Приближенное решение интегральных уравнений с запаздывающим аргументом методом Ю. Д. Соколова

М. М. Галь

Развитию метода Ю. Д. Соколова [1] посвящено ряд работ, среди которых отметим монографию А. Ю. Лучки [2]. К. Б. Бараталиев [3, 4] применил этот метод к приближенному решению интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом. В случае вырождения начального множества в точку и когда запаздывающая функция $\Delta(x)$ в правой окрестности этой точки растет медленнее x, алгоритм [3, 4] совпадает с методом Пикара.

В данной заметке обобщается один из алгоритмов [2] на случай интегральных уравнений с запаздывающим аргументом, доказывается сходимость процесса последовательных приближений, а также приводится оценка погрешности. В заключение рассмотрен пример.

1. В пространстве L^p рассмотрим уравнение

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, y(\xi - \Delta(\xi))\, d\xi, \tag{1}$$

где λ — регулярное значение, интервал (a, b) — конечный, комплексно-значные функции $f(x)$, $K(x, \xi)$ от действительных переменных x, ξ заданы соответственно в областях: $[a - \tau_0, b]$, $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$ и удовлетворяют условиям:

$$\left\{\int_a^b \left[\int_a^b |K(x - \Delta(x), \xi)|^q\, d\xi\right]^{\frac{p}{q}} dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$\left\{\int_a^b |f(x - \Delta(x))|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right), \tag{2}$$

$$\int_a^b |f(x - \Delta(x))|\, dx < \infty, \quad \int_a^b \operatorname{vrai}\max_{\xi} |K(x - \Delta(x), \xi)|\, dx < \infty \ (p = 1,\ q = \infty), \tag{3}$$

$$\operatorname{vrai}\max_x |f(x - \Delta(x))| < \infty, \quad \operatorname{vrai}\max_x \int_a^b |K(x - \Delta(x), \xi)|\, d\xi < \infty$$

$$(p = \infty,\ q = 1); \tag{4}$$

$\leqslant \Delta(x) \leqslant \tau_0$ (особый случай не исключается), $\Delta(x)$ — непрерывная функция, причем $\Delta'(\sigma(x)) \neq 1$, где $\sigma(x)$ — функция, обратная

$$F(x) = x - \Delta(x), \quad K(x - \Delta(x), \xi) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (x - \Delta(x)) \,\overline{\in}\, [a, b]. \tag{5}$$

Пусть $\{\varphi_i(x)\}$ и $\{\psi_i(x)\}$ — системы линейно-независимых функций, заданных на отрезке $[a-\tau_0, b]$ и принадлежащих соответственно пространствам L^p и L^q.

За нулевое приближение принимаем произвольную функцию $y_0(x) \in L^p$. В n-м приближении положим

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)[y_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) + \alpha_n(\xi)]\, d\xi, \tag{6}$$

где

$$\alpha_n(x) = \sum_{i=1}^k c_{ni}\varphi_i(x)\,^*, \tag{7}$$

а коэффициенты c_{ni} определяются из условий:

$$\int_a^b \{\alpha_n(x) - \delta_n(x - \Delta(x))\} \overline{\psi_i(x)}\, dx = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

$$\delta_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

На основании (7), (8) для определения c_{nj} имеем систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^k \gamma_{ij} c_{nj} = \int_a^b \overline{\psi_i(x)}\, \delta_n(x - \Delta(x))\, dx, \tag{10}$$

где

$$\gamma_i = \int_a^b \varphi_j(x) \overline{\psi_i(x)}\, dx.$$

Пусть

$$D_k = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{k1} & \cdots & \gamma_{kk} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда

$$c_{nj} = \sum_{i=1}^k \frac{D_{ij}}{D_k} \int_a^b \overline{\psi_i(x)}\, \delta_n(x - \Delta(x))\, dx, \tag{11}$$

где D_{ij} — алгебраическое дополнение элемента γ_{ij}. Подставив (11) в (7) получим:

$$\alpha_n(x) = \int_a^b S_k(x, \eta)\, \delta_n(\eta - \Delta(\eta))\, d\eta, \tag{12}$$

где

$$S_k(x, \eta) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{D_{ij}}{D_k} \varphi_j(x) \overline{\psi_i(\eta)}. \tag{13}$$

Легко видеть, что функция $S_k(x, \eta)$ удовлетворяет условиям:

$$S_k(x, \eta) = \int_a^b S_k(x, \xi)\, S_k(\xi, \eta)\, d\xi, \tag{14}$$

---

* В работе [5] рассмотрен основной вариант метода Ю. Д. Соколова, а также его модификация, в которой коэффициенты c_{ni} определяются из условия минимума соответствующего функционала.

$$\left\{\int_a^b\left[\int_a^b |S_k(x,\eta)|^q\,d\eta\right]^{\frac{p}{q}}dx\right\}^{\frac{1}{p}}<\infty. \tag{15}$$

Учитывая (12, 14), n-е приближение представим в виде:

$$y_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y_{n-1}(\xi-\Delta(\xi))d\xi+\lambda\int_a^b M_k(x,\xi)\,\alpha_n(\xi)\,d\xi, \tag{16}$$

где

$$M_k(x,\xi)=\int_a^b K(x,t)\,S_k(t,\xi)\,dt. \tag{17}$$

Следовательно

$$\delta_n(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\delta_{n-1}(\xi-\Delta(\xi))\,d\xi+\lambda\int_a^b M_k(x,\xi)\,[\alpha_n(\xi)-\alpha_{n-1}(\xi)]\,d\xi$$

и для определения $\alpha_n(x)$ получим линейное интегральное уравнение:

$$\alpha_n(x)=\lambda\int_a^b S_k(x,\eta)\int_a^b K(\eta-\Delta(\eta),\xi)\,\delta_{n-1}(\xi-\Delta(\xi))\,d\xi d\eta+$$

$$+\lambda\int_a^b S_k(x,\eta)\int_a^b M_k(\eta-\Delta(\eta),\xi)\,[\alpha_n(\xi)-\alpha_{n-1}(\xi)]\,d\xi d\eta.$$

Очевидно, введя обозначения:

$$H_k(x,\xi)=\int_a^b S_k(x,\eta)\,M_k(\eta-\Delta(\eta),\xi)\,d\eta, \tag{18}$$

$$\varepsilon_{n-1}(x)=f(x)-y_{n-1}(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,y_{n-1}(\xi-\Delta(\xi))\,d\xi, \tag{19}$$

$$g_{n-1}(x)=\int_a^b S_k(x,\eta)\,\varepsilon_{n-1}(\eta-\Delta(\eta))\,d\eta, \tag{20}$$

получим

$$\alpha_n(x)=g_{n-1}(x)+\lambda\int_a^b H_k(x,\xi)\,\alpha_n(\xi)\,d\xi. \tag{21}$$

Допустим, что λ не является собственным значением ядра $H_k(x,\xi)$. Тогда $\alpha_n(x)$ можно выразить через резольвенту:

$$\alpha_n(x)=g_{n-1}(x)+\lambda\int_a^b R_k(x,\xi,\lambda)\,g_{n-1}(\xi)\,d\xi, \tag{22}$$

где

$$R_k(x,\xi,\lambda)=H_k(x,\xi)+\lambda\int_a^b H_k(t,\xi)\,R_k(x,t,\lambda)\,dt. \tag{23}$$

2. Докажем сходимость метода Ю. Д. Соколова. Из (6), (9), (19) следует:

$$\delta_n(x)=\lambda\int_a^b[K(x,\xi)-M_k(x,\xi)]\,[\delta_{n-1}(\xi-\Delta(\xi))-\alpha_{n-1}(\xi)]\,d\xi+$$

$$+ \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \alpha_n(\xi)\, d\xi, \tag{24}$$

$$\varepsilon_{n-1}(x) = \lambda \int_a^b [K(x, \xi) - M_k(x, \xi)]\,[\delta_{n-1}(\xi - \Delta(\xi)) - \alpha_{n-1}(\xi)]\, d\xi. \tag{25}$$

Подставив (25) в (20) и полученный результат — в (22), будем иметь:

$$\alpha_n(x) = \lambda \int_a^b \int_a^b Q_k(x, \eta, \lambda)\,[K(\eta - \Delta(\eta), \xi) - M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi)]\, z_{n-1}(\xi)\, d\xi d\eta, \tag{26}$$

где

$$Q_k(x, \eta, \lambda) = S_k(x, \eta) + \lambda \int_a^b S_k(t, \eta)\, R_k(x, t, \lambda)\, dt, \tag{27}$$

$$z_n(x) = \delta_n(x - \Delta(x)) - \alpha_n(x). \tag{28}$$

На основании (24) и (26)

$$\delta_n(\eta - \Delta(\eta)) = \int_a^b \Omega_k(\xi, \eta, \lambda)\, z_{n-1}(\xi)\, d\xi, \tag{29}$$

где

$$\Omega_k(\xi, \eta, \lambda) = \lambda K(\eta - \Delta(\eta), \xi) - \lambda M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi) +$$
$$+ \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K(\eta - \Delta(\eta), t)\, Q_k(t, \eta, \lambda)\,[K(\eta - \Delta(\eta), \xi) - M_k(\eta - \Delta(\eta), \xi)]\, d\eta dt.$$

Поэтому из (29), (12) и (28) вытекает

$$z_n(x) = \int_a^b L_k(\xi, x, \lambda)\, z_{n-1}(\xi)\, d\xi, \tag{30}$$

где

$$L_k(\xi, x, \lambda) = \Omega_k(\xi, x, \lambda) - \int_a^b S_k(x, \eta)\, \Omega_k(\xi, \eta, \lambda)\, d\eta. \tag{31}$$

Применяя неравенство Гельдера, из (29) и (30) получим:

$$\left\{\int_a^b |\delta_n(\eta - \Delta(\eta))|^p d\eta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \overline{\Omega}_k(\lambda) \left\{\int_a^b |z_{n-1}(\xi)|^p\, d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{32}$$

$$\left\{\int_a^b |z_n(x)|^p\, dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \overline{L}_k(\lambda) \left\{\int_a^b |z_{n-1}(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \overline{L}_k^{n-1}(\lambda) \left\{\int_a^b |z_1(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{33}$$

где

$$\overline{\Omega}_k(\lambda) = \left\{\int_a^b \left[\int_a^b |\Omega_k(\xi, \eta, \lambda)|^q d\xi\right]^{\frac{p}{q}} d\eta\right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{34}$$

$$\overline{L}_k(\lambda) = \left\{\int_a^b \left[\int_a^b |L_k(\xi, x, \lambda)|^q\, d\xi\right]^{\frac{p}{q}} dx\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{35}$$

Наконец,

$$\left\{\int_a^b |\delta_n(\eta - \Delta(\eta))|^p d\eta\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \overline{\Omega}_k(\lambda)\, \overline{L}_k^{n-2}(\lambda) \left\{\int_a^b |z_1(\xi)|^p\, d\xi\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Если $\overline{L}_k(\lambda) < 1$, то $\left\{\int\limits_a^b |\delta_n(\eta - \Delta(\eta))|^p d\eta\right\}^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n=\infty]{} 0$. Легко доказать, что $\left\{\int\limits_a^b |\delta_n(x)|^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Но пространство L^p полное, поэтому отсюда вытекает существование предела $y^*(x)$ последовательности $\{y_n(x)\}$. Очевидно, $y^*(x) \in L^p$ и является решением уравнения (1).

Теорема: *Если λ^* — регулярное значение, выполняются условия (2) — (4) и*

$$v(x) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_a^b S_k(x, \eta)\, v(\eta - \Delta(\eta)) d\eta, \quad v(x) \in L^p, \tag{36}$$

то $\overline{L}_k(\lambda) \to 0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3 [2].

Данная теорема утверждает, что при достаточно большом k всегда можно выбрать функцию $S_k(x, \eta)$ так, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости метода осреднения функциональных поправок.

3. Учитывая (29) и (33), оценим $\delta_n(\eta - \Delta(\eta))$:

$$|\delta_n(\eta - \Delta(\eta))| \leqslant \overline{\Omega}_k(\eta, \lambda)\, \overline{L}_k^{n-2}(\lambda) \left\{\int\limits_a^b |z_1(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}},$$

где
$$\overline{\Omega}_k(\eta, \lambda) = \left\{\int\limits_a^b |\Omega_k(\xi, \eta, \lambda)|^q d\xi\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Следовательно,

$$|y^*(\eta - \Delta(\eta)) - y_n(\eta - \Delta(\eta))| \leqslant \overline{\Omega}_k(\eta, \lambda) \left\{\int\limits_a^b |z_1(\xi)^p| d\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \frac{\overline{L}_k^{n-1}(\lambda)}{1 - \overline{L}_k(\lambda)}.$$

и окончательно получим оценку:

$$\left\{\int\limits_a^b |y^*(x) - y_n(x)^p dx\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_a^b |\overline{\Omega}_k(\eta, \lambda)|^p d\eta\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int\limits_a^b |z_1(\xi)|^p d\xi\right\}^{\frac{1}{p}} \frac{\overline{L}_k^{n-1}(\lambda)}{1 - \overline{L}_k(\lambda)} \tag{37}$$

где
$$M = \sup_x [1 - \Delta'(\sigma(x))]$$

(имеется в виду та ветвь, которая обеспечивает наибольшее значение выражению $1 - \Delta'(\sigma(x))$).

Примечание. Если системы функций $\{\varphi_i(x)\}$ и $\{\psi_i(x)\}$ — биортогональные и нормированные, то формулы (11), (13) перепишутся так:

$$c_{ni} = \int\limits_a^b \overline{\psi_i(x)}\, \delta_n(x - \Delta(x))\, dx, \tag{11'}$$

$$S_k(x, \eta) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x)\, \overline{\psi_i(\eta)}. \tag{13'}$$

4. Пример. Рассмотрим интегральное уравнение

---

* Утверждение типа альтернативы Фредгольма имеется в работе [6], в которой рассматривается уравнение, аналогичное (1) в пространстве C.

$$y(x) = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \int_0^1 (\sqrt{\xi} - x)\, y(\xi - \xi^2)\, d\xi,$$

которое имеет точное решение $y(x) = x + 1$.

Пусть $p = q = 2$, $k = 1$, $y_0(x) = 0$, $\varphi_1(x) = \psi_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ортонормированные на $[-1, 1]$ полиномы Лежандра). Для данного уравнения, на основании (35), $\overline{L}_1(1) = 0{,}22457 < 1$, т. е. достаточное условие сходимости метода Ю. Д. Соколова выполняется. Легко видеть, что здесь имеем особый случай, так как начальное множество вырождается в точку нуль, запаздывающая функция $\Delta(x) = x^2$ превращается в начальной точке в нуль и на $[0, 1]$ растет не быстрее x. Согласно алгоритму (6) — (8), в первом приближении получим:

$$y_1(x) = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \alpha_1 \int_0^1 (\sqrt{\xi} - x)\, d\xi = \frac{13}{6}x + \frac{23}{105} + \alpha_1\left(\frac{2}{3} - x\right),$$

$$\int_0^1 \left[\alpha_1 - \frac{13}{6}(x - x^2) - \frac{23}{105} - \alpha_1\left(\frac{2}{3} - x + x^2\right)\right]\frac{\sqrt{2}}{2}\, dx = 0, \quad \alpha_1 = \frac{731}{630},$$

$$y_1(x) = \frac{317}{315}x + \frac{134}{135} \approx 1{,}00635x + 0{,}99259.$$

Аналогично во втором приближении будем иметь:

$$y_2(x) \approx 0{,}99996x + 1{,}00005.$$

x	$y(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y(x) - y_1(x)$	$y(x) - y_2(x)$
0,0	1,00000	0,99259	1,00005	0,00742	—0,00005
0,2	1,20000	1,19386	1,20004	0,00614	—0,00004
0,4	1,40000	1,39513	1,40003	0,00487	—0,00003
0,6	1,60000	1,59640	1,60003	0,00360	—0,00003
0,8	1,80000	1,79767	1,80002	0,00233	—0,00002
1,0	2,00000	1,99894	2,00001	0,00106	—0,00001

Из таблицы видно, что уже второе приближение дает хороший результат, в то время как алгоритм [3] в этом случае превращается в обыкновенный процесс последовательных приближений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Д. Соколов, Метод осреднения функциональных поправок, изд-во «Наукова думка», К., 1966.
2. А. Ю. Лучка, Теория и применение метода осреднения функциональных поправок, Изд-во АН УССР, К., 1963.
3. К. Б. Бараталиев, Применение метода Ю. Д. Соколова к решению интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом, Тр. по матем. физ. и мех., вып. 21 (матем.), Фрунзе, 1965.
4. К. Б. Бараталиев, Приближенное решение линейных двумерных интегральных уравнений с отклоняющимся аргументом методом Ю. Д. Соколова, Материалы XIII научн. конф. проф. - препод. состава физ. - матем. фак., Фрунзе, 1965.
5. К. Б. Бараталиев, Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Сб. «Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии», изд-во «Илим», Фрунзе, 1965.
6. М. Меджитов, Об интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях с отклоняющимся аргументом, Сб. «Исследования по дифференциальным уравнениям и их применению», изд-во «Наука», Алма-Ата, 1965.

Поступила 11.III 1966 г.
Киев