Об одном аналитическом следствии условия унитарности

О. С. Парасюк

Изучая аналитические свойства амплитуды рассеяния в аксиоматической квантовой теории поля H. Lehmann доказал, что амплитуда рассеяния* $T(W, \cos\vartheta)$ допускает разложение в ряд по многочленам Лежандра

$$T(W, \cos\vartheta) = \frac{1}{\pi^2}\frac{W}{K}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,C_l(W)\,P_l(\cos\vartheta),$$

$$C_l(W) = \frac{\pi^2}{2}\frac{K}{W}\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta\, T(W, \cos\vartheta)\, P_l(\cos\vartheta), \tag{1}$$

который сходится в эллипсе с центром в начале и с осями x_0, $\sqrt{x_0^2 - 1}$, где

$$x_0(W) = \left\{1 + \frac{(m_1^2 - \mu^2)(m_2^2 - m^2)}{K^2[W^2 - (m_1 - m_2)^2]}\right\}, \tag{2}$$

---

* Мы пользуемся обозначениями работы [1].

$$K^2 = \frac{[W^2-(m+\mu)^2][W^2-(m-\mu)^2]}{4W^2}$$

m, μ — массы рассеивающихся частиц; p, k, k' — соответствующие импульсы,

$$W=(p+k)^2; \qquad \Delta^2 = -\frac{(k-k')^2}{4}, \qquad \cos\vartheta = 1-\frac{2\Delta^2}{K^2}.$$

В этой же работе Лемана доказано, что мнимая часть амплитуды рассеяния является регулярной функцией $\cos\vartheta$ внутри большего эллипса с осями $2x_0^2-1$; $2x_0\sqrt{x_0^2-1}$. Последний результат получен Леманом на основе условия унитарности

$$\operatorname{Im} C_l(W) \geqslant [\operatorname{Re} C_l(W)]^2 + [\operatorname{Im} C_l(W)]^2. \tag{3}$$

Как хорошо известно из теории рядов Лежандра, на эллипсе сходимости должна обязательно находиться хотя бы одна особая точка рассматриваемой функции.

В настоящей заметке покажем, что если принять во внимание условие унитарности в форме (3), то можно утверждать, что особой точкой функции $\operatorname{Im} T(W, \cos\vartheta)$ обязательно будет точка $\cos\vartheta = 2x_0^2-1$, т. е. точка лежащая на пересечении эллипса сходимости с положительной вещественной полуосью.

Несмотря на то, что аналитическим свойствам амплитуды посвящена уже многочисленная литература, нам не удалось обнаружить нигде формулировки этого, очень просто доказываемого, утверждения. Для доказательства нам необходимо использовать только следующее тривиальное следствие условия унитарности $\operatorname{Im} C_l(W) \geqslant 0$.

Таким образом, задача редуцируется к изучению аналитических свойств на эллипсе сходимости для функций, разложения которых в ряды Лежандра имеют неотрицательные коэффициенты. Сейчас мы увидим, что сформулированное выше утверждение является следствием следующей классической теоремы Адамара — Прингсгейма:

Если коэффициенты c_n элемента, определяемого рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, расположены на плоскости (z) внутри угла $2\varphi < \pi$ с вершиной в $z=z_0$, биссектрисой которого является положительная действительная ось, и если радиус сходимости этого ряда конечен, то точка $z=z_0+R$ является особой точкой для порождаемой данным элементом аналитической функции. Для нас достаточно рассмотреть случай $\varphi=0$.

Чтобы перенести это утверждение на ряды по многочленам Лежандра, достаточно сослаться на теорему Фабера [4], [5] о соответствии особенностей между функциями, задаваемыми степенными разложениями и разложениями по многочленам Лежандра с теми же коэффициентами. Это соответствие позволяет утверждать, что теорема Адамара — Прингсгейма переносится и на ряды по полиномам Лежандра.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lehmann, Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer, Il Nuovo Cimento, Vol. X, 4, 1958, 578—590.
2. С. Швебер, Введение в релятивистсткую теорию волновых полей, М., 1960.
3. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. I, М., ИЛ, 1952.
4. G. Faber, Über Reihen nach Legendreschen Polynomen, Jahresbericht DMV, XVI, 1907, 109—115.
5. О. Є. Парасюк, Аналитическое продолжение разложений по многочленам Гегенбауэра, УМЖ, т. 18, № 4, 1966.

Поступила 23.III 1966 р.
Киев