Два доказательства неравенства Коши между арифметическим и геометрическим средними системы неотрицательных чисел

В. К. Дзядык

Неравенство Коши между арифметическим и геометрическим средними неотрицательных чисел принадлежит к числу наиболее важных неравенств. В известной монографии Э. Беккенбаха и Р. Беллмана «Неравенства» (1965 г.) приведено 12 доказательств этого неравенства (см. §§ 4 — 16, ст. 12—33). В настоящей статье мы укажем два, на наш взгляд, новых доказательства этого неравенства. Первое из них мы приводим ввиду его большой простоты и элементарности, во втором, установим одно тождество между средним арифметическим и средними геометрическими системы положительных чисел, которое может быть использовано для оценки разности между арифметическим и геометрическим средними.

Теорема (Коши), *Среднее арифметическое произвольной системы неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ всегда больше или равно среднему геометрическому этих чисел и при этом равенство имеет место тогда и только тогда, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны между собой, т. е. всегда*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \tag{1}$$

и при этом

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n}$$

тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Доказательство 1. Так как при $n = 1$ теорема тривиальна, то мы предположим по индукции, что она имеет место для n неотрицательных чисел ($n \geqslant 1$) и докажем, что в таком случае она имеет место и для $n + 1$ неотрицательных чисел. Положим

$$\sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_k} = G_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

так, что

$$a_k = \frac{G_k^k}{G_{k-1}^{k-1}} \qquad k = 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Мы будем считать, что ни одно из чисел a_k (а, значит, и G_k) не равно нулю, ибо в последнем случае правая часть (1) тоже будет равна нулю и теорема становится очевидной. Тогда в силу предполагаемой справедливости теоремы для случая n чисел, учитывая, что при любом $k = 1, 2, \ldots$

$$x^k - kx + k - 1 = (x - 1)[x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x - (k - 1)] =$$
$$= (x - 1)^2 [x^{k-2} + 2x^{k-3} + \ldots + (k - 2)x + k - 1] \tag{4}$$

получим

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}}{n+1}=\frac{n\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}+a_{n+1}}{n+1}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{n\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}+\dfrac{G_{n+1}^{n+1}}{G_w^n}}{n+1}=G_{n+1}+\frac{nG_n^{n+1}+G_{n+1}^{n+1}}{(n+1)G_n^n}-G_{n+1}=$$

$$=G_{n+1}+\frac{G_n}{n+1}\left[\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}\right)^{n+1}-(n+1)\frac{G_{n+1}}{G_n}+n\right]=G_{n+1}+$$

$$+\frac{G_n}{n+1}\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}-1\right)^2\left[\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}\right)^{n-1}+2\left(\frac{G_{n+1}}{G_n}\right)^{n-2}+\ldots+(n-1)\frac{G_{n+1}}{G_n}+n\right]\geqslant$$

$$\geqslant G_{n+1}=\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\ldots a_{n+1}},$$

причем знак равенства здесь имеет место тогда и только тогда, когда, во-первых, $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}$, т. е. когда $a_1=a_2=\ldots=a_n\,(=G_n)$ и, во-вторых, когда $G_{n+1}=G_n$, т. е. действительно равенство возможно только в случае $a_1=a_2=\ldots=a_{n+1}$. Теорема доказана.

Доказательство 2. Как и раньше, будем считать, что ни одно из чисел a_k (а, значит, и G_k) не равно нулю. Тогда учитывая, что на основании (3)

$$a_1+a_2=G_1\left[\left(\frac{G_2}{G_1}\right)^2+1\right] \tag{5}$$

и принимая во внимание тождество (4), получим

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=G_n+\frac{1}{n}\{(a_1+a_2-2G_2)+(a_3+2G_2-3G_3)+$$

$$+(a_4+3G_3-4G_4)+\ldots+[a_n+(n-1)G_{n-1}-nG_n]\}=$$

$$=G_n+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}G_{k-1}\left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^k-k\frac{G_k}{G_{k-1}}+(k-1)\right]=G_n+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}G_{k-1}\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}-1\right)^2\left[\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^{k-2}+2\left(\frac{G_k}{G_{k-1}}\right)^{k-3}+\ldots+\right.$$

$$\left.+(k-2)\frac{G_k}{G_{k-1}}+k-1\right]. \tag{6}$$

Отсюда и вытекает, что всегда

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geqslant G_n=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}$$

и что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда $G_1=G_2=\ldots=G_n$, т. е. когда $a_1=a_2=\ldots=a_n$, что и требовалось доказать.

Поступила 3.VI 1966 г.
Киев