1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.947.5.37

Некоторые вопросы спектральной теории линейного дифференциального уравнения второго порядка с неограниченными операторными коэффициентами

В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(.\,,.)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим $L_2(H, (0, b))$ $(0 < b \leqslant \infty)$ множество всех вектор-функций $u(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant b)$ со значениями в H таких, что $\int_0^b \|u(t)\|^2\,dt < \infty$. Как известно, $L_2(H, (0, b))$ является полным гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(u, v)_b = \int_0^b (u(t), v(t))\,dt \quad (u,\ v \in L_2(H, (0, b))).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l[u] = u'' + Au - q(t)u = \lambda u \tag{1}$$

с краевым условием

$$u'(0) = Bu(0), \tag{2}$$

где $q(t) = q^*(t)$ ($*$ обозначает переход к сопряженному оператору) — непрерывная в равномерной операторной топологии оператор-функция, значениями которой являются ограниченные операторы в H, λ — комплексное число, A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H, B — ограниченный самосопряженный оператор со свойством $BD(A) \subset D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A). Без ограничения общности можно считать, что $A > 0$ и оператор A^{-1} ограничен. Кроме того, предположим, что функции $A^{\frac{1}{2}} q(t) A^{-\frac{1}{2}}$ и $Aq(t)A^{-1}$ сильно непрерывны по t.

В этой статье исследуется минимальный оператор задачи (1), (2) в пространстве $L_2(H, (0, b))$. В п. 1 приводятся некоторые вспомогательные сведения относительно сильных и слабых решений уравнения (1). В п. 2 изучается область определения минимального оператора и сопряженного к нему. Далее (п. 4), с помощью метода направляющих функционалов и результатов п. 3, устанавливается существование операторной спектральной функции задачи (1), (2).

1. Вектор функция $u(t)$ $(t \in [0, b])$ со значениями в H называется сильным решением уравнения (1), если $u(t)$ при каждом t принадлежит $D(A)$, два раза сильно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1).

На множествах $H_{++} = D(A)$ и $H_{+} = D(A^{\frac{1}{2}})$ введем скалярные произведения

$$(f, g)_{++} = (Af,\ Ag) \quad (f, g \in H_{++}),$$

$$(f, g)_{+} = (A^{\frac{1}{2}} f, A^{\frac{1}{2}} g) \quad (f, g \in H_{+}).$$

Тогда H_{++} и H_+ являются полными гильбертовыми пространствами относительно $(.\,,.)_{++}$ и $(.\,,.)_+$ соответственно, причем $\|\cdot\|_{++} \geqslant \gamma_1 \|\cdot\|_+ \geqslant \gamma_2 \|\cdot\|$ $(0 < \gamma_1,\ \gamma_2 = \mathrm{const})$, т. е. H_{++} и H_+ можно считать пространствами с позитивной нормой по отношению к $H_0 = H$ (см. [1]). Обозначим H_{--} и H_- пространства с негативной нормой, построенные по H_{++}, H_0 и H_-, H_0 соответственно. Таким образом, имеем цепочку пространств

$$H_{++} \subseteq H_+ \subseteq H_0 \subseteq H_+ \subseteq H_{--}.$$

Вектор-функцию $u\,(t)$ $(t \in [0,\ b])$ со значениями в H назовем слабым решением уравнения (1), если $u\,(t)$ дважды слабо дифференцируема в H_{--} (т. е. скалярная функция $(u\,(t),\ f)$ два раза дифференцируема при любом $f \in H_{++}$) и

$$\frac{d^2}{dt^2}(u\,(t), f) + (u\,(t), Af) - (u\,(t), q\,(t)\,f) = \lambda\,(u\,(t), f) \quad (f \in H_{++}).$$

Однако оператор A можно рассматривать как оператор, действующий изометрически из H_{++} на H. Сопряженный к нему оператор, действующий из H в H_{--}, обозначим $\widetilde{A}$. Ясно, что $\widetilde{A}$ является расширением оператора A, если его рассматривать из H в H_{--}. Теперь тот факт, что вектор-функция $u\,(t)$ — слабое решение уравнения (1), эквивалентен тому, что $u\,(t)$ дважды слабо дифференцируема в H_{--} и удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{l}\,[u] = \frac{d^2u}{dt^2} + \widetilde{A}u - q\,(t)\,u = \lambda u. \tag{1'}$$

Методом последовательных приближений нетрудно показать, что интегральные уравнения

$$\omega_1(t, x, \lambda) = \cos\sqrt{A - \lambda E}\,(t - x) + \int\limits_x^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\,q\,(\xi)\,\omega_1(\xi, x, \lambda)\,d\xi,$$

$$\omega_2(t, x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-x)}{\sqrt{A-\lambda E}} + \int\limits_x^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\,q(\xi)\,\omega_2(\xi, x, \lambda)\,d\xi$$

(E — тождественный оператор) имеют решения: первое — в классе сильно непрерывных операторных функций, а второе — в классе операторных функций, непрерывных в равномерной операторной топологии по совокупности переменных t, x. При фиксированных $t,\ x \in [0,\ b]$ решения $\omega_1\,(t,\ x,\ \lambda)$ и $\omega_2\,(t,\ x,\ \lambda)$ являются целыми операторными функциями по λ.

Так как при фиксированных t, x, λ оператор $\omega_2\,(t,\ x,\ \lambda)$ непрерывно действует из H в H_+, то сопряженный к нему оператор $\widetilde{\omega}_2\,(t,\ x,\ \lambda)$ непрерывно действует из H_- в H и является расширением $\omega_2\,(t, x, \lambda) : \widetilde{\omega}_2\,(t, x, \lambda)g = \omega_2\,(t,\ x,\ \lambda)\,g,\ g \in H$.

Л е м м а 1. *При $f \in D\,(A)$, $g \in D\,(A^{\frac{1}{2}})$ вектор-функции $\omega_1\,(t,\ x,\ \lambda)\,f$ и $\omega_2\,(t,\ x,\ \lambda)\,g$ сильно непрерывны в H_{++}, сильно непрерывно дифференцируемы в H_+ и являются сильными решениями по t уравнения* (1), *удовлетворяющими начальным данным*

$$\omega_1(x, x, \lambda)\,f = f, \quad \omega_1'(x, x, \lambda)\,f = 0; \tag{3}$$

$$\omega_2(x, x, \lambda)\,g = 0, \quad \omega_2'(x, x, \lambda)\,g = g. \tag{4}$$

При $f \in D\,(A)$ вектор-функция $\omega_2(t,\ x,\ \lambda)\,f$ сильно непрерывно дифференцируема в пространстве H_{++}.

Если же $f \in H$, $g \in H_-$, то $\omega_1(t,\ x,\ \lambda)\,f$ и $\omega_2(t,\ x,\ \lambda)\,g$ являются слабыми решениями уравнения (1).

Доказательство. При фиксированных λ, t, x и $f\in D(A)$ $\cos\sqrt{A-\lambda E}\ (t-x)f\in D\ (A)$. Так как при любом $g\in H$ $\int\limits_x^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\ (t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\ q\ (\xi)\,\omega_1\,(x,\xi,\lambda)\,d\xi g\in D\ (A^{\frac{1}{2}})$, то $\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f\in D(A^{\frac{1}{2}})$ $(f\in D\,(A))$ и $A^{\frac{1}{2}}\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f$ — сильно непрерывная по t вектор-функция. Поэтому

$$\int\limits_x^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\,q\,(\xi)\,\omega_1\,(\xi,x,\lambda)\,fd\xi=$$

$$=A^{-1}\int\limits_x^t \frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\,A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}q\,(\xi)\,A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\omega_1\,(\xi,x,\lambda)\,fd\xi\in D\,(A),$$

и значит, при $f\in D\,(A)$ $\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f\in D\,(A)$.

Учитывая, что формальная вторая производная по t

$$-(A-\lambda E)\cos\sqrt{A-\lambda E}\,(t-x)\,f+q\,(t)\,\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f-$$

$$-\int\limits_x^t\sqrt{A-\lambda E}\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)\,q\,(\xi)\,\omega_1\,(\xi,x,\lambda)\,fd\xi=$$

$$=-(A-\lambda E)\cos\sqrt{A-\lambda E}\,(t-x)\,f+q\,(t)\,\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f-$$

$$-\int\limits_x^t\sqrt{A-\lambda E}\,A^{-\frac{1}{2}}\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)\,A^{\frac{1}{2}}q(\xi)A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}\omega_1\,(\xi,x,\lambda)\,fd\xi$$

от $\omega_1(t,x,\lambda)f$ при $f\in D(A)$ имеет смысл и является сильно непрерывной по t, делаем вывод, что вектор-функция $\omega_1(t,x,\lambda)f$ имеет две сильные производные по t в H. Кроме того, $\omega_1(t,x,\lambda)f$ $(f\in D(A))$ удовлетворяет уравнению (1). Таким образом, вектор-функция $\omega_1(t,x,\lambda)f$ $(f\in D(A))$ является сильным решением уравнения (1) с начальными данными (3). Сильная непрерывность $\omega_1(t,x,\lambda)$ в H_{++} и $\omega_1'(t,x,\lambda)$ в H_+ очевидна.

Если же f — произвольный элемент из H, то из соотношения

$$(\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f,h)=(f,\cos\sqrt{A-\lambda E}\,(t-x)h)+$$

$$+\left(f,\int\limits_x^t\omega_1^*(\xi,x,\lambda)\,q\,(\xi)\,\frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}\,(t-\xi)}{\sqrt{A-\lambda E}}\,hd\xi\right)\quad(h\in H_+)$$

следует, что $(\omega_1\,(t,x,\lambda)\,f,h)$ — два раза дифференцируемая функция и

$$\frac{d^2}{dt^2}\,\omega_1\,(t,x,\lambda)+\widetilde{A}\omega_1\,(t,x,\lambda)-q\,(t)\,\omega_1\,(t,x,\lambda)=\lambda\omega_1\,(t,x,\lambda).$$

Следовательно, $\omega_1(t,x,\lambda)f$ $(f\in H)$ — слабое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3).

Аналогичные рассуждения можно провести и для вектор-функции $\omega_2(t,x,\lambda)\,g$, когда $g\in D\,(A^{\frac{1}{2}})$ $(g\in H_-$ соответственно).

Лемма доказана.

Лемма 2. *Справедлива формула*

$$(u'', v) = \frac{d}{dt}(u', v) - \frac{d}{dt}(u, v') + (u, v'') \tag{5}$$

при следующих условиях на вектор-функции $u(t)$ *и* $v(t)$:

а) *вектор-функция* $u(t)$ *со значениями в* H *имеет две слабые производные в пространстве* H_{--}, *а* $v(t)$ *со значениями в* H_{++} *имеет первую сильно непрерывную производную в* H_{++} *и вторую в* H;

б) *вектор-функция* $u(t)$ *со значениями в* H *имеет первую слабую производную в* H_{-} *и вторую слабую производную в* H_{--}, *а* $v(t)$ *со значениями в* H_{++} *имеет сильную непрерывную первую производную в* H_{+} *и вторую сильную производную в* H.

Доказательство. Подсчитаем $\frac{d}{dt}(u', v)$:

$$\frac{d}{dt}(u', v) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{u'(t+\Delta t) - u'(t)}{\Delta t}, v(t+\Delta t)\right) +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0}\left(u'(t), \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}\right) = (u'', v) + (u', v').$$

Аналогично,

$$\frac{d}{dt}(u, v') = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}, v'(t+\Delta t)\right) +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0}\left(u(t), \frac{v'(t+\Delta t) - v'(t)}{\Delta t}\right) = (u', v') + (u, v'').$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(u', v) - \frac{d}{dt}(u, v') = (u'', v) - (u, v''),$$

что и требовалось.

Введем обозначения

$$\omega_1(t, \lambda) = \omega_1(t, 0, \lambda),$$

$$\omega_2(t, \lambda) = \omega_2(t, 0, \lambda),$$

$$\widetilde{\omega}_2(t, \lambda) = \widetilde{\omega}_2(t, 0, \lambda).$$

Теорема 1. *Задача Коши* $u(0) = f$, $u'(0) = g$ $(f \in H,\ g \in H_{-})$ *для уравнения* (1) *имеет единственное слабое решение. Это решение имеет вид*

$$u(t, \lambda) = \omega_1(t, \lambda) f + \widetilde{\omega}_2(t, \lambda) g.$$

Доказательство. Так как $\omega_1(t, \lambda) f$ и $\widetilde{\omega}_2(t, \lambda) g$ при $f \in H$, $g \in H_{-}$ являются слабыми решениями уравнения (1), удовлетворяющими при $t = 0$ условиям (3) и (4) соответственно, то функция

$$u(t, \lambda) = \omega_1(t, \lambda) f + \widetilde{\omega}_2(t, \lambda) g$$

является также слабым решением уравнения (1), причем $u(0, \lambda) = f$, $u'(0, \lambda) = g$.

Предположим теперь, что $w(t, \lambda)$ — слабое решение уравнения (1) такое, что $w(0, \lambda) = 0$, $w'(0, \lambda) = 0$, и покажем, что тогда $w(t, \lambda) \equiv 0$.

Умножая скалярно равенство

$$\frac{d^2}{dt^2}\omega_2(t, x, \bar{\lambda}) f + A\omega_2(t, x, \bar{\lambda}) f - q(t)\,\omega_2(t, x, \bar{\lambda}) f = \bar{\lambda}\omega_2(t, x, \bar{\lambda}) f$$

($f \in D(A)$, x — произвольная, но фиксированная точка из $[0, b]$) на $w(t, \lambda)$, а затем интегрируя от 0 до x, получим:

$$\int_0^x (w(t, \lambda), \omega_2''(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt + \int_0^x (w(t, \lambda), A\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt -$$

$$- \int_0^x (w(t, \lambda), q(t)\, \omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt = \lambda \int_0^x (w(t, \lambda), w_2(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt. \qquad (6)$$

Из леммы 1 вытекает, что функции $\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f$ ($f \in D(A)$) и $w(t, \lambda)$ удовлетворяют условию а) леммы 2, поэтому

$$\int_0^x (w(t, \lambda), l[\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f] - \overline{\lambda}\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt =$$

$$= \int_0^x (\widetilde{l}[w(t, \lambda)] - \lambda w(t, \lambda), \omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f)\, dt +$$

$$+ [(w(t, \lambda), \omega_2'(t, x, \overline{\lambda}) f) - (w'(t, \lambda), \omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f)]_0^x.$$

Так как

$$\widetilde{l}[w(t, \lambda)] - \lambda w(t, \lambda) = 0, \quad l[\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f] - \overline{\lambda}\omega_2(t, x, \overline{\lambda}) f = 0,$$

$$w(0, \lambda) = 0, \quad \omega_2(x, x, \overline{\lambda}) f = 0,$$

$$w'(0, \lambda) = 0, \quad \omega_2'(x, x, \overline{\lambda}) f = f,$$

то $(w(x, \lambda), f) = 0$ для любого $f \in D(A)$. Но $\overline{D(A)} = H$, и, учитывая, что x — произвольная точка из $[0, b]$, получим, что $w(x, \lambda) \equiv 0$.

Теорема доказана.

2. Обозначим D' совокупность функций $u(t) \in L_2(H, (0, b))$, удовлетворяющих условиям: а) $u(t)$ — вектор-функция со значениями из H_{++}, имеющая первую непрерывную в H_+ сильную производную $u'(t)$, абсолютно непрерывную в H; б) $l[u] \in L_2(H, (0, b))$; в) $u'(0) = Bu(0)$. На D' определим оператор L': $L'u = l[u]$, $u \in D'$.

Обозначим также D_0' множество функций $u(t) \in D'$, равных нулю вне какого-нибудь интервала $[0, \beta) \subset [0, b]$, вообще говоря, различного для разных $u(t)$, а через L_0' — сужение L' на D_0'.

Из формулы Лагранжа ($u, v \in D'$, $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < b$)

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (l[u](t), v(t))\, dt - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (u(t), l[v](t))\, dt = [(u'(t), v(t)) - (u(t), v'(t))]_{\alpha_1}^{\alpha_2} \qquad (7)$$

следует, что L_0' эрмитов и $L' \subset L_0'^*$. Пусть L_0 — замыкание L_0'. Оператор L_0 назовем минимальным оператором задачи (1) — (2) на интервале $[0, b]$.

Заметим, что если $v \in D'$, а $u(t)$ имеет первую в H_- и вторую в H_{--} слабые производные, то формула (7) приобретает вид

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [(\widetilde{l}[u](t), v(t)) - (u(t), l[v](t))]\, dt = [(u'(t), v(t)) - (u(t), v'(t))]_{\alpha_1}^{\alpha_2}. \qquad (7')$$

Она имеет место и тогда, когда u и v удовлетворяют условию а) леммы 2.

Теорема 2. *$D(L_0^*)$ состоит из тех и только тех вектор-функций $u(t) \in L_2(H, (0, b))$, для которых $u'(t)$ существует в H_- и абсолютно не-*

непрерывна в H_{--}, $l[u] \in L_2(H, (0, b))$ *и* $u'(0) = Bu(0)$. *При этом*

$$u(t) = \omega_1(t, 0) f + \omega_2(t, 0) Bf + \int_0^t \omega_2(t, x, 0) u^*(x) dx, \tag{8}$$

где $u^*(x) = \widetilde{l}[u]$, $f \in H$.

Доказательство. Пусть $u(t) \in D(L_0^*)$. Тогда

$$(L_0 y, u)_b = (y, u^*)_b \tag{9}$$

для любой вектор-функции $y(t) \in D(L_0)$.

Предположим сначала, что $u^* = 0$. Так как вектор-функции вида $y(t) = \varphi(t) f$, где $\varphi(t)$ — произвольная скалярная финитная бесконечно дифференцируемая функция на $[0, b]$, а $f \in D(A)$, принадлежат D_0', то

$$\int_0^b \varphi''(t)(f, u(t)) dt = \int_0^b \varphi(t) F(t) dt, \tag{10}$$

где $F(t) = -(Af, u(t)) + (q(t) f, u(t))$.

Обозначим $w(t) = \int_0^t (t - s)[q(s) u(s) - \widetilde{A} u(s)] ds$. Вектор-функция $w(t)$ со значениями в H_{--} имеет первую абсолютно непрерывную производную в H_{--}, а вторая ее производная локально интегрируема с квадратом в пространстве H_{--}.

Для любых конечного $b_1 \leqslant b$, скалярной два раза дифференцируемой функции $\varphi(t)$, удовлетворяющей условиям $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(b_1) = \varphi'(b_1) = 0$, и векторов $g_1, g_2 \in H_{--}$ справедливо равенство

$$\int_0^{b_1} \varphi''(t)(u_1(t), f) dt = 0, \tag{11}$$

где $u_1(t) = u(t) - w(t) - g_1 - g_2 t$. Подбирая теперь векторы g_1 и g_2 так, чтобы функция

$$\psi(t) = \int_0^t (t - s) u_1(s) ds$$

удовлетворяла условиям $\psi(b_1) = \psi'(b_1) = 0$ (этими условиями g_1 и g_2 определяются для заданного b_1 однозначно), и беря в (11) $\varphi(t) = (f, \psi(t))$, получим, что $\int_0^{b_1} |(u_1(t), f)|^2 dt = 0$ для любого $f \in H_{++}$. Отсюда вытекает, что функция $u_1(t)$ почти всюду равна нулю на $[0, b_1]$. Поэтому первая производная от $u(t) = w(t) + g_1 + g_2 t$ абсолютно непрерывна на произвольном конечном интервале $[0, b_1]$, а значит, и на $[0, b]$. Теперь из (10), путем интегрирования по частям, получим, что $l[u] = 0$, т. е. u — слабое решение уравнения $l[u] = 0$.

Если в качестве $y(t)$ в равенстве (9) при $u^* = 0$ взять функции вида $y(t) = \psi(t)(f + tBf)$, где $f \in D(A)$, а $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная единице в окрестности нуля и нулю в окрестности точки b, а затем воспользоваться тождеством (7′) при $u = y(t)$ и $v = u(t)$, то придем к тому, что

$$(f, u'(0)) - (Bf, u(0)) = (f, u'(0) - Bu(0)), \quad f \in H_{++},$$

т. е. $u'(0) = Bu(0)$. Таким образом, в случае $u^* = 0$ функция $u(t) \in D(L_0^*)$ является слабым решением уравнения $l[u] = 0$, удовлетворяющим условию $u'(0) = Bu(0)$, и по теореме 1 имеет вид

$$u(t) = \omega_1(t, 0) f + \omega_2(t, 0) Bf \quad (f \in H).$$

Пусть теперь $u^* \neq 0$, Рассмотрим вектор-функцию

$$v(t) = \int_0^t \omega_2(t, x, 0)\, u^*(x)\, dx.$$

Нетрудно проверить, что $v(t)$ имеет абсолютно непрерывную производную в H_{--} и является решением уравнения $\widetilde{l}[v] = u^*$, удовлетворяющим условиям

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

Тогда на основании (7′) и (9) имеем

$$(L_0 y, u - v)_b = (y, u^*) - (y, u^*) = 0 \quad \text{для} \quad y \in D_0'.$$

Поэтому функция $z(t) = u(t) - v(t)$ является слабым решением уравнения $l[u] = 0$ и удовлетворяет условию $z'(0) = Bz(0)$. Отсюда следует, что $u(t)$ абсолютно непрерывно дифференцируема в H_{--}, $\widetilde{l}[u] = u^* \in L_2(H, (0, b))$, $u'(0) = Bu(0)$ и $u(t)$ имеет вид (8).

Обратное утверждение теоремы непосредственно следует из формулы (7).

З а м е ч а н и е 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что оператор L_0 можно получить, замыкая сужение L_0' на конечные комбинации вида $y(t) = \sum_k \varphi_k(t) f_k$, где $\varphi_k(t)$ — скалярные финитные в окрестности точки b бесконечно дифференцируемые функции, $f_k \in D(A)$, удовлетворяющие условию $y'(0) = By(0)$.

З а м е ч а н и е 2. Из (8) вытекает, что если $y \in D(L_0^*)$, то $y'(t)$ абсолютно непрерывна в H_{--}.

Т е о р е м а 3. *В случае конечного b оператор L_0^* совпадает с замыканием оператора L'.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Включение $L' \subset L_0^*$, а значит $\overline{L}' \subset L_0^*$, вытекает из формулы (7). Нужно доказать, что $L_0^* \subset \overline{L}'$.

Пусть $u \in D(L_0^*)$ и $L_0^* u = u^*$. По теореме 2

$$u(t) = \omega_1(t, 0) f + \omega_2(t, 0) Bf + \int_0^t \omega_2(t, x, 0)\, u^*(x)\, dx.$$

Выберем последовательность $f_n \in D(A)$, сходящуюся к f, и последовательность конечнозначных вектор-функций $u_n^*(x)$ со значениями в $D(A)$, сходящуюся в $L_2(H, (0, b))$ к $u^*(x)$. Тогда вектор-функции ($n = 1, 2, \ldots$)

$$u_n(t) = \omega_1(t, 0) f_n + \omega_2(t, 0) Bf_n + \int_0^t \omega_2(t, x, 0)\, u_n^*(x)\, dx$$

принадлежат $D(L')$, $u_n \to u$ и $L' u_n = u_n^* \to u^*$ в $L_2(H, (0, b))$ при $n \to \infty$, т. е. u принадлежит $D(L')$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 4. *В случае $b < \infty$ вектор-функция $u(t) \in D(L_0^*)$ принадлежит $D(L_0)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию $u(b) = u'(b) = 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предыдущей теореме $L_0 = L_0^{**} = L'^*$. Поэтому для любой функции $y(t) \in D(L')$

$$\int_0^b (l[y], u)\, dt = \int_0^b (y, u^*)\, dt, \quad u^* = L_0 u.$$

Так как $u \in D(L_0^*)$, то в силу теоремы 2 можно применить формулу (7′), в результате чего получим, что

$$(y'(b), u(b)) - (y(b), u'(b)) = 0. \tag{12}$$

Беря в (12) в качестве $y(t)$ функции вида $y(t) = \psi(t) f$, где $f \in D(A)$, а $\psi(t)$ — скалярная бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0) = \psi'(0) = \psi'(b) = 0$, $\psi(b) = 1$, получим, что $(f, u'(b)) = 0$, т. е. $u'(b) = 0$. Если же $\psi(t)$ выбрать так, чтобы $\psi(0) = \psi'(0) = \psi(b) = 0$, $\psi'(b) = 1$, то получим, что $(f, u(b)) = 0$, т. е. $u(b) = 0$.

Обратное утверждение теоремы вытекает непосредственно из формулы (7).

Теорема 5. *Пусть $b < \infty$. Если вектор-функция $u(t) \in D(L_0)$, то она имеет непрерывную сильную производную в H.*

Доказательство. Обозначим $L_0^{(1)}$ минимальный оператор задачи

$$l^{(1)}[u] = u'' + Au = \lambda u, \quad u'(0) = Bu(0). \tag{13}$$

Нетрудно видеть, что $D(L_0)$ совпадает с областью определения оператора $L_0^{(1)}$. Поэтому рассуждения можно вести для оператора $L_0^{(1)}$.

Итак, пусть $u(t) \in D(L_0^{(1)})$. Тогда, принадлежа и $D(L_0^{(1)*})$, $u(t)$ представляется в виде (см. формулу (8))

$$u(t) = \cos\sqrt{A}\, tf + \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}} Bf + \int_0^t \frac{\sin\sqrt{A}(t-x)}{\sqrt{A}} u^*(x)\,dx, \quad u^* = L_0^{(1)*}u.$$

Учитывая теперь, что $u(b) = u'(b) = 0$ (под u' понимается производная в H_{--}), получаем:

$$\cos\sqrt{A}bf + \frac{\sin\sqrt{A}b}{\sqrt{A}} Bf + \frac{\sin\sqrt{A}b}{\sqrt{A}} f_1 - \frac{\cos\sqrt{A}b}{\sqrt{A}} f_2 = 0, \tag{14}$$

$$-\sqrt{A}\sin\sqrt{A}bf + \cos\sqrt{A}bBf + \cos\sqrt{A}bf_1 + \sin\sqrt{A}bf_2 = 0, \tag{15}$$

где $f_1 = \int_0^b \cos\sqrt{A}xu^*(x)\,dx$, $f_2 = \int_0^b \sin\sqrt{A}xu^*(x)\,dx$. Заметим, что равенство (15) понимается в H_-.

Применяя к обеим частям (15) оператор $A^{-\frac{1}{2}}$, а затем умножая (14) на $\cos\sqrt{A}b$, (15) — на $(-\sin\sqrt{A}b)$ и складывая, найдем, что

$$f - A^{-\frac{1}{2}} f_2 = 0,$$

откуда следует, что $f \in D(A^{\frac{1}{2}})$. Тогда вектор-функция

$$u'(t) = -\sqrt{A}\sin\sqrt{A}tf + \cos\sqrt{A}tBf + \int_0^t \cos\sqrt{A}(t-x)\,u^*(x)\,dx$$

со значениями в H является непрерывной сильной производной от функции $u(t)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если $u(t) \in D(L_0)$ ($t \in [0, b]$, $b < \infty$) и $\chi(t)$ — скалярная функция, дважды непрерывно дифференцируемая и такая, что $\chi'(0) = 0$, то вектор-функция $\chi(t)\, u(t)$ также принадлежит $D(L_0)$.*

Доказательство. Ясно, что вектор-функция $z(t)=\chi(t)u(t)\in L_2(H,(0,b))$ и $z'(t)$ абсолютно непрерывна в H_{--}. Далее,

$$\tilde{l}[z]=\chi''(t)u(t)+2\chi'(t)u'(t)+\chi(t)\tilde{l}[u]$$

и, в силу доказанной теоремы, принадлежит $L_2(H,(0,b))$. Учитывая, что $u(b)=u'(b)=0$ и $u'(0)=Bu(0)$, непосредственно убеждаемся, что $z(b)=z'(b)=0$ и $z'(0)=Bz(0)$, т. е. $z(t)\in D(L_0)$.

3. Пусть $b<\infty$. Обозначим $\varphi(t,\lambda)=\omega_1(t,\lambda)+\omega_2(t,\lambda)B$ и

$$\mathrm{I}_\lambda=\mathrm{I}_{\lambda,b}=\int_0^b\varphi^*(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)\,dt.$$

Теорема 6. *При любом комплексном λ оператор I_λ обратим.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся тем фактом, что если оператор K представляется в виде суммы двух неотрицательных операторов K_1 и K_2:

$$K=K_1+K_2,$$

из которых один обратим (например, K_1), то K также обратим.

Итак, положим $K_1=\int_0^{b_1}\varphi^*(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)\,dt$, $K_2=\int_{b_1}^{b}\varphi^*(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)\,dt$, где b_1 подберем после. Операторы K_1 и K_2 неотрицательны и $\mathrm{I}_\lambda=K_1+K_2$. Покажем, что K_1 — обратимый оператор. Имеем:

$$(K_1f,f)=\left(\int_0^{b_1}\varphi^*(t,\lambda)\varphi(t,\lambda)\,dtf,f\right)=$$

$$=\left(\int_0^{b_1}\cos\sqrt{A-\bar{\lambda}E}t\cos\sqrt{A-\lambda E}t\,dtf,f\right)+$$

$$+\left(\int_0^{b_1}\left(\int_0^t\omega_1^*(x,\lambda)q(x)\frac{\sin\sqrt{A-\bar{\lambda}E}(t-x)}{\sqrt{A-\bar{\lambda}E}}dx\right)\cos\sqrt{A-\lambda E}t\,dtf,f\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\int_0^{b_1}\left\{B\int_0^t\omega_2^*(x,\lambda)q(x)\frac{\sin\sqrt{A-\bar{\lambda}E}(t-x)}{\sqrt{A-\bar{\lambda}E}}dx\int_0^t\frac{\sin\sqrt{A-\lambda E}(t-x)}{\sqrt{A-\lambda E}}d(x)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,\omega_2(x,\lambda)B\,dx\right\}dtf,f\right)=(Tf,f)+(Sf,f),$$

где

$$T=\int_0^{b_1}\cos\sqrt{A-\bar{\lambda}E}t\cos\sqrt{A-\lambda E}t\,dt,\quad S=K_1-T.$$

Легко подсчитать, что $\|S\|\leqslant cb_1^2$ ($c=\mathrm{const}$ не зависит от b_1). Далее ($\sqrt{\mu-\lambda}=\sigma+i\tau$),

$$\left(\int_0^{b_1}\cos\sqrt{A-\bar{\lambda}E}t\cos\sqrt{A-\lambda E}t\,dtf,f\right)=\int_0^{b_1}\left[\int_0^\infty\cos\sqrt{\mu-\bar{\lambda}}t\cos\sqrt{\mu-\lambda}t\times\right.$$

$$\left.\times\,d(E_\mu f,f)\right]dt=\int_0^\infty\left[\int_0^{b_1}\cos\sqrt{\mu-\bar{\lambda}}t\cos\sqrt{\mu-\lambda}t\,dt\right]d(E_\mu f,f)=$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{\sin(2\sigma b_1)}{2\sigma} + \frac{\sin(2i\tau b_1)}{2i\tau} \right) d(E_\mu f, f) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{b_1 \sin(2\sigma b_1)}{2\sigma b_1} + \frac{b_1 \operatorname{sh}(2\tau b_1)}{2\tau b_1} \right) d(E_\mu f, f).$$

Учитывая, что

$$\frac{\sin(2\sigma b_1)}{2\sigma b_1} > 0 \text{ при } 0 < 2\sigma b_1 < \pi, \quad \left| \frac{\sin(2\sigma b_1)}{2\sigma b_1} \right| < \frac{1}{\pi} \text{ при } 2\sigma b_1 > \pi$$

и

$$\frac{\operatorname{sh}(2\tau b_1)}{2\tau b_1} \geqslant 1,$$

получим, что

$$(Tf, f) \geqslant c_1 b_1 (f, f) \ (0 < c_1 = \text{const не зависит от } b_1).$$

Таким образом, оператор T обратим, $\| T^{-1} \| \leqslant c b_1^{-1}$ и $\| T^{-1} S \| \leqslant \leqslant \frac{c_1}{c} b_1 = c_2 b_1$ ($c_2 = \text{const}$).

Выберем теперь b_1 так, чтобы $c_2 b_1$ было меньше единицы. Тогда оператор $E + T^{-1}S$ имеет обратный, а поэтому и оператор $K_1 = T + S = T(E + T^{-1}S)$ также обратим.

Теорема доказана.

4. Пусть $\mathfrak{H}$ — линейное пространство с квазискалярным произведением $[u, v]$ ($u, v \in \mathfrak{H}$) и T — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, определенный на плотном множестве $D(T) \subset \mathfrak{H}$.

Отображение $\Phi(\lambda, u) \to \Phi_\lambda(u)$ из $R \times \mathfrak{H}$ (R — вещественная ось) в H называется направляющим «функционалом» для оператора T, если:

1) отображение $\Phi(\lambda, u)$ линейно по u;

2) при каждом фиксированном $u \in \mathfrak{H}$ $\Phi_\lambda(u)$ — голоморфная на R вектор-функция по λ;

3) при любых $\lambda \in R$ и $u \in \mathfrak{H}$ уравнение

$$(T - \lambda E) v = u \tag{16}$$

имеет решение $v \in D(T)$ тогда и только тогда, когда $\Phi_\lambda(u) = 0$;

4) для любого замкнутого ограниченного интервала Δ из R имеется отображение $\Psi^{(\Delta)}(\lambda, f) \to \Psi^{(\Delta)}_\lambda(f)$ из $\Delta \times H$ в $\mathfrak{H}$, обладающее свойствами: а) для любого $\lambda \in \Delta$ отображение $\Psi^{(\Delta)}_\lambda(f)$ линейно по f; б) для произвольного $f \in H$ $\Psi^{(\Delta)}_\lambda(f)$ — голоморфная вектор-функция по λ на R; в) $\Phi_\lambda(\Psi^{(\Delta)}_\lambda(f)) = f$; г) оператор $\hat{\Psi}^{(\Delta)}_\lambda(f)$ непрерывен из H в $\hat{\mathfrak{H}}$ ($\hat{\mathfrak{H}}$ — пространство, полученное после отождествления в $\mathfrak{H}$ с нулем тех элементов u, для которых $[u, u] = 0$, $\hat{\Psi}^{(\Delta)}_\lambda(f)$ — оператор, соответствующий $\Psi^{(\Delta)}_\lambda(f)$ при этом отождествлении).

Обозначим через V множество эрмитовых операторных функций $F(t)$ ($t \in (-\infty, \infty)$) в H таких, что:

1′) при каждом $t \in (-\infty, \infty)$ $F(t)$ — ограниченный оператор в H;

2′) $F(0) = 0$;

3′) $F(t)$ — неубывающая функция по t;

4′) $F(t) = F(t - 0)$.

Имеет место теорема, принадлежащая Г. К. Лангеру [2] (для некоторого частного случая она имеется в работе [3] Ф. С. Рофе-Бекетова).

Теорема 7. *Пусть эрмитовый оператор T имеет направляющий «функционал» $\Phi(\lambda, u)$ со значениями в гильбертовом пространстве H и $E(\Delta)$ — его разложение единицы (вообще говоря, обобщенное). Тогда существует операторная функция $F(t) \in V$ такая, что для $u, v \in \mathfrak{H}$*

$$[E(\Delta) u, v] = \int_{\Delta} (F(dt) \Phi(t, u), \Phi(t, v)). \tag{17}$$

Функция $F(t)$ единственна тогда и только тогда, когда оператор T максимально симметрический.

Возьмем теперь в качестве $\mathfrak{H}$ линейное пространство функций из $L_2(H, (0, b))$ $(b \leqslant \infty)$, финитных в окрестности точки b, со скалярным произведением $(.\,,.)_b$, а в качестве оператора T — сужение L_0 на множество вектор-функций $u(t) \in D(L_0) \cap \mathfrak{H}$. Так как $D(L_0') \subset D(L_0) \cap \mathfrak{H}$, то замыкание указанного сужения совпадает с оператором L_0. Поэтому с точностью до замыкания в качестве оператора T можно сразу взять оператор L_0.

«Функционал»

$$\Phi(\lambda, u) = \int_0^b \varphi^*(t, \overline{\lambda}) u(t)\, dt \qquad (u(t) \in \mathfrak{H})$$

является направляющим для оператора L_0.

Проверка свойств 1) и 2) направляющего «функционала» не представляет труда. Докажем, что выполняются свойства 3) и 4).

Пусть v — решение из $D(L_0)$ уравнения (16) для $\lambda \in R$ и $u \in \mathfrak{H}$. Умножим тождество $(L_0 - \lambda E) v = u$ скалярно на $\varphi(t, \overline{\lambda}) h$ $(h \in D(A))$:

$$\int_c^b ((L_0 - \lambda E) v, \varphi(t, \overline{\lambda}) h)\, dt = \int_0^b (u, \varphi(t, \overline{\lambda}) h)\, dt.$$

Учитывая, что $\varphi(t, \overline{\lambda}) h \in D(L_0^*)$ $(h \in D(A))$ — сильное решение уравнения (1) с $\overline{\lambda}$ вместо λ и $v \in D(L_0)$, с помощью формулы (7') получим, что $\int_0^b (\varphi^*(t, \overline{\lambda}) u(t), h)\, dt = 0$, $h \in D(A)$, откуда, в силу плотности $D(A)$ в H, следует что $\Phi(\lambda, u) = 0$.

Обратно, пусть для некоторого $u \in \mathfrak{H}$ и $\lambda \in R$

$$\Phi(\lambda, u) = \int_0^b \varphi^*(t, \overline{\lambda}) u(t)\, dt = 0. \tag{18}$$

Так как $u(t) \in \mathfrak{H}$, то $u(t)$ обращается в нуль вне некоторого интервала $[0, a) \subset [0, b]$.

Рассмотрим вектор-функцию

$$v(t) = \int_a^t \omega_2(t, x, \lambda) u(x)\, dx.$$

Нетрудно убедиться, что $v(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{l}[v] - \lambda v = u, \tag{19}$$

причем $v(t)$ обращается в нуль вне интервала $[0, a]$.

Умножая (18) скалярно на $h \in D(A)$ в пространстве H и используя (19) и (7'), получим

$$0 = \int_0^b (\varphi(x, \overline{\lambda}) h, u(x))\, dx = \int_0^b (\varphi(x, \overline{\lambda}) h, \widetilde{l}[v] - \lambda v)\, dx =$$

$$= (\varphi(0, \overline{\lambda}) h, v'(0)) - (\varphi'(0, \overline{\lambda}) h, v(0)) =$$

$$= (h, v(0)) - (Bh, v(0)) = (h, v'(0)) - (h, Bv(0)).$$

Но $\overline{D(A)} = H$, поэтому $v'(0) = B v(0)$. По теореме 4 вектор-функция $v(t)$ принадлежит области определения оператора L_0 в пространстве $L_2(H, (0, a))$, т. е. $v(t) = \lim_{n\to\infty} v_n(t)$, где $v_n(t) \in D(L_0')$ в пространстве $L_2(H, (0, a))$ и такие, что $l[v_n(t)] \to L_0 v$ в $L_2(H, (0, a))$. Продолжая нулем $v_n(t)$ на весь интервал $[0, b]$, получим, что продолженная последовательность $v_n(t) \in D(L_0')$ в $L_2(H, (0, b))$ и такова, что $v_n \to v$ и $l[v_n] \to L_0 v$.

Таким образом, $v \in D(L_0) \cap \mathfrak{H}$ и является решением уравнения (16). Свойство 3) доказано.

Докажем, что «функционал» (18) обладает свойством 4) направляющего «функционала».

Пусть $\psi(t)$ — бесконечно дифференцируемая неотрицательная функция такая, что

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < t < a_1, \\ 0 \text{ при } a_2 < t \leqslant b, \ 0 < a_1 < a_2 < b. \end{cases}$$

Обозначим $\mathrm{I}_{\lambda,\psi} = \int_0^b \psi(t) \varphi^*(t, \overline{\lambda}) \varphi(t, \lambda)\, dt$. $\mathrm{I}_{\lambda,\psi}$ является аналитической оператор-функцией по λ в пространстве H и, будучи при $\lambda \in R$ суммой двух неотрицательных операторов I_{λ,a_1} и $\int_{a_1}^b \psi(t) \varphi^*(t, \lambda) \varphi(t, \lambda)\, dt$, из которых первый по теореме 6 имеет обратный, оператор $\mathrm{I}_{\lambda,\psi}$ обратим, причем $\mathrm{I}_{\lambda,\psi}^{-1}$ — также аналитическая оператор-функция по λ на вещественной оси.

Операторы $\Psi_\lambda^{(\Delta)}$, фигурирующие в свойстве 4), введем следующим образом:

$$\Psi_\lambda^{(\Delta)} f = \Psi_\lambda f = \psi(t) \varphi(t, \lambda) \mathrm{I}_{\lambda,\psi}^{-1} f, \ f \in H.$$

Линейный по f оператор $\Psi_\lambda f$ непрерывно действует из $R \times H$ в $\mathfrak{H}$. Кроме того, при фиксированном f $\Psi_\lambda f$ является аналитической вектор-функцией по λ на R. Далее, $\Phi(\lambda, \Psi_\lambda f) = \int_0^b \varphi^*(t, \lambda) \psi(t) \varphi(t, \lambda) \mathrm{I}_{\lambda,\psi}^{-1} f dt = \mathrm{I}_{\lambda,\psi} \mathrm{I}_{\lambda,\psi}^{-1} f = f.$

Следовательно, Ψ_λ удовлетворяет всем свойствам а) — г) из 4), и «функционал» Φ_λ является направляющим для оператора L_0.

На основании теоремы 7 получим следующее утверждение.

Теорема 8. *Существует операторная функция $\varrho(t) \in V$ такая, что для любых $u, v \in L_2(H, (0, b))$ справедливо равенство*

$$\int_0^b (u(t), v(t))\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} (d\varrho(\lambda) \Phi(\lambda, u), \Phi(\lambda, v)),$$

причем функция $\varrho(\lambda)$ единственна тогда и только тогда, когда оператор L_0 максимально симметрический.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.
2. H. Langer, Über die Methode der richtenden Functionalen von M. G. Krein, Acta Math. Hungarica, **21**, 1970.
3. Ф. С. Рофе-Бекетов, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений. Функциональный анализ и его применения, Тр. V Всесоюзн. конф. по функц. анал. и его применениям, Баку, 1961.

Поступила 4.XI 1969 г.

Институт математики АН УССР