tag{63}$$

Используя теперь неравенство Коши, получаем

$$\left| \frac{d^j U_r^{(k_{11})}}{d\tau^j} \right|^2 \leqslant \sum_{i=0}^{j} \left\| \frac{d^i B_r}{d\tau^i} \right\|^2 \cdot \sum_{i=0}^{j} \left| \frac{d^{j-i} (C_j^i U_1^{(0)})}{d\tau^{j-i}} \right|^2. \tag{64}$$

Функция $\sum_{i=0}^{j}\left|\frac{d^{j-i}(C_j^i U_1^{(0)})}{d\tau^{j-i}}\right|^2$ при каждом $j=1, 2, \ldots$ ограниченная и не зависит от r. Поэтому она на сходимость ряда, общий член которого равен правой части неравенства (64), не влияет.

Матрица $\frac{d^i B_r}{d\tau^i}$ $(i=0, 1, \ldots)$ представляет собой конечную сумму слагаемых, в каждое из которых входят матрицы $(W_r-\lambda_{11}E)^{-1}$, $H_{r,10}$ или соответствующие производные от них. Элементы матрицы $\frac{d^p(W_r-\lambda_{11}E)^{-1}}{d\tau^p}$ $(p=0, 1, \ldots, i)$, как это следует из (58), (59), по абсолютной величине при $r\to\infty$ стремятся к нулю. Поэтому в силу (44) и признака Абеля заключаем, что ряд (51) сходится равномерно.

Таким же способом можно показать, что на сегменте $[0, L]$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{r=2}^{\infty}\left|\frac{d^j U_r^{(k_{11}+s)}}{d\tau^j}\right|^2 \tag{65}$$

при любом $j=0, 1, \ldots;\ s=1, 2, \ldots$

Действительно, допустим, что ряды (65) равномерно сходятся для всех $0\leqslant s\leqslant p-1$. Покажем, что они равномерно сходятся и при $s=p$. С этой целью найдем вектор

$$U_r^{(k_{11}+p)}=T_r(W_r-\lambda_{11}E)^{-1}\Bigg[\sum_{i=0}^{k_{11}+p-1}T_r^{-1}U_r^{(i)}\lambda_1^{(k_{11}+p-i)}+$$

$$+T_r^{-1}\Bigg(\overset{\tau}{U}{}_r^{\prime(p)}-\sum_{i=0}^{\left[\frac{p}{k_{11}}\right]}H_{r,1i}U_1^{(p-k_{11}i)}-\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{i=0}^{\left[\frac{p}{k_{11}}\right]}H_{r,ki}U_k^{(p-k_{11}i)}\Bigg)\Bigg]. \tag{66}$$

Отсюда на основании (44) и признака Абеля делаем вывод, что ряд (65) при $s=p$ сходится равномерно.

Равномерная сходимость рядов (65) при любом $s=0, 1, \ldots$ и обеспечивает неограниченную дифференцируемость векторов $V_m^{(s)}$ $(s=0, 1, \ldots)$.

§ 3. Формальное решение в «нерезонансном» случае

Для «нерезонансного» случая справедлива теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то формальное частное решение системы* (11) *может быть представлено в виде*

$$q_m=U_m\tilde{\eta}+\tilde{R}_m e^{i\theta}, \tag{67}$$

$$\frac{d\tilde{\eta}}{dt}=\lambda_1\tilde{\eta}, \tag{68}$$

где U_m, λ_1 те же, что и в теореме 1, *а $\tilde{R}_m$ — $2n$-мерный вектор, допускающий представление*

$$\tilde{R}_m=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s R_m^{(s)},\quad m=1, 2, \ldots \tag{69}$$

Доказательство. В предыдущем параграфе указан способ определения векторов $U_m^{(s)}$ $(s=0, 1, \ldots)$ и функций $\lambda_1^{(s)}$. Поэтому здесь остается указать способ определения коэффициентов рядов (69). Для этого, подставляя вектор q_m из (67), (68) в систему (11) и сравнивая в полученном тождестве члены при $\widetilde{\eta}$ и свободные члены, получим соотношение (25) и соотношение

$$(H_m - i\nu E)\widetilde{R}_m = \Omega_m, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{70}$$

где

$$\Omega_m = \varepsilon\left(\overset{\tau}{\widetilde{R}'_m} - P_m - \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k}\widetilde{R}_k\right). \tag{71}$$

Выделяя в (70) члены порядка ε^s $(s = 0, 1, \ldots)$ и, считая при этом, что вектор Ω_m $(m = 1, 2, \ldots)$ неограниченно дифференцируемый по $\tau \in [0, L]$ (доказательство его дифференцируемости проводится так же, как и доказательство дифференцируемости вектора $V_m^{(s)}$), имеем

$$\widetilde{R}_m^{(s)} = (H_m - i\nu E)^{-1}\Omega_m^{(s)} \quad s = 0, 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots \tag{72}$$

Теорема доказана.

§ 4. Асимптотический характер решений

В настоящем параграфе докажем асимптотические свойства решений (20), (67). Для этого рассмотрим, например, «резонансный» случай. С этой целью введем в рассмотрение вектор

$$q_m^{(p)} = (U_m^{(p)}\eta^{(p)} + R_m^{(p)})\, e^{i\theta}, \tag{73}$$

где

$$\frac{d\eta^{(p)}}{dt} = (\lambda_1^{(p)} - i\nu)\,\eta^{(p)} + z^{(p)}, \tag{74}$$

$$\begin{gathered} U_m^{(p)} = \sum_{s=0}^{p}\mu_1^s U_m^{(s)}, \quad \lambda_1^{(p)} = \lambda_{11} + \sum_{s=1}^{p}\mu_1^s\lambda_1^{(s)}, \\ R_m^{(p)} = \sum_{s=0}^{p}\mu_1^s R_m^{(s)}, \quad z^{(p)} = \sum_{s=0}^{p}\mu_1^s z^{(s)}. \end{gathered} \tag{75}$$

Будем предполагать в дальнейшем, что начальные условия для точного решения системы (11) и для вектора $q_m^{(p)}$ одинаковы, т. е.

$$q_m|_{t=0} = q_m^{(p)}|_{t=0}. \tag{76}$$

Тогда может быть доказана теорема.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы 1 и при всех*

$$t \in \left[0, \frac{L}{\varepsilon}\right] \text{ и } 0 < \mu_1 \leqslant \mu_{10}.$$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{j=0}^{k_{11}-1}\mu_1^j\lambda_1^{(j)}\right) \leqslant 0, \tag{77}$$

то для любого конечного L и любого μ_1 из полуинтервала $(0, \mu_{10}]$ можно указать такую постоянную C_m, независящую от μ_1, что

$$|q_m - q_m^{(p)}| \leqslant \mu_1^{p+1-2k_{11}}C_m. \tag{78}$$

Доказательство. Подставляя из (73), (74) вектор $q_m^{(p)}$ в выражение

$$\frac{dq_m^{(p)}}{dt} - H_m q_m^{(p)} - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} q_k^{(p)} - \varepsilon P_m e^{i\theta},$$

имеем

$$\frac{dq_m^{(p)}}{dt} - H_m q_m^{(p)} - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} q_k^{(p)} - \varepsilon P_m e^{i\theta} =$$

$$= \left[\varepsilon \overset{\tau}{U}{}_m^{\prime(p)} - (H_m - \lambda_1^{(p)} E) U_m^{(p)} - \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} U_k^{(p)} \right] \eta^{(p)} e^{i\theta} +$$

$$+ \left[U_m^{(p)} z^{(p)} - (H_m - i\nu E) R_m^{(p)} + \varepsilon (\overset{\tau}{R}{}_m^{\prime} - P_m - \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} R_k^{(p)}) \right] e^{i\theta} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{79}$$

Векторы, стоящие в правой части соотношения (79) при функциях $\eta^{(p)} e^{i\theta}$ и $e^{i\theta}$ в силу их построения имеют порядок малости $O(\mu_1^{p+1})$. Тогда согласно (77) соотношению (79) можно придать вид

$$\frac{dq_m^{(p)}}{dt} = H_m q_m^{(p)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} q_k^{(p)} + \varepsilon P_m e^{i\theta} + \mu_1^{p+1-k_{11}} F_{1m}, \tag{80}$$

где F_{1m} — вектор, ограниченный в окрестности $\mu_1 = 0$.

Представим точное решение системы (11) следующим образом

$$q_m = (U_m^{(p)} \xi_m + R_m^{(p)}) e^{i\theta}. \tag{81}$$

Тогда

$$q_m - q_m^{(p)} = U_m^{(p)} \zeta_m, \tag{82}$$

где

$$\zeta_m = (\xi_m - \eta^{(p)}) e^{i\theta}. \tag{83}$$

Скалярная функция ζ_m в силу (11), (80) будет удовлетворять системе

$$U_m^{(p)} \left(\frac{d\zeta_m}{dt} - \lambda_1^{(p)} \zeta_m \right) = \left[H_m U_m^{(p)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,k} U_k^{(p)} - \right.$$

$$\left. - U_m^{(p)} \lambda_1^{(p)} - \varepsilon \overset{\tau}{U}{}_m^{\prime(p)} \right] \zeta_m - \mu_1^{p+1-k_{11}} F_{1m}, \tag{84}$$

которую на основании (25) можно записать в виде

$$U_m^{(p)} \left(\frac{d\zeta_m}{dt} - \lambda_1^{(p)} \zeta_m \right) = \mu_1^{p+1} \widetilde{F}_m \zeta_m - \mu_1^{p+1-k_{11}} F_{1m}, \tag{85}$$

где $\widetilde{F}_m$ — вектор, ограниченный в окрестности точки $\mu_1 = 0$.

Так как согласно (37)

$$| U_m^{(0)} | \neq 0 \tag{86}$$

при любом $\tau \in [0, L)$, то для достаточно малых значений параметра $\mu_1 \in (0, \mu_{10}]$

$$| U_m^{(p)} | \neq 0. \tag{87}$$

Поэтому, умножая обе части системы (85) на вектор, сопряженный к вектору $U_m^{(p)}$, получим

$$\frac{d\zeta_m}{dt} = \lambda_1^{(p)}\zeta_m + \mu_1^{p+1}\alpha_m\zeta_m + \mu_1^{p+1-k_{11}}\beta_m, \tag{88}$$

где α_m, β_m — функции, ограниченные для всех $\tau \in [0, L]$ и $\mu_1 \in (0, \mu_{10}]$.

Отсюда, учитывая (76), (77), может быть легко получена оценка

$$|\zeta_m| \leqslant \mu_1^{p+1-2k_{11}}a_m, \tag{89}$$

где a_m — постоянная, независящая от μ_1.

Поскольку векторы $U_m^{(0)}, \ldots, U_m^{(p)}$ в силу теоремы 1 дифференцируемые на сегменте $[0, L]$, то из соотношений (82), (89) следует справедливость теоремы 3.

Заметим, что из неравенства (78) следует, что вектор $q_m^{(p)} \to q_m$ при $\mu_1 \to 0$ для всех $p > 2k_{11} - 1$. Этим самим и доказан асимптотический характер построенного нами частного решения системы (11) в «резонансном» случае.

В случае «нерезонанса» оценка (78) улучшается. В этом случае при выполнении условий теоремы 3 может быть получена оценка

$$|q_m - q_m^{(p)}| \leqslant \mu_1^{p+1-k_{11}}C_m. \tag{90}$$

В заключение автор пользуется случаем выразить искреннюю благодарность Ю. Л. Далецкому за ценные советы при решении данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
2. О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, ГИТТЛ, М., 1953.
3. Є. Ф. Фещенко, Асимптотичний розв'язок безконечної системи диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, Доп. АН УРСР, № 2, 1954.
4. Є. Ф. Фещенко, Н. І. Шкіль, І. І. Маркуш, Асимптотичний розв'язок деяких класів систем лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, що мають параметр, Наук. конф. Київськ. пед. ін-ту, Тези доповідей, 1958.
5. І. І. Маркуш, Про асимптотичне представлення розв'язків системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу, коефіцієнти якої залежать від параметра, Наук. зап. Київськ. пед. ін-ту, т. 30, 1958.
6. Ю. Л. Далецкий, Є. Г. Крейн, О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. 2, № 4, 1950.
7. Ю. Л. Далецкий, Об асимптотическом решении одного векторного уравнения, ДАН СССР, т. 92, 1953.
8. Н. И. Шкиль, Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, ДАН СССР, т. 150, № 5, 1963.
9. Н. И. Шкиль, Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения, Изв. вузов, Матем., № 2 (39), 1964.
10. Н. І. Шкіль, Про удосконалення алгоритму побудови асимптотичного розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь, що мають параметр, Доп. АН УРСР, № 3, 1965.
11. Ю. Л. Далецький, Є. Г. Крейн, Деякі властивості операторів, що залежать від параметра, Доп. УРСР, № 6, 1950.
12. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Физматгиз, М., т. 2, 1962.

Поступила 28.IV 1965 г.
Киев