К вопросу об устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений n-го порядка с периодическими коэффициентами

К. В. Задирака, Г. А. Лось

В настоящей статье осуществлено обобщение известной теоремы А. М. Ляпунова [1] о неустойчивости решений уравнения $y'' + P(t)y = 0$, когда $P(t) \leqslant 0$, на линейные однородные дифференциальные уравнения n-ого порядка с ω-периодическими коэффициентами.

Обобщениями исследований А. М. Ляпунова занимались М. Г. Крейн и К. Р. Коваленко [2, 3]. В их работах изучены уравнения порядка $n=2m$, для которых доказано существование бесконечного числа зон устойчивости, уходящих в обе стороны на бесконечность, при значительных ограничениях, накладываемых на коэффициенты уравнений и на их характеристические числа.

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-ого порядка

$$\sum_{i=0}^{n} P_i(t)\cdot\frac{d^{n-i}y}{dt^{n-i}} = 0;\ P_0(t) = 1. \tag{1}$$

с определенными и непрерывными для всех значений t ω-периодическими коэффициентами $P_i(t)$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, коэффициент $P_1(t) = P_1(t+\omega)$ дифференцируем n раз при всех $t \geqslant 0$. Это уравнение с помощью подстановки $y = x\cdot e^{\frac{t}{n} - \frac{1}{n}\int P_1(t)dt}$ может быть приведено к виду:

$$\sum_{i=0}^{n} S_i(t)\cdot\frac{d^{n-i}x}{dt^{n-i}} = 0;\ S_0(t) = S_1(t) = 1, \tag{2}$$

где $S_i(t)$ $(i = 2, 3, 4, \ldots, n)$ — также определенные и непрерывные ω-периодические функции t. Для вычисления его фундаментальной системы решений рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} = \mu\cdot\sum_{i=2}^{n} S_i(t)\cdot\frac{d^{n-i}x}{dt^{n-i}}. \tag{3}$$

Согласно теореме А. М. Ляпунова [1], каждое решение $x(t,\mu)$ уравнения (3) является аналитической функцией параметра μ. Поэтому фундаментальная система решений уравнения (3) может быть представлена в виде:

$$x_j(t,\mu) = \sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\cdot x_{jk}(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Пусть она удовлетворяет следующим начальным условиям:

$$x_j^{(i-1)}(0,\mu) = \begin{cases}1, & \text{если } i = j;\\ 0, & \text{если } i \neq j\end{cases}\ (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Подставив значение $x_j(t,\mu)$ из равенств (4) в уравнение (3) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях μ в правой и левой частях полученного равенства, придем к следующей системе уравнений:

$$x_{jk}^{(n)}(t) + x_{jk}^{(n-1)}(t) = \sum_{i=2}^{n} S_i(t)\cdot x_{j,k-1}^{(n-i)}(t); \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots;\ x_{j,-1}^{(i)}(t) = 0). \tag{6}$$

Начальные условия для функций $x_{jk}(t)$ получаются из начальных условий (5):

$$x_j^{(i-1)}(0, \mu) = x_{j0}^{(i-1)}(0) + \mu x_{j1}^{(i-1)}(0) + \ldots = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \end{cases} \tag{7}$$

т. е.

$$x_{j0}^{(i-1)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j; \quad x_{jk}^{(i-1)}(0) = 0, \ \text{если } k \neq 0. \end{cases} \tag{8}$$

При $k = 0$ из равенства (6) имеем

$$\frac{d^n x_{j0}(t)}{dt^n} + \frac{d^{n-1} x_{j0}(t)}{dt^{n-1}} = 0. \tag{9}$$

Отсюда, учитывая начальные условия (8), находим

$$x_{10}(t) = 1; \ x_{20}(t) = t; \ x_{30}(t) = \frac{t^2}{2!}, \ldots, x_{n-1,0}(t) = \frac{t^{(n-2)}}{(n-2)!} \tag{10}$$

$$x_{n0}(t) = \int\limits_0^t dt_1 \ldots \int\limits_0^{t_{n-3}} dt_{n-2} \int\limits_0^{t_{n-2}} e^{-t_{n-1}} dt_{n-1} \int\limits_0^{t_{n-1}} e^{t_n} dt_n.$$

Решение уравнения (6) имеет вид:

$$x_{jk}(t) = \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t_1} dt_2 \ldots \int\limits_0^{t_{n-3}} dt_{n-2} \int\limits_0^{t_{n-2}} e^{-t_{n-1}} dt_{n-1} \int\limits_0^{t_{n-1}} F_{j,k-1}(t_n) \cdot e^{t_n} dt_n, \tag{11}$$

где $F_{j,k-1}(t)$ представляет собой правую часть уравнений (6).

Характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (3), можно записать так:

$$\Delta(\varrho) = | x_j^{(i-1)}(\omega, \mu) - \varrho E | = 0, \tag{12}$$

где E — единичная матрица.
Раскрыв определитель в левой части равенства (12), получим:

$$\sum_{k=0}^{n} A_k \cdot \varrho^{n-k} = 0, \tag{13}$$

где

$$A_0 = 1, \ A_1(\mu) = -\sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1}^{(i)}(\omega, \mu), \tag{14}$$

и, если учесть формулу Остроградского — Лиувилля,

$$A_n = (-1)^n \cdot e^{-\omega}. \tag{15}$$

Выражения для остальных A_k не выписываем, так как они в дальнейшем в этой статье не понадобятся.

Характеристическое уравнение (13) с помощью подстановки $\varrho = \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}$ преобразуется к виду:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0, \tag{16}$$

где a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ выражаются через A_i следующим образом:

$$a_i = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \sum_{p=0}^{i} (-1)^{i-p} \cdot C_{n-k}^{p} \cdot C_k^{i-p} + (-1)^{n-i} \cdot C_n^i \cdot e^{-\omega} \tag{17}$$

и C_m^r обозначает число сочетаний из m элементов по r.
Зная выражения для a_i и положив $i = n - s$, получаем формулу:

$$a_{n-s} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \sum_{p=0}^{n-s} (-1)^{n-s-p} \cdot C_k^{n-s-p} \cdot C_{n-k}^{p} + (-1)^s \cdot C_n^{n-s} \cdot e^{-\omega},$$

в которой должно быть $n - s - p \leqslant k$, $p \leqslant n - k$, т. е. p может принимать следующие значения $n - s - k$, $n - s - k + 1$, $n - s - k + 2, \ldots, n - k$.
Учитывая это, получим:

$$a_{n-s} = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot (-1)^k \cdot [C_{n-k}^{s} - C_{n-k}^{s-1} \cdot C_k' + \ldots + (-1)^s \cdot C_k^s] + (-1)^s \cdot C_n^s \cdot e^{-\omega}. \tag{18}$$

Теперь можно составить определитель Гурвица и, рассматривая все его диагональные миноры, выделить области устойчивости и неустойчивости в пространстве коэффициентов A_k характеристического уравнения (13).

Уравнение (13) можно записать в другой форме, если коэффициенты A_i выразить через $\Delta^{(n-i)}(0)$:

$$A_{n-1} = \Delta'(0);\ A_{n-2} = \frac{1}{2!}\Delta''(0); \ldots; A_1 = \frac{1}{(n-1)!}\Delta^{(n-1)}(0);\ \ A_0 = \frac{1}{n!}\Delta^{(n)}(0).$$

Вычислим коэффициенты A_k в первом приближении, обозначив их через A_{k0} $(k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$.
Для этого составим определитель $\Delta_0(\varrho)$, который получается из $\Delta(\varrho)$ заменой в нем функций $x_j^{(i-1)}(\omega, \mu)$ их первыми приближениями $x_{j0}^{(i-1)}(\omega)$:

$$\Delta_0(\varrho) = | x_{j0}^{(i-1)}(\omega) - \varrho E | = 0. \tag{19}$$

Дифференцируя определитель (19) n раз по ϱ, найдем, что

$$A_{k_0} = (-1)^k \cdot \frac{1}{n} \cdot C_n^k \cdot (n - k + k e^{-\omega}). \tag{20}$$

Характеристическое уравнение (13), если заменить в нем коэффициенты A_k их первыми приближениями A_{k_0}, примет вид:

$$(\varrho - 1)^{n-1} \cdot (\varrho - e^{-\omega}) = 0.$$

Отсюда $\varrho_k = 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $\varrho_n = e^{-\omega}$.
Итак, характеристические показатели дифференциального уравнения (3) в первом приближении равны 1 (кратности $n - 1$) и $e^{-\omega}$. Такими же будут характеристические показатели и уравнения (2), так как решения уравнений (2) и (3) в первом приближении совпадают.

Точка O — начало координат пространства коэффициентов A_k находится внутри области устойчивости, так как в этом случае характеристическое уравнение (13) имеет вид: $\varrho^n + (-1)^n \cdot e^{-\omega} = 0$ и все его характеристические показатели по модулю меньше 1. Рассмотрим гиперпрямую, проходящую через точку A_{k0} и O:

$$\frac{A_k}{A_{k_0}} = v \qquad (k = 1, 2 \ldots, n-1).$$

Если в характеристическое уравнение (13) вместо A_k подставить $A_{k0}\cdot v$, то после преобразования получим:

$$[(-1)^n\cdot e^{-\omega}+\varrho^n](1-v)+v(\varrho-1)^n+(1-e^{-\omega})(\varrho-1)^{n-1}\cdot v=0.$$

Теперь с помощью теоремы Коши легко установить, что на интервале $(1, \infty)$ данное уравнение при $v>1$ имеет действительный корень, а это значит, что при $|A_k|>|A_{k0}|$ движение неустойчиво. В частности, на данной гиперпрямой движение неустойчиво, если $A_1<-(n-1+e^{-\omega})$. Вычислим теперь a_s при $A_k=A_{k0}\cdot v$.
Имеем:

$$a_s=[1+(-1)^{n-s}\cdot e^{-\omega}]\cdot C_n^s+v\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\cdot C_n^k\cdot(n-k+ke^{-\omega})\cdot[C_{n-k}^s-$$

$$-C_{n-k}^{s-1}\cdot C_k^1+\ldots+(-1)^s\cdot C_k^s]=C_n^s\cdot[1+(-1)^{n-s}\cdot e^{-\omega}](1-v).$$

Подставив значение A_{k0} в (18), получаем:

$$a_{n-s}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot C_n^k\cdot(n-k+ke^{-\omega})\left(C_{n-k}^s+\sum_{p=1}^{s-1}(-1)^p\cdot C_{n-k}^{s-p}\cdot C_k^p+(-1)^s\cdot C_k^s\right)+$$

$$+C_n^s+(-1)^s\cdot C_n^s\cdot e^{-\omega}=C_n^s[1+(-1)^s e^{-\omega}](1-v),$$

т. е. формула для a_s, полученная ранее, сохраняет свой вид, если $s>\frac{n}{2}$, но $s\neq n-1,\ n$.
Значения a_{n-1} и a_n имеют вид:

$$a_{n-1}=(1-e^{-\omega})\cdot[(2^{n-1}-n)v+n],$$

$$a_n=(1+e^{-\omega})\cdot[(2^{n-1}-1)v+1].$$

Теперь очевидно, что при $v>1$ все $a_s<0\ (s=0, 1, 2, \ldots, n-2)$, а $a_{n-1}>0$ и $a_n>0$ при всех $v>0$. Это означает, что необходимые условия устойчивости не выполняются, и поэтому при $v>1$ движение неустойчиво (на гиперпрямой $A_{k0}O$). Если $v<1$, то необходимые условия устойчивости выполняются, т. е. движение может быть устойчивым только при $v<1$ (рассматриваем случай $v>0$). При $v<0$ все $a_s>0\ (s=0, 1, 2, \ldots, n-2)$, а a_{n-1} и a_n будут больше нуля, если $v>-\frac{1}{2^{n-1}-1}$, т. е. движение может быть устойчивым, если $v>-\frac{1}{2^{n-1}-1}$. В случае же $v>1$ или $v<-\frac{1}{2^{n-1}-1}$ движение неустойчиво.

Все проделанные в предыдущем параграфе вычисления и полученные результаты относятся к точкам, находящимся на гиперпрямой $A_{k0}O$. Если же точки не находятся на этой прямой, то эти заключения могут оказаться неверными. Однако оказывается верной следующая

Теорема. *Если коэффициент A_1 характеристического уравнения* (13) *удовлетворяет неравенствам $A_1<-(n-1+e^{-\omega})$ или $A_1>n-1+(-1)^n\cdot e^{-\omega}$, то решение уравнения* (2) *неустойчиво.*

Доказательство. Необходимые условия устойчивости можно записать так:

$$a_i=\sum_{k=0}^{n-1}A_k\sum_{p=0}^{i}(-1)^{i-p}\cdot C_k^{i-p}\cdot C_{n-k}^p+(-1)^{n-i}\cdot C_n^i\cdot e^{-\omega}>0\quad(i=0, 1, 2, \ldots, n).\tag{21}$$

Рассмотрим a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-2)$ и каждое из a_i умножим на $\frac{n-1}{2^{n-2}} \times$ $\times E\left|\frac{n-i}{2}\right|$, где E — целая часть числа.
Если теперь умноженные неравенства сложить, то получим

$$A_1 > -(n-1+e^{-\omega}),$$

т. е. движение может быть устойчивым в том случае, если

$$A_1 > -(n-1+e^{-\omega}).$$

Итак, движение, описываемое уравнением (2), неустойчиво, если

$$A_1 < -(n-1+e^{-\omega}). \tag{22}$$

Рассмотрим теперь a_s $(s = 2, 3, \ldots, n)$. Умножим каждые из a_s на $E\left[\frac{s}{2}\right]$ и, вычислив сумму $\sum_{s=2}^{n} a_s \cdot E\left[\frac{s}{2}\right]$, получим $A_1 < n-1+(-1)^n \cdot e^{-\omega}$. Таким образом, движение неустойчиво, если

$$A_1 > n-1+(-1)^n \cdot e^{-\omega}, \tag{23}$$

что и требовалось.
Итак, область устойчивости находится между двумя параллельными гиперплоскостями:

$$A_1 = -(n-1+e^{-\omega}) \text{ и } A_1 = n-1+(-1)^n \cdot e^{-\omega}.$$

Выясним, при каких условиях будет выполняться неравенство (22). На основании формулы (14) имеем:

$$A_1(\mu) = -[x_{10}(\omega) + x'_{20}(\omega) + \ldots + x_{n0}^{(n-1)}(\omega)] - \sum_{m=1}^{\infty} [x_{1m}(\omega) + x'_{2m}(\omega) + \ldots + x_{nm}^{(n-1)}(\omega)] \cdot \mu^m = -(n-1+e^{-\omega}) - \sum_{m=1}^{\infty} [x_{1m}(\omega) + x'_{2m}(\omega) + \ldots + x_{nm}^{(n-1)}(\omega)] \cdot \mu^m. \tag{24}$$

Чтобы получить характеристическое уравнение для дифференциального уравнения (2), нужно в (13) положить $\mu = -1$. Тогда

$$A_1(-1) = -(n-1+e^{-\omega}) - \sum_{m=1}^{\infty} [x_{1m}(\omega) + x'_{2m}(\omega) + \ldots + x_{nm}^{(n-1)}(\omega)] \cdot (-1)^m. \tag{25}$$

Докажем теперь следующую теорему, являющуюся обобщением теоремы Ляпунова А. М. о неустойчивости решений дифференциального уравнения $y'' + P(t)y = 0$ с периодическим коэффициентом $P(t)$:

Теорема. *Если при всех $t \geqslant 0$ коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют неравенствам $S_k(t) \leqslant 0$, и при этом хотя бы один из $S_k(t) \neq 0$, то решение уравнения (2) неустойчиво.*

Доказательство: Пусть все $S_k(t) \leqslant 0$ и хотя бы один из $S_k(t)$ не обращается тождественно в нуль. Так как все $x_{j0} \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то все $F_{j2} \leqslant 0$ и поэтому все

$$x_{j1}^{(i)} \leqslant 0, \quad x_{j0}^{(i)} \geqslant 0; \ldots; x_{j,2k+1}^{(i)} \leqslant 0; \quad x_{j,2k}^{(i)} \geqslant 0, \ldots; \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Итак, если все $S_k(t) \leqslant 0$, то при m-четных $x_{jm}^{(i)} \geqslant 0$, а при m-нечетных $x_{jm}^{(i)} \leqslant 0$. Вследствие этого

$$[x_{1m}(\omega) + x'_{2m}(\omega) + \ldots + x_{nm}^{(n-1)}(\omega)](-1)^m \geqslant 0$$

при любых m, как четных, так и нечетных.
Тогда в этом случае $A_1 < -(n - 1 + e^{-\omega})$, и движение неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения.
2. К. Р. Коваленко, М. Г. Крейн, О некоторых исследованиях А. М. Ляпунова по дифференциальным уравнениям с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXV, № 4, 1950.
3. М. Г. Крейн, Обобщение некоторых исследований А. М. Ляпунова о линейных дифференциальных уравнениях с периодическими коэффициентами, ДАН СССР, т. LXXIII, № 3, 1950.

Поступила 22.X 1964 г.
Киев — Хмельницкий