УДК 519.45+519.48

Слойно-компактные абелевы группы

В. М. Полецких

С. Н. Черников детально изучил строение, так называемых, слойно-конечных групп [1]. Так он назвал периодические группы, у которых количество элементов произвольного фиксированного порядка конечно.

В данной работе делается попытка выделить класс топологических групп со свойством, являющимся соответствующим аналогом слойной конечности. Первым шагом на пути к этому естественно было изучить топологические абелевы группы со свойством, которое мы назвали слойной компактностью.

Перед тем как дать точное определение, напомним о понятии порядка элемента группы относительно ее подгруппы. Пусть H — произвольная подгруппа группы G, и пусть g — элемент из группы G. Считают, что натуральное число m называется порядком элемента g относительно подгруппы H, если g^m принадлежит H, и m — наименьшее натуральное число со свойством $g^m \in H$.

Определение 1. Топологическая группа называется слойно-компактной, если замыкание совокупности элементов произвольного конечного фиксированного порядка относительно произвольной компактной подгруппы есть компактное множество.

Легко видеть, что данное определение в случае дискретных периодических групп превращается в определение слойно-конечных групп.

Понятно, что подгруппа слойно-компактной группы слойно-компактна.

Через f_n обозначим отображение группы G на себя по правилу: $g \to g^n$, где $g \in G$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Определение 2. Топологическая группа G называется группой с условием индуктивности для подгрупп, если объединение всех подгрупп произвольной возрастающей цепочки

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots, \; n = 1, 2, 3, \ldots,$$

есть замкнутая подгруппа группы G.

Отметим, что подгруппой топологической группы понимаем замкнутую подгруппу.

Определение 3. Топологическая группа G называется K-группой, если ее произвольное компактное подмножество топологически порождает компактную подгруппу в группе G. К K-группам, например, принадлежат периодические локально нильпотентные локально компактные группы [2, стр. 301].

Определение 4. Топологическая группа G называется группой конечного ранга, если для нее найдется такое натуральное число r, что каждая подгруппа, порожденная конечным множеством элементов, имеет r элементов, которые топологически порождают эту подгруппу (специальный ранг А. И. Мальцева для топологических групп [3]).

Через J_p обозначим аддитивную группу кольца целых p-адических чисел, через R_p-аддитивную группу поля p-адических чисел. Считаем, что группа G полная, если в группе G существует решение для произвольного уравнения $x^n = g$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$

Через A^n обозначим совокупность элементов a^n, где элемент a пробегает множество A.

Л е м м а 1. *Пусть элемент g группы G такой, что g^n принадлежит подгруппе H, тогда утверждается, что порядок элемента g относительно подгруппы H делит n.*

Действительно, пусть m — порядок элемента g относительно подгруппы H. Так как m — натуральное число, то n можно представить в виде $qm + r$, где $0 \leqslant r < m$.

Если $r = 0$, то все доказано, если же $r > 0$, то тогда $g^r \in H$, а это противоречит тому, что m есть порядок элемента g относительно подгруппы H.

Л е м м а 2. *Пусть G — топологическая группа, а H — ее открытая подгруппа, тогда утверждается, что совокупность элементов данного порядка n относительно подгруппы H есть замкнутое множество.*

Предположим, что множество всех элементов порядка n относительно подгруппы H (это множество мы обозначим через H_n) есть незамкнутое множество. Тогда пусть h — один из предельных элементов множества H_n. При отображении $f_n : g \to g^n$, где $g \in G$, прообраз $f_n^{-1}(H) = H_n^*$ содержит $\overline{H}_n$, а это означает, что порядок элемента h относительно подгруппы H делит число n. Пусть порядок элемента h относительно подгруппы H равняется m. Ясно, что $m < n$.

Рассмотрим отображение $f_m : g \to g^m$, где $g \in G$. Так как отображение f_m непрерывно, то $f_m^{-1}(H)$ — открытое множество, содержащее элемент h. Отсюда вытекает, что пересечение $H_n \cap f_m^{-1}(H) \neq \varnothing$ и, значит, элементы из этого пересечения имеют порядки относительно подгруппы H, которые делят m. Однако m строго меньше n, отсюда вытекает, что множество H_n замкнуто.

Л е м м а 3. *Пусть группа G — строго локально компактная примарная слойно-компактная вполне несвязная группа, тогда утверждается, что группа G содержит либо подгруппу типа R_p, либо подгруппу типа p^∞ (p — простое число, по которому примарна группа G).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть H — открытая компактная подгруппа в группе G. Из леммы 1 следует, что все элементы из группы G относительно подгруппы H имеют порядок вида p^j ($j = 0, 1, \ldots$). Обозначим через M_i совокупность тех элементов, порядок которых относительно подгруппы H равен p^i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Ясно, что $M_i^p \subset M_{i-1}$.

Рассмотрим такую цепочку компактных множеств:

$$M_1 \supset M_2^p \supset M_3^{p^2} \supset \ldots \supset M_i^{p^{i-1}} \supset \ldots \supset .$$

Докажем, что эта цепочка не содержит пустых множеств. Действительно, допустив противное, предположим, что множество M_i пусто, тогда отсюда немедленно следует, что множества $M_i, M_{i+1}, \ldots, M_n$ и т. д. пусты. А это означает, что группа G есть объединение подгруппы H и множеств $M_1, M_2, \ldots, M_{i-1}$. Но множество $H \cup M_1 \cup \ldots \cup M_{i-1}$ компактно, значит, и группа G компактна, но это противоречит условию леммы 2. Отсюда следует, что наше исходное допущение неверно и, значит, все множества $M_i^{p^i}$ не пусты.

Ясно, что пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} M_i^{p^{i-1}}$ непусто. Обозначим это пересечение через M_1^*. Построим теперь такую цепочку: $M_2 \supset M_3^p \supset M_4^{p^2} \supset \ldots \supset$. Пересечение всех множеств этой цепочки опять не пусто. Обозначим его через M_2^*. Переходя к цепочкам $M_k \supset M_{k+1}^p \supset \ldots \supset M_{k+i}^{p^i} \supset \ldots$, получим снова непустые пересечения M_k^*. Докажем, что $M_k^* = M_{k+1}^{*p}$. Данное равенство будет следовать из такого утверждения.

Пусть f — непрерывное отображение топологического пространства T в себе и пусть в пространстве T задана убывающая цепочка замкнутых множеств: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$, причем A_1 — компактное множество; тогда утверждается верность такого равенства: $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)$. То, что $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) \subset \bigcap_{i=1}^{\infty} f(A_i)$ очевидно, докажем обратное включение.

Пусть элемент c принадлежит $\bigcap_{i=1}^{\infty} (A_i)$. Обозначим через C прообраз элемента c при отображении f. Ясно, что C — замкнутое множество. Обозначим через C_i пересечение $C \cap A_i$. Очевидно, что C_i — замкнутое и непустое множество, причем $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n \supset \ldots$ Так как C_1 — компактное множество, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$ непусто. Пусть $t \in \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Ясно, что элемент t принадлежит $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, а это означает, что элемент $c = f(t)$ принадлежит $f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Из способа построения множеств M_k^* и только что доказанного утверждения следует равенство $M_k^* = M_{k+1}^{*p}$.

Пусть элемент $x_0 \in M_1^*$; тогда найдется такой элемент x_1 из M_2^*, что $x_0 = x_1^p$, для элемента x_1 найдется такой элемент x_2, что $x_1 = x_2^p$ и т. д. Рассмотрим возрастающую цепочку подгрупп $\overline{\{x_0\}} \subset \overline{\{x_1\}} \subset \ldots \subset \overline{\{x_n\}} \subset \ldots$ Если $\overline{\{x_0\}}$ — дискретная группа, то подгруппа $N = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{\{x_i\}}$ есть группа типа p^∞.

Докажем теперь, что N — замкнутая подгруппа в группе G. Это следует из такого утверждения. Если G — локально компактная вполне несвязная группа и N — ее подгруппа, изоморфная группе типа p^∞, то N — дискретная подгруппа. Предположим противное, пусть N — недискретная подгруппа; тогда подгруппа N принадлежит некоторой открытой компактной подгруппе H. Для замыкания B подгруппы N имеем такое тождество $\overline{B^n} = B$ для любого натурального числа n. Так как подгруппа B компактна, а отображение $f_n : a \to a^n$, $a \in B$, для любого n непрерывно, то $B^n = B$. Данное равенство означает, что B — полная компактная подгруппа. Однако нетрудно показать, что в этом случае B — связное множество, чего быть не может. Отсюда следует, что подгруппа N дискретна, а значит, и замкнута.

Если $\overline{\{x_0\}}$ — группа типа J_p, то подгруппа $L = \bigcup_{i=0}^{\infty} \overline{\{x_i\}}$ — замкнутая подгруппа в группе G. Действительно, пусть B — замыкание подгруппы L. Так как фактор-группа $L/\overline{\{x_0\}}$ в фактор-группе $B/\overline{\{x_0\}}$ есть группа типа p^∞, то $B = L$. Из работы [3, теорема 5] следует, что подгруппа L — группа типа R_p.

Теорема 1. *Если G — слойно-компактная локально компактная К-группа, то из равенства $\overline{G^n} = G$ следует $G^n = G$.*

Доказательство. Если $\overline{G^n} = G$, то это означает, что для любой окрестности U_x элемента x из группы G найдется элемент y такой, что $y^n \in U_x$, т. е. прообраз U_x при отображении $f_n : g \to g^n$, где $g \in G$, непуст. Пусть $\underset{s \in J}{U_s}$ — окрестности элемента x, причем такие, что замыкания $\underset{s \in J}{\overline{U_s}}$ компактны, $\bigcap_{s} \overline{U}_s = x$ и все $\underset{s \in J}{U_s}$ принадлежат открытому множеству B, замыкание которого компактно. Группу, порожденную замыканием множества B, обозначим через B_1. По условию B_1 — компактная открытая подгруппа. Через B_1^* обозначим прообраз $f_n^{-1}(B_1)$. Докажем, что B_1^* — компактное множество.

Действительно, легко видеть, что B_1^* есть совокупность тех и только тех элементов, порядки которых относительно подгруппы B_1 делят n. Так как G — слойно-компактная группа, то B_1^* — компактное множество как объединение конечного числа компактных множеств.

Понятно, что $f_n^{-1}(\overline{U}_s)$ принадлежат B_1^*. Множества $f_n^{-1} \underset{s \in J}{(\overline{U}_s)}$ образуют центрированную систему множеств.

Действительно,

$$\bigcap_{i=1}^{m} f_n^{-1}(\overline{U}_{s_i}) \supset \bigcap_{i=1}^{m} f_n^{-1}(U_{s_i}) = f_n^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{m} U_{s_i}\right),$$

однако $\bigcap_{i=1}^{m} U_{s_i}$ есть окрестность элемента x, значит, множество $f_n^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{m} U_{s_i}\right)$ непусто, и, значит, множество $\bigcap_{i=1}^{m} f_n^{-1}(\overline{U}_{s_i})$ также не пусто. Отсюда получаем, что $\bigcap_{s \in J} f_n^{-1}(\overline{U}_s)$ — непустое множество, однако $\bigcap_{s \in J} f_n^{-1}(\overline{U}_s) = f_n^{-1} \times \left(\bigcap_{s \in J} \overline{U}_s\right) = f_n^{-1}(x)$. Отсюда вытекает, что в G существует такой элемент y, что $y^n = x$.

Замечание 1. Пусть G — топологическая группа, обозначим через f_n^{-1} отображение $g \to g^n$, где $g \in G$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Можно показать, что группа G тогда и только тогда слойно-компактна, когда прообраз $f_n^{-1}(N)$, где N — произвольная компактная подгруппа группы G, есть компактное множество при любом n.

Лемма 4. *Если G — слойно-компактная группа, а H — ее инвариантная компактная подгруппа, то фактор-группа $G^* = G/H$ слойно-компактна.*

Действительно, пусть M^* — компактная подгруппа группы G^*. Обозначим через T_n^* совокупность таких элементов из группы G^*, что $T_n^{*n} \subset M^*$. Возьмем прообраз M^* при естественном гомоморфизме группы G на группу G^* и обозначим его через M. Понятно, что M — компактная подгруппа группы G. Через T_n обозначим совокупность таких элементов из группы G, что $T_n^n \subset M$. T_n — компактное множество в группе G.

Легко доказать, что образ T_n при естественном гомоморфизме группы G на группу G^* содержит T_n^*. Однако образ T_n есть компактное множество. Так как T_n^* — замкнутое множество, то T_n^* — компактное множество и, значит, фактор-группа G^* слойно-компактна.

Лемма 5. *Расширение компактной группы с помощью слойно-компактной есть слойно-компактная группа.*

Пусть группа G такая, что ее фактор-группа $G^* = G/H$ по некоторой компактной подгруппе H слойно-компактна. Докажем тогда, что и группа G слойно-компактна.

Пусть T — произвольная компактная подгруппа группы G. Через T_n обозначим прообраз $f_n^{-1}(T)$, понятно, что $f_n^{-1}(T)$ — замкнутое множество. Подгруппа TH компактна, через T^* обозначим образ подгруппы TH в фактор-группе G^*, через T_n^* — прообраз $f_n^{-1}(T^*)$. Так как фактор-группа

G^* слойно-компактна, то множество T_n^* компактно. Но легко видеть, что $T_n \subset \varphi^{-1}(T_n^*)$, где φ — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G^*. Отсюда вытекает, что T_n — компактное множество, а это означает, что группа G слойно-компактна.

Лемма 6. *Пусть G — слойно-компактная локально компактная нильпотентная K-группа; тогда в группе G существует единственная максимальная полная подгруппа.*

(Это непосредственно вытекает из теоремы 1 данной работы и из работы [4, стр. 407].)

Лемма 7. *Пусть G — локально компактная слойно-компактная K-группа и пусть R — полная подгруппа, которая принадлежит центру группы G; тогда фактор-группа G/R слойно-компактна.*

Доказательство. Пусть T^* — компактная подгруппа фактор-группы $G^* = G/R$ и пусть φ — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G^*. В группе G существует такое компактное множество M [5, стр. 28], что $\varphi(M) = T^*$. Прообраз $\varphi^{-1}(T^*)$ обозначим через T. Понятно, что множество M принадлежит T. Обозначим через T_1 подгруппу, порожденную множеством M. Тогда $T = RT_1$, где T_1 — компактная подгруппа группы G. Обозначим через T_n^* прообраз $f_n^{-1}(T^*)$, пусть элемент a^* принадлежит T_n^* и a — представитель класса a^*.

Так как $a^* \in T_n^*$, то $a^n \in RT_1$ и, значит, $a^n = rt$, где $r \in R$, $t \in T_1$. Так как R — полная подгруппа, принадлежащая центру, то в подгруппе R существует такой элемент b, что $b^n = r$ и $(ab)^n = t$. Элемент ab есть представитель класса a^*. Отсюда вытекает, что произвольному классу a^* из T_n^* соответствует представитель a такой, что $a^n \in T_1$. Обозначим через T_n прообраз $f_n^{-1}(T_1)$. Так как T_n — компактное множество, а образ $\varphi(T_n)$ — также компактное множество, которое содержит T_n^*, то отсюда вытекает, что множество T_n^* компактно. А это означает, что фактор-группа G/R слойно-компактна.

Лемма 8. *Пусть G — локально компактная слойно-компактная K-группа и пусть в группе G существует максимальная полная подгруппа R, принадлежащая центру, тогда утверждается, что все силовские подгруппы фактор-группы $G^* = G/R$ компактны.*

Докажем, что фактор-группа G^* вполне несвязная. Действительно, пусть G_0 — компонента единицы группы G. Так как G — K-группа, то G_0— компактная группа, причем подгруппа G_0 полная [6]. Так как подгруппа R — максимальная полная подгруппа, то компонента G_0 принадлежит R и отсюда вытекает, что G^* — вполне несвязная группа. Все силовские подгруппы группы G^* замкнуты [7, стр. 343] и, значит, слойно-компактны (см. лемму 7). Если бы одна из силовских подгрупп не была компактной, то фактор-группа G^* содержала бы подгруппу типа p^∞ либо типа R_p, а это означало, что R не является максимальной полной подгруппой. Полученное противоречие доказывает нашу лемму.

Лемма 9. *Топологическая периодическая локально компактная вполне несвязная локально нильпотентная группа G тогда и только тогда слойно-компактная, когда слойно-компактная каждая ее силовская подгруппа.*

Необходимость очевидна.

Достаточность. Так как группа G есть K-группа, то нам нужно только доказать, что совокупность элементов произвольного фиксированного порядка относительно произвольной открытой компактной подгруппы образует компактное множество. Пусть H — произвольная открытая компактная подгруппа. Так как группа G с отмеченной в ней произвольной открытой компактной подгруппой H разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп (см. [2, стр. 330]), то отсюда очень легко получить доказательство нашей леммы.

Лемма 10. *Пусть G — локально компактная K-группа и L — цен-*

тральная слойно-компактная подгруппа группы G. Если фактор-группа G/L компактна, то группа G слойно-компактна.

Доказательство. Если K_1 — замыкание коммутанта группы G, то K_1 — компактная подгруппа группы G [8, стр. 283]. Так как K_1 — компактная подгруппа, то имеет место теорема об изоморфизме: $H^* = LK_1/K_1 \cong L/L \cap K_1$. Отсюда следует, что подгруппа H^* фактор-группы $G^* = G/K_1$ слойно-компактна. Так как фактор-группа G^*/H^* компактна, то абелева группа G^* может быть представлена в виде $H^* \cdot T^*$, где T^* — некоторая компактная подгруппа группы G^*. Согласно теореме об изоморфизме имеем: $H^* \cdot T^*/T^* \cong H^*/H^* \cap T^*$. Из леммы 5 данной работы вытекает, что G — слойно-компактная группа.

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная периодическая абелева группа, группа G тогда и только тогда слойно-компактна, когда в группе G существует слойно-компактная подгруппа H такая, что фактор-группа $G^* = G/H$ вполне несвязна и все ее силовские подгруппы компактны.*

Очевидно, что группа G есть K-группа и компонента G_0 единицы группы G принадлежит H. Обозначим через H_1 фактор-группу H/G_0, через G_1 — фактор-группу G/G_0. Докажем, что G_1 — слойно-компактная группа. Пусть φ — естественный гомоморфизм группы G_1 на фактор-группу G_1/H_1 и G_p^* — силовская подгруппа фактор-группы G_1/H_1. По условию G_p^* — компактная подгруппа. Подгруппа $B = \varphi^{-1}(G_p^*)$ — слойно-компактная подгруппа группы G_1 (см. лемму 10). Подгруппа B содержит в себе силовскую p-подгруппу группы G_1. Отсюда вытекает, что каждая силовская подгруппа группы G_1 слойно-компактна. Из леммы 9 данной работы вытекает, что G_1 — слойно-компактная группа, а из леммы 5 — что и группа G слойно-компактна. Таким образом, достаточность доказана. Необходимость непосредственно вытекает из леммы 8.

Теорема 3. *Фактор-группа слойно-компактной локально компактной периодической абелевой группы G слойно-компактна.*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа группы G, докажем, что фактор-группа G/H слойно-компактна. Возьмем в $G^* = G/H$ произвольную открытую компактную подгруппу T^*. Докажем, что фактор-группа G^*/T^* слойно-компактна. Обозначим через φ естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G^*, через T — прообраз $\varphi^{-1}(T^*)$. T — открытая подгруппа в группе G. Пусть T_1 — открытая компактная подгруппа группы T. Обозначим через G_1 фактор-группу G_1/T_1, через T_2 — фактор-группу T/T_1, фактор-группа G_1/T_2 изоморфна фактор-группе G/T. Из [1, стр. 104] вытекает, что G_1/T_2 — слойно-конечная группа, а значит, что и фактор-группа G/T — слойно-конечная. Так как фактор-группа G/T изоморфна фактор-группе G^*/T^*, то из леммы 5 вытекает, что G^* — слойно-компактная группа.

Лемма 11. *Пусть G — абелева компактная p-группа без элементов конечного порядка и пусть некоторая ее подгруппа H есть прямое произведение подгрупп $\{\overline{a_i}\}$, где $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, тогда утверждается, что существует такая подгруппа H_1, которая тоже есть прямое произведение подгрупп $\{\overline{b_j}\}$, где $j = 1, 2, 3, \ldots, n$, что группа G есть прямое произведение подгруппы H_1 и некоторой подгруппы T, причем H_1 содержит H.*

Доказательство проведем индукцией по числу прямых сомножителей, которые образуют H.

1. Пусть $H = \{\overline{a_1}\}$, обозначим через C изолятор подгруппы $\{\overline{a_1}\}$. Очевидно, C содержит $\{\overline{a_1}\}$, причем изолятор C есть группа типа J_p (см. [3, стр. 88]) и фактор-группа G/C не имеет элементов конечного порядка. Пусть G_1 — группа характеров группы G, а M — группа характеров фактор-группы G/C. Нетрудно показать, что M — полная подгруппа в группе G_1. Так как G_1 — дискретная абелева группа, то $G_1 = M \times K_1$. Отсюда G — прямое произведение изолятора C и некоторой подгруппы K, т. е. $G = C \times K$.

2. Пусть наше утверждение верно для подгруппы H, которая имеет $n-1$ прямых сомножителей; докажем в этом случае, что утверждение верно и для случая, когда H имеет n прямых сомножителей. Итак, пусть $H=\prod_{i=1}^{n}\{\overline{a_i}\}$. Обозначим через H^* прямое произведение подгрупп $\{\overline{a_i}\}$, где $i=2, 3, \ldots, n$, подгруппа $H_1^*=H^*\cdot C$ разлагается в прямое произведение подгрупп H^* и C (см. [3, замечание 1]). Рассмотрим фактор-группу G/C; при естественном гомоморфизме φ группы G на фактор-группу G/C подгруппа H_1^* переходит в подгруппу M_1^*, которая имеет $n-1$ прямых сомножителей $\{\overline{l_i}\}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$. По предложению индукции найдется такая подгруппа M^*, которая содержит в себе M_1^* и имеет $n-1$ прямых сомножителей $\{\overline{m_i}\}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, т. е. $M^*=\prod_{i=1}^{n-1}\{\overline{m_i}\}$, причем фактор-группа G/C есть прямое произведение M^* и некоторой подгруппы K^*. Обозначим $\varphi^{-1}(M^*)$ через H_1, $\varphi^{-1}(K^*)$ — через K_1. Очевидно, что пересечение $H_1\cap K_1=C$. Подгруппа K_1 есть прямое произведение подгруппы C и некоторой подгруппы T. Тогда группа G есть прямое произведение групп H_1 и T, причем H_1 удовлетворяет всем требуемым условиям.

Иными словами, мы доказали следующее: если G — абелева компактная p-группа без элементов конечного порядка и H — ее подгруппа конечного ранга r, то она принадлежит некоторому прямому сомножителю группы G ранга r.

Пусть G — слойно-компактная локально компактная абелева p-группа, если группа G некомпактна, то в ней существует нетривиальная максимальная полная подгруппа R, причем фактор-группа G/R компактна (см. лемму 8). Так как фактор-группа G/R компактна, то группу G можно записать в виде $R\cdot T$, где T — некоторая компактная подгруппа группы G. Пусть R_1 — группа характеров группы R. Как известно, R_1 также является p-группой, причем легко доказать, что R_1 — группа без элементов конечного порядка. Пусть L — открытая компактная подгруппа группы R_1. Так как группа характеров подгруппы L есть прямое произведение конечного числа групп типа p^∞, то подгруппа L есть прямое произведение конечного числа групп типа J_p. Рассмотрим фактор-группу R_1/L, она дискретна. Докажем, что нижний слой фактор-группы R_1/L — конечный. Предположим, что это не так, тогда в R_1 существует такая подгруппа B, что фактор-группа $B/L=\prod_{i=1}^{s}\{a_i\}$, где $\{a_i\}$ — циклические группы простого порядка, и $s>r$ (r — ранг группы L). Из леммы 11 вытекает, что $B=H\times K$, где H — подгруппа ранга r, содержащая L. Если подгруппа K нетривиальна, то фактор-группа B/H имеет элементы бесконечного порядка, чего быть не может. Отсюда вытекает, что $H=B$ и, значит, подгруппа B имеет ранг r. Но тогда фактор-группа B/L имеет ранг $l\leqslant r$, однако $s>r$. Отсюда следует, что фактор-группа R_1/L имеет конечный нижний слой, а это означает, что R_1 — группа конечного ранга (см. [3, теорема 3]). Из [3, теоремы 4 и 5] следует, что $R=B_1\times\ldots\times B_k\times T_1\times\ldots\times T_s$, где B_i — группы типа p^∞, T_j — группы типа R_p.

Теперь мы можем сформулировать такую теорему.

Теорема 4. *Локально компактная абелева p-группа тогда и только тогда слойно-компактна, когда в группе G существует такая подгруппа H конечного ранга, что фактор-группа G/H компактна.*

Лемма 12. *Пусть G — локально компактная слойно-компактная абелева p-группа без элементов конечного порядка, тогда группу G можно представить в виде прямого произведения подгрупп R и T, где R — максимальная полная подгруппа группы G, а T — некоторая ее компактная подгруппа.*

Действительно, как мы уже доказали, $G = RT_1$, где T_1 — компактная подгруппа группы G. Обозначим через M пересечение $R \cap T_1$. Подгруппа M — группа конечного ранга. Из леммы 11 следует, что в группе T_1 существует подгруппа M_1, что $M \subset M_1$, ее ранг равен рангу подгруппы M, причем $T = M_1 \times T$.

Докажем, что M_1 принадлежит R. Предположим, что это не так. Пусть существует такой элемент $a \in M_1$, что $a \in R$. Рассмотрим тогда подгруппу $\overline{\{a\}}\, M$, обозначим через L пересечение $\overline{\{a\}} \cap M$. Здесь могут иметь место два случая:

а) L — единичная подгруппа, тогда ранг группы $\overline{\{a\}}\, M$ больше ранга M и, значит, больше ранга группы M_1, чего быть не может;

б) L отлична от единичной группы, тогда подгруппа $\overline{\{a\}}$, принадлежащая T_1, принадлежит и подгруппе R (см. [3, замечание 1]). Отсюда следует, что $M_1 \in R$. Легко доказать, что $G = R \times T$ [9, теорема 13].

Теорема 5. *Пусть G — локально компактная слойно-компактная абелева p-группа со второй аксиомой счетности, группа G тогда и только тогда есть прямое произведение своей максимальной полной группы R и некоторой компактной группы T, когда выполняется такое равенство:*

$$R \cap [G] = [R].$$

(Через символ H мы обозначаем, следуя Н. Я. Виленкину, замыкание всех элементов конечного порядка группы H.)

Данная теорема является следствием из теоремы 29 работы [10].

Лемма 13. *Локально компактная абелева группа G с условием индуктивности для подгрупп вполне несвязна.*

Действительно, если допустить, что компонента единицы группы G нетривиальна, то в группе G найдется такая подгруппа N, что фактор-группа G/N есть одномерный тор. Однако одномерный тор, очевидно, не является группой с условием индуктивности для подгрупп. Отсюда следует, что G — вполне несвязная группа.

Следствие 1. *Локально компактная группа с условием индуктивности для подгрупп вполне несвязна.*

Для доказательства этого факта нужно дословно повторить доказательство леммы 4.2 работы [11], используя лемму 13.

Теорема 6. *Локально компактная группа G тогда и только тогда будет группой с условием индуктивности для подгрупп, когда группа G содержит открытую компактную подгруппу с условием максимальности для подгрупп.*

Необходимость. Если G — группа с условием индуктивности для подгрупп, то она вполне несвязна и, очевидно, содержит в себе открытую компактную подгруппу H. Пусть $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ — произвольная возрастающая цепочка подгрупп в группе H. Так как подгруппа H также является группой с условием индуктивности для подгрупп, то подгруппа $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ — замкнутая подгруппа группы H. Из [2, лемма 2.7] вытекает, что B совпадает с некоторой подгруппой A_j, это означает, что подгруппа H удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

Достаточность. Пусть группа G содержит в себе открытую компактную подгруппу H, удовлетворяющую условию максимальности для подгрупп, и пусть нам дана произвольная цепочка подгрупп:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

Докажем, что подгруппа $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ замкнута. Рассмотрим пересечение $B \cap H = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap H)$. Так как подгруппа H удовлетворяет условию максимальности для подгрупп, то $\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i \cap H) = A_l \cap H$, где A_l — некоторая подгруппа нашей цепочки. Из равенства $B \cap H = A_l \cap H$ следует, что подгруппа B локально компактная, а значит, она замкнута.

Замечание 2. Так как произвольная компактная группа с условием индуктивности для подгрупп удовлетворяет условию максимальности для подгрупп [2, лемма 2.7], то эту теорему можно сформировать еще так.

Локально компактная группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию индуктивности для подгрупп, когда группа G содержит в себе открытую компактную подгруппу с условием индуктивности для подгрупп.

Лемма 14. *Пусть G — локально компактная группа с условием индуктивности для подгрупп, тогда объединение произвольной совокупности подгрупп G_{x}, $x \in J$, которые линейно упорядочены по включению, есть замкнутая подгруппа.*

Так как G — группа с условием индуктивности для подгрупп, то существует открытая компактная подгруппа H с условием максимальности для подгрупп. Понятно, что $H \cap (\bigcup_{x \in J} G_x) = \bigcup_{x \in J}(H \cap G_x)$.

Докажем, что существует подгруппа $G_y \cap H$, что все $G_x \cap H$ принадлежат подгруппе $G_y \cap H$. Предположим, что это не так, пусть такой подгруппы $G_y \cap H$ не существует. Тогда имеем, что для произвольной подгруппы $G_z \cap H$ существует бесконечное множество подгрупп $G_m \cap H$, $m \in M$, каждая из которых строго содержит в себе подгруппу $G_z \cap H$. Возьмем из совокупности подгрупп $G_m \cap H$, $m \in M$, некоторую подгруппу $G_{m_1} \cap H$.

Для подгруппы $G_{m_1} \cap H$ тоже существует подгруппа $G_n \cap H$, которая строго содержит в себе $G_{m_1} \cap H$ и т. д. Так как этот процесс бесконечный, то получим в группе H возрастающую цепочку подгрупп. Однако по условию этого быть не может. Отсюда следует, что существует такая подгруппа $G_y \cap H$, что все $G_x \cap H$ принадлежат $G_y \cap H$. Тогда имеем: $H \cap (\bigcup_{x \in J} G_x) = \bigcup_{x \in J}(H \cap G_x) = H \cap G_y$. Из этого равенства следует, что подгруппа $\bigcup_{x \in J} G_x$ локально компактна и, значит, замкнута.

Следствие 2. *Пусть G — локально компактная периодическая группа с условием индуктивности для подгрупп, L — ее абелева подгруппа, а N — ее инвариантная подгруппа, тогда подгруппа LN замкнута.*

В группе L существует такая максимальная подгруппа K, что подгруппа K принадлежит L и KN — замкнутая подгруппа. Докажем, что подгруппа K совпадает с L. Предположим, что это не так, и пусть $a \in L \setminus K$. Подгруппа $K_1 = K\overline{\{a\}}$ замкнута, подгруппа NK_1 также замкнута. Действительно, $NK_1 = (NK)\overline{\{a\}}$. Отсюда следует, что $L = K$.

Используя это следствие, легко доказать, что в локально компактной слойно-компактной абелевой p-группе произведение произвольных двух подгрупп M и N замкнуто. Действительно, так как M и N — слойно-компактные группы, то они могут быть представлены в виде $M = R_1 \cdot M_1$ и $N = R_2 \cdot N_2$, где R_1, R_2 — максимальные полные подгруппы соответственно в группах M и N, а M_1 и N_1 — компактные подгруппы.

Так как максимальная полная подгруппа группы G есть группа с условием индуктивности для подгрупп, то MN — замкнутая группа.

Теорема 7. *Пусть G — локально компактная группа и N — ее инвариантная подгруппа. Тогда, если группа N и фактор-группа G/N удовлетворяют условию индуктивности для подгрупп, то и группа G удовлетворяет условию индуктивности для подгрупп.*

Легко видеть, что G — вполне несвязная группа и, значит, обязательно содержит открытую компактную подгруппу H. Остается доказать, что подгруппа H удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

Пусть φ — естественный гомоморфизм группы HN на фактор-группу HN/N. Очевидно, что гомоморфизм φ задает некоторый непрерывный гомоморфизм ψ группы H на фактор-группу HN/N. Из [9, теорема 12] следует, что фактор-группа $H/H \cap N$ изоморфна фактор-группе HN/N. Так как группы $H \cap N$ и HN/N компактны и удовлетворяют условию максимальности для подгрупп, то из [11, лемма 4.11] следует, что H — группа с условием максимальности для подгрупп.

Теорема 8. *Локально компактная абелева p-группа G тогда и только тогда будет группой с условием индуктивности для подподгрупп, когда ее группа характеров G_1 есть слойно-компактная группа.*

Необходимость. Так как G — группа с условием индуктивности для подгрупп, то в ней существует компактная открытая подгруппа H с условием максимальности для подгрупп. Как известно, подгруппа H есть прямое произведение конечного числа групп типа J_p и конечных циклических групп.

Из теории характеров немедленно следует, что в группе G_1 существует такая компактная подгруппа H_1, что фактор-группа G_1/H_1 есть прямое произведение конечного числа групп типа p^∞ и конечных циклических групп. Из леммы 5 следует, что G_1 — слойно-компактная группа.

Достаточность. Пусть H_1 — открытая компактная подгруппа группы G_1, тогда фактор-группа G_1/H_1 есть прямое произведение конечного числа группы типа p^∞ и конечных циклических групп. Из теории характеров немедленно следует, что в группе G существует открытая компактная подгруппа с условием максимальности для подгрупп. А это означает, что G есть группа с условием индуктивности для подгрупп.

Замечание 3. Для того чтобы периодическая локально компактная абелева группа G была слойно-компактной, достаточно, чтобы ее группа характеров была группой с условием индуктивности для подгрупп.

Следствие 3. *Локально компактная абелева p-группа со второй аксиомой счетности тогда и только тогда имеет вид:*

$$G = \prod_{i=1}^{s} B_i \times \prod_{j=1}^{k} G_j \times D,$$

где B_i — группы типа R_p, C_j — группы типа J_p, D — дискретная счетная группа, когда группа G удовлетворяет условию индуктивности для подгрупп, а ее группа характеров G_1 удовлетворяет условию: $R \cap [G_1] = [R]$, где R — максимальная полная подгруппа группы G_1.

В заключение автор выражает благодарность В. С. Чарину.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Черников, Бесконечные слойно-конечные группы, Матем. сб., 22 (64), 1948.
2. В. М. Глушков, Локально-нильпотентные локально бикомпактные группы, Труды Московского матем. об-ва, т. 4, 1955.
3. В. С. Чарин, О группах конечного ранга. II, УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
4. А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», М., 1967.
5. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применение, ИЛ, М., 1950.
6. J. Mycielski, Some properties of connected compact groups, Colloq. math., 5, № 2, 1958.
7. В. С. Чарин, О группах конечного ранга. III, УМЖ, т. 21, № 3, 1969.
8. В. И. Ушаков. Топологические группы с бикомпактными классами сопряженных подгрупп, Матем. сб., 63 (105), 1964.
9. Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Физматгиз, М., 1954.
10. Н. Я. Виленкин, Теория топологических групп. II, УМН, т. 5, № 4(38), 1950.
11. В. М. Глушков, Нильпотентные локально бикомпактные группы, Изв. АН СССС, сер. матем., т. 20, № 4, 1956.

Поступила. 13.I 1970 г., после переработки — 12.V 1970 г.
Киевский государственный университет