Взаимное расположение подпространств в конечномерном унитарном пространстве

Х. М. Хавиди

1. Задача, рассматриваемая в предлагаемой заметке, возникла в связи с исследованиями об унитарной эквивалентности матриц (см. [1]), но представляет на наш взгляд и самостоятельный интерес.

Если в n-мерном евклидовом векторном пространстве заданы n попарно ортогональных направленных осей, то, как хорошо известно, каждая направленная прямая (одномерное подпространство) однозначно определяется своими направляющими косинусами, которые можно считать координатами этой направленной прямой.

Рассмотрим следующую задачу: пусть R—n-мерное унитарное пространство, а

$$R = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_q,\ 1 < q \leqslant n, \tag{1}$$

расщепление R в ортогональную сумму подпространств $V_1, V_2, \dots, V_q$. Мы ищем совокупность объектов, определенных в подпространствах V_i, определяющих однозначно произвольное подпространство $W \subset R$. Такие объекты можно, в некотором смысле, считать «координатами» подпространства W относительно «базиса» (1). Мы указываем набор таких объектов, обобщающих естественным образом направляющие косинусы. Основным при этом будет понятие угла между векторными подпространствами в R.

2. По определению под углами $\measuredangle(V, W)$ и $\measuredangle(W, V)$ между подпространствами V и W мы понимаем два линейных оператора ψ и φ, определяющихся в V и W равенствами

$$\psi = \Pi_V^W \Pi_W^V,\ \varphi = \Pi_W^V \Pi_V^W,$$

где Π_V^W есть ограничение проектора Π_V на W, а Π_W^V есть ограничение проектора Π_W на V.

Относительно операторов $\psi = \measuredangle(V, W)$ и $\varphi = \measuredangle(W, V)$ имеют* место следующие простые предложения.

Предложение 1. Оператор ψ является неотрицательно эрмитовым оператором в V, причем ψ будет положительно определенным тогда и только тогда, когда $V \cap W^{\perp} = 0$. Аналогично, φ является неотрицательно эрмитовым оператором в W, причем φ будет положительно определенным тогда и только тогда, когда $W \cap V^{\perp} = 0$.

Предложение 2. Собственные значения операторов ψ и φ заключены между 0 и 1, причем, если $0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, 1, 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_s < 1$, являются собственными значениями оператора φ соответственно с кратностями $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha$, то $0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s, 1$ также являются собственными значениями оператора φ соответственно с кратностями $\alpha_0', \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \alpha$, где

$$\alpha_0 = \dim(V \cap W^{\perp}),\ \alpha = \dim(V \cap W),\ \alpha_0' = \dim(W \cap V^{\perp}).$$

Предложение 3. Если V и W расщепляются относительно операторов ψ и φ в виде

$$V = V_{[0]} \perp V_{[\lambda_1]} \perp V_{[\lambda_2]} \perp \dots \perp V_{[\lambda_s]} \perp V_{[1]}, \tag{2}$$

$$W = W_{[0]} \perp W_{[\lambda_1]} \perp W_{[\lambda_2]} \perp \dots \perp W_{[\lambda_s]} W_{[1]}, \tag{3}$$

где $V_{[\lambda_i]}$ и $W_{[\lambda_i]}$ — собственные подпространства операторов, соответственно ψ и φ, отвечающие одному и тому же собственному значению λ_i, $i =$

* См. [2] §§ 30—32, где рассматривается евклидово пространство R.

$= 0, 1, \dots, s+1,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_{s+1} = 1$, то имеют место

$$1^0.\quad V_{[0]} = V \cap W^{\perp},\ W_{[0]} = W \cap V^{\perp}$$

и поэтому

$$V_{[0]} \perp W,\ W_{[0]} \perp V.$$

$$2^0.\ V_{[1]} = W_{[1]} = V \cap W.$$

$$3^0.\ V_{[\lambda_i]} \perp W_{[\lambda_j]} \text{ при } i \neq j,\ i, j = 1, 2, \dots, s.$$

Определение 1. Будем говорить, что подпространства U_1 и U_2 образуют скалярные углы, если $\measuredangle(U_1, U_2) = \lambda\varepsilon_{U_1}$, $\measuredangle(U_2, U_1) = \lambda\varepsilon_{U_2}$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, ε_{U_1} и ε_{U_2} — тождественные операторы в U_1 и U_2 соответственно.

В случае, когда $\lambda = 0$, будем говорить, что U_1 и U_2 образуют прямые углы. Очевидно, U_1 и U_2 образуют прямые углы тогда и только тогда, когда они взаимно ортогональны. Легко проверяется следующее предложение.

Предложение 4. Если подпространства U_1 и U_2 имеют различные размерности и образуют скалярные углы, то эти углы обязательно прямые, и, следовательно, U_1 и U_2 взаимно ортогональны.

Возвращаясь к предложению 3, получаем, что все углы $\measuredangle(V_{[\lambda_i]}, W_{[\lambda_j]})$ и $\measuredangle(W_{[\lambda_j]}, V_{[\lambda_i]})$ являются скалярными, причем

$$\measuredangle(V_{[\lambda_i]},\ W_{[\lambda_j]}) = \delta_{ij}\lambda_i\varepsilon_{V_{[\lambda_i]}},\ \measuredangle(W_{[\lambda_i]},\ V_{[\lambda_j]}) = \delta_{ij}\lambda_i\varepsilon_{W_{[\lambda_i]}},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера; $i, j = 0, 1, \dots, s+1,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_{s+1} = 1$.

В дальнейшем, при расщеплении подпространств V и W относительно образованных между ними углов $\measuredangle(V, W)$ и $\measuredangle(W, V)$ мы, вместо записей (2) и (3), будем пользоваться записями

$$V = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_t, \tag{4}$$

$$W = W_1 \perp W_2 \perp \dots \perp W_t, \tag{5}$$

$$V_i = V_{[\lambda_{i-1}]},\ W_i = W_{[\lambda_{i-1}]},\ i = 1, 2, \dots, t,\ t = s+2,\ \lambda_0 = 0,\ \lambda_{t-1} = 1.$$

3. Мы хотим показать, что произвольное подпространство $W \subset R$ определяется относительно расщепления (1) однозначно некоторым набором углов (т. е. некоторым набором линейных операторов), определенных в подпространствах V_i, их подпространствах и прямых суммах. Так как самый общий случай описывается достаточно сложно, то мы сперва рассмотрим два частных случая.

Случай I. Подпространство $W \subset R$ удовлетворяет относительно расщепления (1) следующим условиям

$$W \cap V_i^{\perp} = 0,\ i = 1, 2, \dots, q. \tag{6}$$

В этом случае оказалась верной следующая теорема.

Теорема 1. *Если подпространство $W \subseteq R$ удовлетворяет условиям (6) относительно расщепления (1), то W однозначно определяется следующими двумя последовательностями углов*

$$\psi_i = \measuredangle(V_i, W), \qquad i = 1, 2, \dots, q, \tag{7}$$

$$\psi_{1j} = \measuredangle(V_1 \perp V_j, W),\ j = 2, 3, \dots, q. \tag{8}$$

0 теореме 1 сделаем несколько замечаний.

1^0. Примеры показывают, что углы (7) вообще говоря недостаточны для определения W однозначно: если для двух подпространств W и W' имеет место $\measuredangle(V_i, W) = \measuredangle(V_i, W')$ для всех $i = 1, 2, \dots q$, то это только означает, что существует унитарный оператор, переводящий все *подпрост-*

ранства V_i в себя, а W в W', но отсюда еще не следует совпадение W и W'.

2^0. В «системе координат» W вместо последовательности углов (8) можно взять любую из следующих последовательностей

$$\psi_{kj} = \measuredangle (V_k \perp V_j, W), \ j = 1, \dots, k-1, \ k+1, \dots, q,$$

отвечающую определенному выбору числа k, $k = 2, 3, \dots, q$.

3^0. Зная углы (7) и (8), мы можем вычислить подпространство $W \subset \subset R$. Больше того, если в подпространствах V_i, $V_1 \perp V_j$, $i = 1, 2, \dots, q$, $j = 2, 3, \dots, q$, выбраны произвольным образом эрмитовые операторы ψ_i и ψ_{1j} с собственными значениями, заключенными между 0 и 1, то можно указать необходимые и достаточные условия, чтобы существовало подпространство $W \subset R$, удовлетворяющее всем требованиям

$$W \cap V_i^{\perp} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$
$$\measuredangle (V_i, W) = \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, q,$$
$$\measuredangle (V_1 \perp V_j, W) = \psi_{1j}, \quad j = 2, 3, \dots, q.$$

Случай II. Все углы $\measuredangle (V_i, W)$ и $\measuredangle (W, V_i)$, $i = 1, 2, \dots, q$, являются скалярными непрямыми углами, т.е.

$$\psi_i = \measuredangle (V_i, W) = \lambda_i \varepsilon_{V_i}, \ \varphi_i = \measuredangle (W, V_i) = \lambda_i \varepsilon_W,$$

где $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, q$, ε_{V_i} и ε_W—тождественные операторы в V_i и W. Ввиду предложения 4 предыдущего пункта непосредственно следует, что в этом случае также выполняются условия (6), причем $\dim V_i = \dim W$, $i = 1, 2, \dots, q$. Таким образом, случай II является подслучаем случая I. Случай II будем называть случаем (H). Оказалось, что в случае (H) углы (8) однозначно определяют углы (7) и поэтому в случае (H) подпространство W однозначно определяется углами (8).

При доказательстве, что в случае (H) углы (8) однозначно определяют углы (7), основную роль играет следующая лемма, имеющая, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

Лемма I. *Для любого ортогонального расщепления $R = V_1 \perp V_2 \perp \dots \dots \perp V_q$, $1 \leqslant q \leqslant n$, и любого подпространства $W \subset R$ сумма собственных значений всех углов*

$$\psi_i = \measuredangle (V_i, W), \ i = 1, 2, \dots, q$$

совпадает с размерностью подпространства W.

Рассмотрим теперь общий случай. Для простоты рассуждений нам удобно записывать подпространство W и расщепление (1) следующим образом

$$\left.\begin{array}{l} R = V_1 \perp V_2 \perp \dots \perp V_q \\ W = W \end{array}\right\}, \tag{9}$$

т.е. в виде одной пары ортогональных расщеплений, первое из которых имеется в R, а второе имеется в W. Назовем правую часть первого расщепления пары (9) ее верхней строкой, а правую часть второго расщепления пары (9) ее нижней строкой. Ясно, что нижняя строка пары (9) состоит из одной компоненты, совпадающейся со всем подпространством W. Естественно предположить, что $W \cap V_i^{\perp} \neq W$, $i = 1, 2, \dots, q$. Применим к паре (9) каноническую процедуру, которую мы будем называть методом уплотнения. Для этого пусть V_{i_1} есть первая компонента верхней строки пары (9), $1 \leqslant i_1 \leqslant q$, обладающая тем свойством, что углы $\measuredangle (V_{i_1}, W)$ и $\measuredangle (W, V_{i_1})$ не являются одновременно скалярными углами и пусть V_{i_1} и W

расщепляется относительно углов $\measuredangle(V_{i_1}, W)$ и $\measuredangle(W, V_{i_1})$ в виде

$$V_{i_1} = V_{i_1 1} \perp V_{i_1 2} \perp \dots \perp V_{i_1 t_1},$$
$$W = W_1^1 \perp W_2^1 \perp \dots \perp W_{t_1}^1.$$

Подставляя в пару (9) вместо компонент V_{i_1} и W их полученные расщепления, переходим от пары (9) к паре (9′) вида

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1 \perp \dots \perp V_{i_1-1} \perp V_{i_1 1} \perp \dots \perp V_{i_1 t_1} \perp V_{i_1+1} \perp \dots \perp V_q, \\ W &= W_1^1 \perp W_2^1 \perp \dots \perp W_{t_1}^1. \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (9')$$

Перенумеруем компоненты верхней строки пары (9′) следующим образом

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1^1 \perp V_2^1 \perp \dots \perp V_{q_1}^1 \\ W &= W_1^1 \perp W_2^1 \perp \dots \perp W_{p_1}^1 \end{aligned}\right\}, \qquad (9^1)$$

где $q_1 = q + t_1 - 1$, $p_1 = t_1$, $V_i^1 = V_i$, $i = 1, 2, \dots, i_1 - 1$; $V_k^1 = V_{i_1 k - i_1 + 1}$, $k = i_1, \dots, i_1 + t_1 - 1$; $V_l^1 = V_{l - t_1 + 1}$, $l = i_1 + t_1, \dots, q_1$. Если в паре (9^1) не все углы $\measuredangle(V_i^1, W_j^1)$ и $\measuredangle(W_i^1, V_i^1)$, $i = 1, 2, \dots, q_1$, $j = 1, 2, \dots, p_1$, являются скалярными, то предположим, что $(j_1 j_2)$ есть наименьшая возможная в лексикографическом порядке следования пар индексов (ij), $i = 1, 2, \dots, q_1$, $j = 1, 2, \dots, p_1$, обладающая тем свойством, что углы $\measuredangle(V_{j_1}^1, W_{j_2}^1)$ и $\measuredangle(W_{j_2}^1, V_{j_1}^1)$ не являются одновременно скалярными углами. Пусть $V_{j_1}^1$ и $W_{j_2}^1$ расщепляются относительно углов $\measuredangle(V_{j_1}^1, W_{j_2}^1)$ и $\measuredangle(W_{j_2}^1, V_{j_1}^1)$ в виде

$$V_{j_1}^1 = V_{j_1 1}^1 \perp V_{j_1 2}^1 \perp \dots \perp V_{j_1 t_2}^1,$$
$$W_{j_2}^1 = W_{j_2 1}^1 \perp W_{j_2 2}^1 \perp \dots \perp W_{j_2 t_2}^1.$$

Подставляя в пару (9^1) вместо компонент $V_{j_1}^1$ и $W_{j_2}^1$ их полученные расщепления, переходим от пары (9^1) к паре $(9'')$

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1^1 \perp \dots \perp V_{j_1-1}^1 \perp V_{j_1 1}^1 \perp \dots \perp V_{j_1 t_2}^1 \perp V_{j_1+1}^1 \perp \dots \perp V_{q_1}^1, \\ W &= W_1^1 \perp \dots \perp W_{j_2-1}^1 \perp W_{j_2 1}^1 \perp \dots \perp W_{j_2 t_2}^1 \perp W_{j_2+1}^1 \perp \dots \perp W_{p_1}^1. \end{aligned}\right\}. \qquad (9'')$$

Перенумеруя каждую из строк пары $(9'')$ в точности, как это было сделано для первой строки пары (9′), переходим к паре (9^2)

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1^2 \perp V_2^2 \perp \dots \perp V_{q_2}^2 \\ W &= W_1^2 \perp W_2^2 \perp \dots \perp W_{p_2}^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (9^2)$$

где $q_2 = q_1 + t_2 - 1$, $p_2 = p_1 + t_2 - 1$. Продолжая процесс последовательного уплотнения, мы через конечное число шагов r получим пару (9^r)

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1^r \perp V_2^r \perp \dots \perp V_{q_r}^r \\ W &= W_1^r \perp W_2^r \perp \dots \perp W_{p_r}^r \end{aligned}\right\}, \qquad (9^r)$$

обладающую тем свойством, что все углы $\measuredangle(V_i^r, W_j^r)$ и $\measuredangle(W_j^r, V_i^r)$, $i = 1, 2, \dots, q_r$, $j = 1, 2, \dots, p_r$, являются скалярными углами. Обозначим через s, $1 \leqslant s \leqslant r$, наименьшее число, обладающее тем свойством, что пара

$$\left.\begin{aligned} R &= V_1^s \perp V_2^s \perp \dots \perp V_{q_s}^s \\ W &= W_1^s \perp W_2^s \perp \dots \perp W_{p_s}^s \end{aligned}\right\}, \qquad (9^s)$$

удовлетворяет следующему требованию: если для каждого индекса j, $1 \leqslant j \leqslant p_s$, обозначим через $V_{\varrho_{j1}}^s, V_{\varrho_{j2}}^s, \dots, V_{\varrho_{j\sigma_j}}^s$, $1 \leqslant \varrho_{j1} < \varrho_{j2} < \dots < \varrho_{j\sigma_j} \leqslant$

$\leqslant q_s$, все компоненты верхней строки пары (9^s), каждая из которых не ортогональна к компоненте W_j^s, то отсюда сразу должно следовать, что

$$W_j^s \cap V_{\varrho_{jl}}^{s\perp} = 0, \ l = 1, 2, \dots, \sigma_j. \tag{10}$$

Ясно, что такое число s всегда существует, так как пара ($9'$) удовлетворяет вышеуказанному требованию. Положим

$$R_j^s = V_{\varrho_{j1}}^s \perp V_{\varrho_{j2}}^s \perp \dots \perp V_{\varrho_{j\sigma_j}}^s. \tag{11}$$

Согласно теореме 1 первого случая, условия (10) влекут за собой, что компонента $W_j^s \subset R_j^s$ однозначно определяется следующими двумя последовательностями углов

$$\sphericalangle (V_{\varrho_{jl}}^s, W_j^s), \ l = 1, 2, \dots, \sigma_j, \tag{12}$$

и

$$\sphericalangle (V_{\varrho_{j1}}^s \perp V_{\varrho_{jk}}^s, W_j^s), \ k = 2, 3, \dots, \sigma_j. \tag{13}$$

Относительно углов (12) и (13) существенно заметить следующее.

1^0. Если для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant p_s$, имеет место равенство $\sigma_j = 1$, то $W_j^s = V_{\varrho_{j1}}^s$ и поэтому последовательность (12) состоит из одного угла $\sphericalangle (V_{\varrho_{j1}}^s, W_j^s) = \varepsilon_{V_{\varrho_{j1}}^s}$, являющегося тождественным оператором в $V_{\varrho_{j1}}^s$. При этом, очевидно, последовательность (13) является пустой.

2^0. Если для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant p_s$, имеет место, что $\sigma_j > 1$ и компонента W_j^s удовлетворяет случаю (H) относительно расщепления (11), то естественно вычеркнуть последовательность (12), отвечающую этому же индексу j, так как при этом последовательность (12) однозначно определяется последовательностью (13).

3°. Согласно 1° и 2° предложения 3 некоторые компоненты как верхней, так и нижней строки пары (9^s) могут быть нулевыми подпространствами в R. Для каждой нулевой компоненты W_j^s естественно считать последовательности (12) и (13) пустыми, так как для такой компоненты не существует расщепление (11).

Определение 2. Пару (9^s) назовем первой уплотненной формой для пары (9).

Ясно, что пара (9^s) однозначно определяется исходной парой (9) и, таким образом, установлена следующая теорема, обобщающая теорему 1 первого случая.

Теорема 2. *При заданном в R ортогональном расщеплении* (I) *любое подпространство $W \subset R$ определяется однозначно следующими углами*: 1. *Последовательность s углов* $\{\sphericalangle (V_{i_1}, W), \ \sphericalangle (V_{i_1}^1, W_{i_2}^1), \dots\}$, *вычисленных в верхних строках пар* (9), (9^1), ..., (9^{s-1}) *при переходе от пары* (9) *к ее первой уплотненной форме* (9^s); 2. Последовательности углов (12) и (13) для каждого j, $j = 1, 2, \dots, p_s$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Калужнину Л. А., сделавшему ряд ценных замечаний при подготовке настоящей заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Калужнин, Х. М. Хавиди, Геометрическая теория унитарной эквивалентности, ДАН СССР, т. 169, № 5, 1966.
2. Л. С. Атанасян, Основы многомерной геометрии, М., 1963.

Поступила 4.III 1966 г.
Киев