# О представлении вакуумного среднего полевых операторов в пространстве с индефинитной метрикой

*В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук*

1. Рассмотрим пространство $S_n$ функций $\varphi(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$ $(|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2})$. Пусть $f(x) = \overline{f(-x)}$ — линейный непрерывный функционал над $S_n$. Введем на $S_n$ билинейную форму

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (f, \varphi * \psi^*) \quad (\varphi, \psi \in S_n), \tag{1}$$

где $\psi^*(x) = \overline{\psi(-x)}$, $\varphi * \psi^* = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \overline{\psi(t-x)}\, dt$, $(f, \varphi)$ обозначает действие функционала $f$ на основную функцию $\varphi$.

Будем говорить, что обобщенная функция $f(x)$ эрмитово-индефинитна (э. и.) с $\varkappa$ отрицательными квадратами (целое $\varkappa < \infty$), если в $S_n$ найдется по крайней мере одно отрицательное подпространство $S_{n,-}$ $(\langle \varphi, \varphi \rangle < 0$, $\varphi \in S_{n,-}$, $\varphi \neq 0)$ размерности $\varkappa$ и для любых $\varkappa + 1$ векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\varkappa+1} \in S_n$ форма

$$\sum_{j,k=1}^{\varkappa+1} \langle \varphi_j, \varphi_k \rangle \xi_j \bar{\xi}_k$$

($\xi_j$ — произвольные комплексные числа) имеет не более $\varkappa$ отрицательных квадратов*.

Ясно, что непрерывная э. и. функция с $\varkappa$ отрицательными квадратами [1] является э. и. и в указанном выше смысле.

Определим в $S_n$ скалярное произведение $\langle .\,, . \rangle$ по формуле (1). Если функция $f(x)$ такова, что из $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ для любого $\varphi \in S_n$, следует, что $\varphi = 0$, то пополняя $S_n$ по этому скалярному произведению [2], получим некоторое пространство $H$ типа $\Pi_\varkappa$ [2]. Если же существуют такие $0 \neq \varphi \in S_n$, что $\langle \varphi, \psi \rangle = 0$ для произвольного $\psi \in S_n$, то их совокупность образует линейное множество $G$. Беря фактор-пространство $S_n$ по $G$, а затем пополняя, получим снова пространство с индефинитной метрикой типа $\Pi_\varkappa$, в котором следует проводить все последующие рассуждения, как и в $H$.

Аналогично тому, как это делается в [3], можно показать, что найдутся полиномы $P_j(t)$ $(j = 1, \ldots, n)$ степени $\varkappa$ такие, что

$$\left\langle P_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \varphi, \quad P_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \varphi \right\rangle \geqslant 0 \quad (\varphi \in S_n,\ j = 1, \ldots, n),$$

т. е. функции

$$\Phi_j = P_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \bar{P}_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

положительно определены (п. о.). Тогда функция

$$\Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x) = \sum_{j=1}^{n} P_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \bar{P}_j\left(-i \frac{\partial}{\partial x_j}\right) f(x)$$

---

* После сдачи этой статьи в печать авторы узнали, что обобщенные эрмитово-индефинитные функции с конечным числом отрицательных квадратов рассматривались также Ся До-шином (см. РЖМат. 1963, 9 Б436).

также п. о. По теореме Бохнера-Шварца [4]

$$\left(\sum_{j=1}^{n} P_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\overline{P}_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f,\ \varphi\right)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\varphi}(\lambda)\,d\mu(\lambda)$$

$$(\lambda=(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)),$$

где $\widetilde{\varphi}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,e^{-i(\lambda,x)}dx$, $(\lambda,\ x)=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx_n$ и $d\mu(\lambda)$ — некоторая положительная мера степенного роста. Используя равенство Парсеваля

$$(\varphi,\ \psi)=(2\pi)^n(\widetilde{\varphi},\ \widetilde{\psi}),$$

получим, что $\left(\sum\limits_{j=1}^{n} P_j\widetilde{\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\overline{P}_j\left(-i\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f},\ \widetilde{\varphi}\right)=(\mu,\ \widetilde{\varphi})$, откуда

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|P_j(\lambda_j)|^2\widetilde{f},\ \widetilde{\varphi}\right)=(\mu,\ \widetilde{\varphi}).$$

В смысле обобщенных функций это можно записать как

$$\sum_{j=1}^{n}|P_j(\lambda_j)|^2\widetilde{f}(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n)=\mu(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n).$$

Решая последнее уравнение относительно $\widetilde{f}$ в смысле обобщенных функций (проводя процесс регуляризации расходящихся интегралов), приходим к тому, что

$$(\widetilde{f},\ \widetilde{\varphi})=\left(\mu,\ \frac{\widetilde{\varphi}(\lambda)}{\sum\limits_{j=1}^{n}|P_j(\lambda_j)|^2}-\sum_{m=1}^{p}\left[\widetilde{\varphi}(E_m)+\frac{\partial\widetilde{\varphi}(E_m)}{\partial\lambda_1}(\lambda_1-\varepsilon_{m_1})+\ldots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial^{2k_m}\widetilde{\varphi}(E_m)}{\partial\lambda_n^{2k_m}}(\lambda-\varepsilon_{m_n})^{2k_m}\right]\widetilde{\varphi}_{E_m}(\lambda)\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}|P_j(\lambda_j)|^2}+\sum_{m=1}^{p}\sum_{q=0}^{2k_m}C_m^q\left(D^q\delta(E_m),\ \widetilde{\varphi}(\lambda)\right)\right),$$

здесь $E_m=(\varepsilon_{m_1},\ \ldots,\ \varepsilon_{m_n})$, где $\varepsilon_{m_j}$ пробегает все различные вещественные корни полинома $P_j$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$; $p=s_1\ldots s_n$, $s_j$ — число различных вещественных нулей полинома $P_j(j=1,\ \ldots,\ n)$, $k_m$ — максимальная кратность корней $\varepsilon_{m_j}(j=1,\ \ldots,\ n)$, являющихся координатами точки $E_m$, в полиномах $P_j$ соответственно, $\widetilde{\varphi}_{E_m}(\lambda)\in S_n$ — функция, равная единице в окрестности $U_m$ точки $E_m$ и нулю — вне $2U_m$ (окрестность не должна содержать особенных точек, отличных от $E_m$),

$$D^q=\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n}}{\partial\lambda_1^{q_1}\ldots\partial\lambda_n^{q_n}}\quad(q_1+q_2+\ldots+q_n=q),$$

а

$$C_m^q=\frac{1}{q_1!\ldots q_n!}(\widetilde{f},\ (\lambda_1-\varepsilon_{m_1})^{q_1}\ldots(\lambda_n-\varepsilon_{m_n})^{q_n}.$$

**2.** Будем рассматривать релятивистскую теорию нейтрального скалярного поля, которая описывается некоторой системой аксиом [5], из которых нам понадобятся только следующие:

1. Пространство состояний $\mathfrak{H}$ является пространством с индефинитной метрикой типа $\Pi_\varkappa$ со скалярным произведением $[.,.]$.

2. Каждой основной функции четырех переменных $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3) \in S_4$ ставится в соответствие линейный оператор $A(\varphi)$ в $\mathfrak{H}$. Все операторы $A(\varphi)$ имеют общую область определения $D$, плотную в $\mathfrak{H}$, $A(\varphi) D \subset D$ и

$$A(\lambda\varphi) = \lambda A\varphi, \quad A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2); \quad A^*(\varphi) = A(\bar{\varphi}),$$

где $\varphi$, $\varphi_1$, $\varphi_2 \in S_4$, $\lambda$ — число, $A^*$ — оператор, сопряженный к $A$ в смысле $[.,.]$.

Если $\Phi$, $\Psi \in D$, то $[\Phi, A(\varphi)\Psi] = F(\varphi)$, где $F$ — обобщенная функция над $S_4$.

3. Существует унитарное в смысле $[.,.]$ представление $U(a, \Lambda)$ неоднородной группы Лоренца $(a, \Lambda)$ ($a$ — сдвиг, $\Lambda$ — однородная группа Лоренца), удовлетворяющее условиям:

$$U(a, \Lambda) D \subset D, \quad U(a, \Lambda) A(\varphi) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\varphi_{(a,\Lambda)}),$$

где

$$[\varphi_{(a,\Lambda)}](x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a)).$$

Каждой функции

$$\varphi(x^1, \ldots, x^n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x^k), \quad x^k = (x_0^k, x_1^k, x_2^k, x_3^k), \quad \varphi_k(x^k) \in S_4$$

сопоставим оператор

$$A(\varphi) = A(\varphi_1) \ldots A(\varphi_n)$$

с областью определения $D$.

5. В $\mathfrak{H}$ существует элемент $\Psi_0 \in D$ (вакуум), инвариантный относительно $U(a, 1)$ ($U(a, 1)$ — чистый сдвиг) [6], т. е. $U(a, 1)\Psi_0 = \Psi_0$, и такой, что множество $\{A(\varphi)\Psi_0\}$, где $\varphi$ пробегает функции вида (2), совпадает с $\mathfrak{H}$.

Вакуумным средним второго порядка полевых операторов будем называть $[A(\varphi_1)\Psi_0, A(\varphi_2)\Psi_0]$. На основании аксиомы 2 вакуумное среднее является билинейной формой над $S_4$ и в силу теоремы Шварца о ядре [4] допускает представление

$$[A(\varphi_1)\Psi_0, \quad A(\varphi_2)\Psi_0] = (W, \bar{\varphi}_1 \otimes \varphi_2)$$

($\otimes$ — знак тензорного произведения), где $W$ — линейный непрерывный функционал над $S_4 \otimes S_4$ — так называемый функционал Уайтмана. На основании аксиомы 3

$$[A(\varphi_{1(a,1)})\Psi_0, \quad A(\varphi_{2(a,1)})\Psi_0] = [U(a, 1) A(\varphi_1) U^{-1}(a, 1)\Psi_0,$$

$$U(a, 1) A(\varphi_2) U^{-1}(a, 1)\Psi_0] = [A(\varphi_1)\Psi_0, \; A(\varphi_2)\Psi_0],$$

т. е. обобщенная функция $W$ инвариантна относительно сдвигов. Поэтому [4]

$$[A(\varphi_1)\Psi_0, \; A(\varphi_2)\Psi_0] = (W, \bar{\varphi}_1 \otimes \varphi_2) = (f, \; \psi_1 * \varphi_2^{\bullet}),$$

где $f$ — некоторая обобщенная функция над $S_4$. Из введенной аксиоматики теории поля следует, что функция $f$ э. и. с $\varkappa$ отрицательными квадратами, в силу чего,

$$(f, \varphi_1 * \varphi_2^{*}) = (\tilde{f}, \tilde{\varphi}_1 \tilde{\tilde{\varphi}}_2) =$$

$$\left(\mu, \frac{\tilde{\varphi}_1 \tilde{\tilde{\varphi}}_2(\lambda)}{\sum_{j=1}^{4} |P_j(\lambda_j)|^2} - \sum_{m=1}^{p} \left\{\tilde{\varphi}_1(E_m)\tilde{\tilde{\varphi}}_2(E_m) + \frac{\partial}{\partial\lambda_1}[\tilde{\varphi}_1(\lambda)\tilde{\tilde{\varphi}}_2(\lambda)]_{\lambda=E_m}(\lambda_1 - \varepsilon_{m_1}) + \right.\right.$$

$$+ \ldots + \frac{\partial^{2k_m}}{\partial\lambda_4^{2km}} [\widetilde{\varphi}_1(\lambda) \widetilde{\widetilde{\varphi}}_2(\lambda)]_{\lambda=E_m} (\lambda_4 - \varepsilon_{m_4})^{2k_m} \Bigg\} \widetilde{\varphi}_{E_m}(\lambda) \frac{1}{\sum_{j=1}^{4} |P_j(\lambda_j)|^2} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p} \sum_{q=1}^{2k_m} C_m^q (D^q \delta(E_m), \widetilde{\varphi}(E_m)) \Bigg).$$

Отсюда видно, что *вакуумное среднее полевых операторов есть преобразование Фурье некоторой меры с некоторой регуляризацией.*

## ЛИТЕРАТУРА


1. М. Г. Крейн, Об интегральном представлении непрерывной эрмитово-индефинитной функции с конечным числом отрицательных квадратов, ДАН СССР, т. 125, № 1, 1959.
2. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн, Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, Тр. Моск. матем. об-ва, т. 5, 1956.
3. В. И. Горбачук, Об интегральном представлении эрмитово-индефинитных ядер (случай многих переменных), УМЖ, № 1, 1964.
4. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. IV, Физматгиз, М., 1961.
5. А. С. Уайтман, Некоторые математические проблемы релятивистской квантовой теории, Математика, Периодич. сб. перев. ин. статей, 6 : 4, 1962.
6. М. А. Наймарк, О перестановочных унитарных операторах в пространстве с индефинитной метрикой, ДАН СССР, т. 149, № 6, 1963.



Поступила 20. IV 1963 г.
Киев