О граф-группах групп автоморфизмов конечных графов

Э. Г. Давыдов

В работе изучается строение групп автоморфизмов конечных графов. На основании теоретико-графских соображений вводится метрика на группе и доказывается, что множество элементов группы, порожденных элементами, заполняющими шар с радиусом k и центром в единичном элементе группы, образуют нормальный делитель. Остальные элементы группы входят в классы смежности по этому нормальному делителю.

Пусть дан связный, неориентированный конечный граф, и пусть $a_1, \ldots, a_n$ — его вершины, G — его группа автоморфизмов, $g_1, \ldots, g_m$ — элементы группы автоморфизмов. Через $g_i a_s$ обозначим образ вершины a_s при отображении g_i. Через $\varrho(a_t, a_s)$ обозначим длину наименьшего пути, соединяющего вершины a_t и a_s. Расстояние между автоморфизмами g_r и g_l будем считать равным k, если

$$\max_{a_i} \varrho(g_r a_i, g_r a_i) = k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Этот факт обозначим следующим образом: $d(g_r, g_l) = k$. Очевидно, $d(g_r, g_l) = d(g_l, g_r)$, и если $d(g_r, g_l) = 0$, то $g_r = g_l$.

Лемма 1.

$$d(g_r, g_l) \leqslant d(g_r, g_t) + d(g_t, g_l), \tag{1}$$

где g_t — произвольный автоморфизм.

Доказательство. Пусть a_i — произвольная вершина, и пусть

$$\varrho(g_r a_i, g_l a_i) = k,$$

тогда

$$\varrho(g_r a_i, g_t a_i) + \varrho(g_t a_i, g_l a_i)$$

есть длина одного из путей из $g_r a_i$ в $g_l a_i$ с заходом в вершину $g_t a_i$, но этот путь заведомо не меньше, чем кратчайший путь из $g_r a_i$ в $g_l a_i$. Отсюда перебором по всем a_i получаем утверждение леммы.

Таким образом, функция $d(g_i, g_j)$ есть метрика на группе автоморфизмов графа A.

Возьмем элемент g_i и обозначим

$$N(g_i) = d(g_i, e),$$

где e — единичный элемент группы G. $N(g_i)$ будем называть нормой элемента g_i.

Лемма 2. *Для того, чтобы $d(g_i, g_j) = k$, необходимо и достаточно, чтобы $N(g_j^{-1} g_i) = k$.*

Доказательство. Пусть g_l — произвольный автоморфизм, тогда для любых g_k, g_r и a_s справедливо следующее равенство:

$$\varrho(g_k a_s, g_r a_s) = \varrho(g_l g_k a_s, g_l g_r a_s). \tag{2}$$

Но отсюда, взяв в качестве g_k элемент g_i, в качестве g_r — g_j и в качестве g_l — g_j^{-1}, получаем

$$\varrho(g_i a_s, g_j a_s) = \varrho(g_j^{-1} g_i a_s, a_s).$$

Этим доказана необходимость. Если

$$\varrho(g_j^{-1} g_i a_s, a_s) = k,$$

тогда в силу (2)

$$\varrho(g_1^{-1} g_i a_s, a_s) = \varrho(g_j g_j^{-1} g_i a_s, g_j a_s) = \varrho(g_i a_s, g_j a_s) = k.$$

Этим и завершается доказательство леммы.

Следствие 1.

$$N(g_j) = N(g_j^{-1}).$$

Для доказательства в лемме 2 достаточно взять $g_i = e$, тогда получим $d(e, g_j^{-1}) = d(g_j, e) = N(g_j) = N(g_j^{-1})$.

Следствие 2.

$$N(g_i g_j) \leqslant N(g_i) + N(g_j).$$

Действительно,

$$N(g_i g_j) = d(g_j, g_i^{-1}) \leqslant d(g_i, e) + d(e, g_i^{-1}) = N(g_j) + N(g_i^{-1}) = N(g_i) + N(g_j).$$

Рассмотрим теперь группу G и построим граф B_k, вершины которого есть элементы группы G. Вершины g_i и g_j будут считаться смежными, если

$$d(g_i, g_j) \leqslant k.$$

Для разных k мы будем получать, вообще говоря, различные графы B_k. Пусть $B_k^{(1)}, \ldots, B_k^{(l)}$ — компоненты связности графа B_k, причем $B_k^{(1)}$ — та компонента, которая содержит единицу группы G; через $G_k^{(i)}$ обозначим множество тех элементов группы G, которые являются вершинами компоненты $B_k^{(i)}$ графа B_k. Граф B_k будем называть в дальнейшем граф-группой k-го порядка группы G.

Теорема. *Множество $G_k^{(1)}$ есть нормальный делитель группы для любого k; $G_k^{(i)}$, $i \neq 1$, есть смежные классы группы по нормальному делителю $G_k^{(1)}$.*

Доказательство. Пусть e — единица группы G и пусть e_i, $i = 1, 2, \ldots, s$ — полный набор элементов группы G, смежных с e. Рассмотрим произвольный элемент $g_t \in G_k^{(1)}$. Пусть он соединен с e путем длины r. Тогда

$$g_t = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_r}. \tag{3}$$

Докажем это по индукции. Если g_t соединен с e путем единичной длины, тогда по определению $g_t = e_{i_1}$. Предположим, что (3) справедливо для всех элементов группы G, соединенных с e путем длины, меньшей чем r. Тогда, очевидно, что g_t смежен с некоторым элементом g_i, соединенным с e путем длины $r-1$, и в силу леммы 2 $N(g_i^{-1} g_t) \leqslant k$, но это значит, что

$$g_i^{-1} g_t = e_{i_r}$$

или

$$g_t = g_i e_{i_r}.$$

Отсюда в силу предположения индукции

$$g_t = e_{i_1} e_{i_r} \ldots e_{i_r}.$$

Докажем обратное утверждение. Пусть g_t имеет вид (3), тогда если $r = 1$, то g_t входит в $G_k^{(1)}$ в силу определения e_i. Предположим по индукции, что все элементы группы, имеющие вид (3) при $k < g$, входят в $G_k^{(1)}$, и рассмотрим

$$g_t = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{g-1}} e_{i_g} = g_i g_{i_g}.$$

По предположению индукции $g_i \in G_k^{(1)}$. Кроме того

$$N(g_i^{-1} g_t) = N(e_{i_g}) \leqslant k.$$

Отсюда в силу леммы 2

$$d(g_i, g_t) \leqslant k,$$

т. е. g_i смежен с g_t. Но тогда $g_t \in G_k^{(1)}$. Таким образом, мы доказали, что $G_k^{(1)}$ есть множество элементов вида (3). $G_k^{(1)}$ очевидно замкнуто относительно умножения. Для доказательства того, что $G_k^{(1)}$ есть подгруппа группы G, достаточно показать, что вместе с каждым элементом в $G_k^{(1)}$ входит и обратный ему. Но поскольку множество $G_k^{(1)}$ есть множество элементов вида (3), то достаточно доказать, что

$$e_i^{-1} = e_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

На основании следствия 1 из леммы 2

$$N(e_i) = N(e_i^{-1}) \leqslant k,$$

но отсюда следует, что e_i^{-1} смежно с e, а это и завершает доказательство. Таким образом доказано, что $G_k^{(1)}$ есть подгруппа группы G. Пусть теперь g_t удовлетворяет (3) и g_v — произвольный элемент группы. Рассмотрим

$$g_v^{-1} g_t g_v = g_v^{-1} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_{r-1}} e_{i_r} g_v = (g_v^{-1} e_{i_1} g_v)(g_v^{-1} e_{i_r} g_v) \ldots (g_v^{-1} e_{i_{r-1}} g_v)(g_v^{-1} e_{i_r} g_v). \tag{4}$$

В силу (4) для доказательства того, что $G_k^{(1)}$ есть нормальный делитель, достаточно показать, что

$$g_v^{-1} e_q g_v = e_p \qquad q = 1, 2, \ldots, s,$$

где g_v — произвольный элемент группы G, e_q—произвольный элемент группы, смежный с единицей.

Рассмотрим элементы g_v и $e_q g_v$. Так как e_q сдвигает каждую вершину не более чем на k ребер, то

$$d(g_v, e_q g_v) \leqslant k.$$

Но тогда по лемме 2

$$N(g_v^{-1} e_q g_v) = d(g_v, e_q g_v) \leqslant k,$$

а отсюда следует, что

$$g_v^{-1} e_q g_v = e_p.$$

Этим завершается доказательство того, что $G_k^{(1)}$ есть нормальный делитель. Рассмотрим теперь $G_k^{(i)}$, $i \neq 1$. Пусть $g_j \in G_k^{(i)}$ и $g_r \in G_k^{(i)}$; тогда существует путь длины w из g_j в g_r.

Если g_j и g_r смежны, то по лемме 2

$$g_r = g_j e_q.$$

Предположим по индукции, что если g_q и g_p соединены путем длины, меньшей чем w, то для любых p и q

$$g_q = g_p e_{i_1} \ldots e_{i_z} \quad z < w.$$

Но поскольку g_r и g_j соединены путем длины w, то найдется элемент g_p, соединеный путем длины w с g_r и смежный с g_j. Отсюда по предположению индукции и лемме 2 получаем, что

$$g_r = g_p e_{i_2} \ldots e_{i_w} = g_j e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_w}.$$

Но отсюда следует, что элементам $G_k^{(i)}$ $i \neq 1$, соответствуют элементы одного смежного класса. Обратное утверждение очевидно. Этим и завершается доказательство теоремы.

Следствие 1. *$G_0^{(1)} \subset G_1^{(1)} \subset G_2^{(1)} \subset \ldots \subset G_r^{(1)} = G$ есть нормальный ряд.*

Доказательство очевидно.

Следствие 2. *Если группа автоморфизмов некоторого графа проста, то у нее найдется система образующих, имеющих одинаковую норму.*

Доказательство. Поскольку группа проста, то ряд фактор-групп

$$G/G_k^{(1)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, r$$

до некоторого m будет состоять из групп, изоморфных G, а, начиная с m, все фактор-группы $G/G_k^{(1)}$ будут состоять из одного тождественного элемента. Но в этом случае $G_m^{(1)}$ будет включать всю группу G и множество элементов $e_i \in G_m^{(1)}$ будет содержать систему образующих группы G. Но в этом случае $N(e_i) = m$, так как если $N(e_p) = r < m$, то $G_r^{(1)}$ отлична от единичной группы, чего не может быть по определению m.

Автор выражает глубокую благодарность Л. М. Лихтенбауму за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. O r e, Theory of graphs, Collog publ. Amer. Math. Soc., Vol. 38., 1962.
2. G. S a b i d u s s i. On a class of fixed point-free graphs, Proc. Amer. Math. Soc., 1958.
3. А. Г. К у р о ш, Теория групп, Гостехиздат, М., 1953.

Поступила 14.VII 1965 г.
Москва