1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.512.6

О построении чебышевских приближений функциями интерполяционных классов

Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк

Опираясь на теорему узлового значения, установленную в предыдущем сообщении [1], авторы в данной статье рассматривают обобщенный процесс последовательных чебышевских интерполяций (о. п. ч. и.) для построения чебышевских приближений функциями интерполяционного класса — в условиях допускаемых, вообще, на каждом из последовательных этапов процесса, известных неточностей при фактически не завершаемой итеративной процедуре выравнивания абсолютных величин очередных $n+2$ альтернирующих отклонений. Исследуемая в указанных условиях равномерная сходимость процесса оказывается, в точно определяемом смысле, устойчивою относительно упомянутых неточностей. В связи с указанным центральным вопросом в статье обсуждаются некоторые общие вопросы нормативной разработки вычислительной схемы процесса о. п. ч. и., а также выявляются некоторые принципиальные особенности, отличающие саму структуру процесса о. п. ч. и. по сравнению с обыкновенным («точным») процессом п. ч. и., а в § 1 попутно отмечается новое — особо простое и прозрачное — доказательство сходимости этого последнего при аппроксимации функциями интерполяционного класса.

§ 1. Прежде всего, напомним формулировки исходных, положенных в основу нашей трактовки, общих определений.

Пусть I обозначает заданный сегмент $[a, b]$ действительной оси R, E_{n+1} — множество точек $X=(x_0, \ldots, x_n)$ $\overline{n+1}$-мерного куба $I^{n+1}(a \leqslant x_i \leqslant b;\ i=\overline{0, n})$, для которого выполняются неравенства $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$; E_{n+2} — множество точек $P=(x_0, \ldots, x_{n+1})$ $\overline{n+2}$-мерного куба $I^{n+2}(a \leqslant x_i \leqslant b;\ i=\overline{0, n+1})$ таких, что $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$.

Действительная функция $\varphi(x)$, заданная на I, называется альтернирующей на P, если $(-1)^i\varphi(x_i) \geqslant 0$ либо $(-1)^i\varphi(x_i) \leqslant 0$ при $i=\overline{0, n+1}$; если же $(-1)^i\varphi(x_i)=\lambda$ при $i=\overline{0, n+1}$, то $\varphi(x)$ называется равноальтернирующей на P. Альтернирование или равноальтернирование называется строгим, если указанные условия выполняются без обращения в нуль какого-либо из значений $\varphi(x_i)$ $(i=\overline{0, n+1})$.

Пусть $F(x; g) \equiv F(x; g_0, \ldots, g_n)$ обозначает заданную действительную функцию от $x \in I$ и от $n+1$ скалярных параметров $\{g_j\}$ $(g_j \in R;\ j=\overline{0, n})$, непрерывную относительно всех $n+2$ ее аргументов. При варьировании численной конкретизации компонентов g_j параметрического вектора $g \in R^{n+1}$ тем же символом $F(x; g)$ представляется определенный класс Ω непрерывных функций $\Phi(x)=\Phi_g(x)$ $(\equiv F(x; g))$ одного аргумента x. Этот класс функций называется *интерполяционным* (порядка n), если выполняются следующие три условия (из них первое в действительности является уже определяющим — см. [4, 6]).

1°. Как бы ни были заданы точки-наборы $X=(x_0, \ldots, x_n) \in E_{n+1}$ и $Y=(y_0, \ldots, y_n) \in R^{n+1}$ [1], существует в Ω одна и только одна функция $\Phi(x)=\Phi_g(x)$ такая, что $\Phi(x_i)=y_i$ $(i=\overline{0, n})$ (интерполяционное свойство или J-свойство класса Ω).

2°. Функция $\Phi(x) \in \Omega$, определяемая интерполяционными условиями 1°, непрерывна как функция от x, X и Y на $I \times E_{n+1} \times R^{n+1}$ (K-свойство класса Ω).

3°. Не существует двух различных функций $\Phi_{g'}(x)$, $\Phi_{g''}(x)$ из Ω, разность которых оказалась бы альтернирующей на каком-нибудь $P \in E_{n+2}$ ($\mathfrak{A}$-свойство класса Ω).

Для всякой, вообще, функции $\psi(x)$, непрерывной на I, мы здесь примем величину $\|\psi\|=\max\limits_{x \in I}|\psi(x)|$ в качестве нормы $\psi(x)$ — ее равномерного уклонения от нуля на отрезке I.

Известно [2 — 7], что в классе Ω существует единственная функция $\Phi^*(x)=\Phi_{g^*}(x)$, для которой

$$\|\Phi^*\|=\min_{\Phi \in \Omega}\|\Phi\|=\varrho. \tag{1}$$

Нахождение $\Phi^*(x)$ составляет *задачу чебышевского минимакса* для рассматриваемого интерполяционного класса Ω. Как известно, при $\rho>0$ для задачи (1) имеют место аналоги теорем Чебышева — Маркова и Валле Пуссена (с которыми мы свяжем и здесь соответственно термины «чебышевский альтернанс» и «валлепуссеновский альтернанс» (ср. [11, стр. 54]), а также их дискретные варианты.

Отдельно отметим, что для задачи (1) имеет место и следующее обобщение (ε, η)-*теоремы*, известной из теории полиномиальных приближений (см. [11, стр. 21]).

Аналог (ε, η)-теоремы. *Если имеем последовательность функций $\Phi^\nu(x) \in \Omega$ такую, что $\|\Phi^\nu\|-\|\Phi^*\| \to 0$ при $\nu \to \infty$, тогда также и $\|\Phi^\nu-\Phi^*\| \to 0$, т. е. последовательность $\{\Phi^\nu(x)\}$ равномерно сходится к $\Phi^*(x)$ на I.*

Доказательство получается без труда, если воспользоваться для параметризации данного класса Ω специальной системой параметров $g=\mathfrak{g}=(\mathfrak{g}_0, \ldots, \mathfrak{g}_n)$:

$$\mathfrak{g}_j=\Phi(\breve{x}_j) \quad (j=\overline{0, n}), \tag{2}$$

где абсциссы $\breve{x}_j \in I$ фиксированы (учесть J- и K-свойства класса Ω). Действительно, числовой набор $\mathfrak{g}^*=(\mathfrak{g}_0^*, \ldots, \mathfrak{g}_n^*)$, дающий решение задачи (1), должен принадлежать замкнутому и заведомо ограниченному точечному множеству $\check{\mathfrak{G}}=\{\mathfrak{g}: \|\Phi_\mathfrak{g}\| \leqslant \|\Phi_{\check{\mathfrak{g}}}\|\} \subset R^{n+1}$, где $\check{\mathfrak{g}}$ — какой-нибудь конкретно заданный набор (предполагаемый отличным от $\mathfrak{g}^*$). В таком случае рассуждение по образцу примененного при доказательстве полиномиальной (ε, η)-теоремы ([11], цитир. место) позволяет противопоставить всякому (сначала достаточно малому) $\varepsilon>0$ такое $\eta>0$, чтобы неравенство $\|\Phi_\mathfrak{g}\|<\|\Phi_{\mathfrak{g}^*}\|+\eta$ влекло за собой $r(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)<\varepsilon$ («r» — евклидово расстояние). Отсюда утверждение теоремы вытекает непосредственно.

Замечание. Доказанная теорема позволяет при оценке приближенной реализации Φ^ν решения Φ^* задачи (1) характеризовать степень достигнутой точности малостью разности («превышения»)

$$\|\Phi^\nu\|-\|\Phi^*\|=\|\Phi^\nu\|-\varrho. \tag{3}$$

[1] Как было оговорено нами и в [1], наши рассмотрения для конкретности формулируются в терминах одного из вариантов ([2], ср. также [3—6]) определения понятия интерполяционного класса, но результаты остаются в силе и при известных видоизмененных определениях [7—9].

При более обычной формулировке вопросов *чебышевского приближения функций* один и тот же интерполяционный класс Ω может трактоваться как инструмент приближенного представления (в частности — наилучшего равномерного) различных непрерывных на отрезке I функций $f(x)$. В таком случае, заменяя $F(x; g)$ на $F(x; g)-f(x)$ (имея в виду изучение отклонений функции $\Phi_g(x) \equiv F(x; g)$ не от нуля, а от $f(x)$), естественно вводим в рассмотрение соответствующие классы функций аргумента x, представимые символом

$$\Phi^{[f]}(x) \equiv \Phi_g^{[f]}(x) \quad (\equiv F(x; g) - f(x)). \tag{4}$$

Легко видеть, что при фиксации определения не только функции $F(x; g)$, но и конкретно заданной непрерывной функции $f(x)$ и при варьировании численной конкретизации параметрического вектора $g \in R^{n+1}$ — представляемый символом (4) класс непрерывных функций аргумента $x \in I$, в свою очередь, также удовлетворяет указанным условиям 1°—3°, т. е. является сам по себе интерполяционным классом. Именно для определяемого таким образом интерполяционного класса

$$\Omega^{[f]} = \{\Phi^{[f]}(x)\} \equiv \{\Phi_g^{[f]}(x)\} \tag{5}$$

приходится фактически ставить упомянутую выше задачу чебышевского минимакса, обозначаемую в этом случае «*задачей наилучшего равномерного (чебышевского) приближенного представления функции $f(x)$ посредством функции интерполяционного класса* Ω»:

$$\|\Phi_g^{[f]}(x)\| = \max_{x \in I} |\Phi_g^{[f]}(x)| = \text{functio } (g) = \min! \,(= \varrho^{[f]}). \tag{6}$$

Для фактического построения (с любой, принципиально говоря, степенью точности) решающего чебышевскую задачу (1) — (6) вектора $g = g^*$ в работах [5, 2, 9] были предложены некоторые аналоги эффективного метода [10—12] последовательных чебышевских интерполяций (п. ч. и.). В трактовке указанных аналогов процесса п. ч. и. предполагалось на каждом («ν»-м, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$) этапе процесса построение точной равноальтернирующей $\widetilde{\Phi}^{\nu}(x)$ ($\equiv \Phi_{\tilde{g}^{\nu}}(x)$ или соответственно $\Phi_{\tilde{g}^{\nu}}^{[f]}(x)$) на соответствующем очередном $\overline{n+2}$-точечном наборе $\overline{P}_{\nu} \in E_{n+2}$ [1]. Причем переход от $\overline{P}_{\nu-1}$ к $\overline{P}_{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots$), совершаемый по одному из вариантов — «*оптимального*», «*полуоптимального*» или хотя бы «*допустимого*» (ср. [12] или [11, стр. 79]) [2], применявшихся при решении, по методу п. ч. и., чебышевской задачи полиномиального приближения (вообще говоря — на основе исследования на extrema функции $\widetilde{\Phi}^{\nu-1}$ на отрезке I), обеспечивает неуклонное повышение, каждый раз, заменяющей $\dot{\varrho}(\overline{P}_{\nu-1})$ величины $\dot{\varrho}(\overline{P}_{\nu})$ $(= |\lambda_{\nu}|$ (ср. выше обозначение «λ»)) — минимального уклонения от нуля функций рассматриваемого класса Ω либо $\Omega^{[f]}$ на соответствующем наборе $\overline{P}$.

Установленная нами в [1] теорема позволяет непосредственно указать единообразный подход для весьма простого доказательства сходимости указанного аналога процесса п. ч. и.: полагая

$$\|\widetilde{\Phi}^{\nu}\| = \max_{x \in I} |\widetilde{\Phi}^{\nu}(x)| = L_{\nu} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{7}$$

---

[1] Обозначения $\overline{P}$, $\overline{\Phi}$, а также $\widetilde{\Phi}$ здесь будут соответствовать применявшимся нами в [1]; причем, в ближайшем контексте, принимается $\overline{\Phi}^{\nu} = \widetilde{\Phi}^{\nu-1}$ [$\overline{\Phi}^{\nu}$ — исходная для ν-го этапа ($\nu=1, 2, \ldots$) строго альтернирующая на $\overline{P}_{\nu}$ (еще «не выравненная») функция класса Ω].

[2] В названной последовательности вариантов каждый предшествующий является частным случаем последующего. Отдельно разъясним, что употребляя ниже в нескольких местах выражение «по варианту хотя бы полуоптимальному», мы имеем в виду переход от $P_{\nu-1}$ к P_{ν} по предписаниям полуоптимального варианта (характеризуемого при распространении и на о. п. ч. и. условиями (12), (13)), включающего в качестве частного случая и вариант ***оптимальный***.

и имея в виду, для конкретности, х о т я б ы п о л у о п т и м а л ь н ы й вариант перехода от $\overline{P}_{\nu-1}$ к $\overline{P}_\nu$, достаточно учесть, что пока в ходе процесса п. ч. и. разность $L_{\nu-1} - \rho$ $(< L_{\nu-1} - \dot{\rho}\,(\overline{P}_\nu) < \underline{\underline{L_{\nu-1} - \overline{u}_\nu}})$[1] для некоторых ν принимает значения, бóльшие какой-нибудь фиксированной величины $\gamma \geq 0$ — очередные соответствующие приращения $\dot{\rho}(\overline{P}_\nu) - \dot{\rho}\,(\overline{P}_{\nu-1})$ $(\geqslant \underline{\underline{\dot{\rho}(\overline{P}_\nu) - \overline{u}_\nu}})$, в силу упомянутой теоремы [1], в свою очередь оказываются каждый раз выше определенной фиксированной величины $\delta\,(\gamma) > 0$, но такой факт может иметь место не более как конечное число раз, поскольку $\dot{\rho}\,(\overline{P}_\nu) < \rho = \mathrm{const}$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

§ 2. В отличие от условий реализации процесса п. ч. и. для задач п о л и н о м и а л ь н о г о приближения, мы при построении решений н е л и н е й н о - п а р а м е т р и ч е с к и х чебышевских задач типа (1) — (6) практически приходим к рассмотрению обобщенного процесса о. п. ч. и. (ср. начало статьи), в котором каждый из последовательных ν-этапов процесса ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) складывается из нескольких начальных (ν, k)-шагов ($k = 1, 2, \ldots, \varkappa_\nu$) итеративной процедуры (фактически не завершаемой!) выравнивания абсолютных величин альтернирующих отклонений $\Phi^{\nu-1}(x_i^\nu) \to \Phi^\nu(x_i^\nu)$ $(i = \overline{0,\ n+1})$ на очередном $P_\nu \in E_{n+2}$[2]. Подчеркнем, что п о м и м о н е и з б е ж н о й неполноты указанных выравниваний, обусловливаемой ограничением значности (т. е. количества значащих цифр) самих цифровых вычислений, мы здесь будем иметь в виду и возможные, на первых этапах процесса о. п. ч. и., значительно более грубые усечения процедуры выравнивания, диктуемые соображениями большей экономичности общего вычислительного плана реализации искомого решения. При описании процесса о. п. ч. и. мы в н а ч а л е, для большей определенности, будем предполагать переходы от $P_{\nu-1}$ к P_ν выполняемыми х о т я б ы в п о л у о п т и м а л ь н о м варианте.

Предупредим еще читателя, что, трактуя здесь, собственно, задачу (6), мы, наряду с упрощениями обозначений, оговоренными уже в последней сноске, условимся употреблять более простые символы Ω, Φ, ρ, считая их отождествленными с $\Omega^{[f]}$, $\Phi^{[f]}$, $\rho^{[f]}$ при каком-нибудь зафиксированном задании функции $f\,(x)$, соотнося, если угодно, первоначальной формулировке задачи (1) символы $\Omega^{[0]}$, $\Phi^{[0]}$, $\rho^{[0]}$.

На исходном «нулевом» этапе ($\nu = 0$) процесса о. п. ч. и. для составления набора P_0 можно, например, определив исходную $\Phi^{(\nu,k)} = \Phi^{(0.0)} \in \Omega$ точным интерполированием $\Phi^{(0,0)}\,(\xi_i) = 0$ на некотором $X_0 = (\xi_0, \ldots, \xi_{n+1})$ (при расположении X_0 на I, напоминающем, скажем, расположение нулей чебышевского полинома $T_{n+1}^{[I]}$), пополнить набор X_0 еще одной точкой $\xi \in I$ — по возможности такой, в которой $\Phi^{(0,0)}\,(x)$ достигает своего модуль-максимума на I — и образовать из $X_0 \bigcup \{\xi\}$ требуемый набор $P_0 \in E_{n+2}$ (с необходимым, вообще, скорректированием нумерации прежних точек $\xi_0, \ldots, \xi_n$). На этом наборе P_0 функция $\Phi^{(0.0)}\,(x)$ является н е с т р о г о а л ь т е р н и р у ю щ е й ($n + 1$ интерполяционным нулям этой функции приписываются условные знаки + или — для оправдания формальной

---

[1]) $\overline{u}_\nu = \min\limits_i |\widetilde{\Phi}^{\nu-1}(x_i^\nu)|$ $[\dot{\varrho}\,(\overline{P}_{\nu-1}) \leqslant \overline{u}_\nu < \dot{\varrho}\,(\overline{P}_\nu)]$ и $L_{\nu-1}$ замещают соответственно $\overline{u}$ и $\overline{v}$ из [1] — при $\overline{P}_\nu$ вместо $\overline{P}$ и $\widetilde{\Phi}^{\nu-1} \equiv \overline{\Phi}^\nu$ вместо $\overline{\Phi}$. Заметим, что и при наиболее общем—« д о п у с т и м о м » варианте перехода от $\overline{P}_{\nu-1}$ к $\overline{P}_\nu$ здесь потребовалось бы (ср. (24), (25)) лишь самое незначительное видоизменение рассматриваемого доказательства.

[2]) Мы в дальнейшем изложении, для упрощения обозначений, о п у с к а е м ч е р т о ч к и над буквами P и Φ, которые выше сохранялись для более наглядной связи с обозначениями в формулировке теоремы [1]. Впрочем, примененные только что в тексте условно-схематические обозначения $\Phi^{\nu-1}$, Φ^ν требуют еще уточняющей расшифровки, которая будет дана ниже.

картины альтернирования на P_0)[1]. Выполнив некоторое число $\varkappa_0$ начальных шагов итеративной процедуры выравнивания (ср. [14]), мы получаем взамен $\Phi^{0,0}(x)$ *приближенно-равноальтернирующую* на P_0 функцию $\Phi^{(0,\varkappa_0)}(x) \equiv \widehat{\Phi}^{P_0}(x) \in \Omega$ (см. ближайшее разъяснение ниже), которая будет на следующем этапе ($\nu = 1$) использована в качестве исходной строго альтернирующей (но не равноальтернирующей) функции $\Phi^{(1,0)}(x) \equiv \widehat{\Phi}^{P_0}(x)$ на новом наборе $P_1 \in E_{n+2}$, назначаемом взамен предыдущего P_0 по хотя бы полуоптимальному (ср. сноску в конце §1) варианту перехода на основе исследования на extrema функции $\widehat{\Phi}^{P_0}(x)$ на I. Некоторое число $\varkappa_1$ начальных шагов итеративной уравнительной процедуры, примененной к функции $\Phi^{(1,0)}(x)$, приводит к *приближенно-равноальтернирующей* на P_1 функции $\Phi^{(1,\varkappa_1)}(x) \equiv \widehat{\Phi}^{P_1}(x) \in \Omega$, которая на следующем этапе ($\nu = 2$) принимается в качестве исходной строго альтернирующей функции $\Phi^{(2,0)}(x) \in \Omega$, подлежащей приближенному выравниванию на новом наборе $P_2 \in E_{n+2}$, назначаемом взамен P_1, подобно тому, как P_1 назначался взамен P_0 и т. д.

Сформулированное в предыдущем абзаце несколько схематическое описание процесса о. п. ч. и. нуждается в ближайших пояснениях.

На ν-м этапе процесса ($\nu \in \{0, 1, 2, \ldots\}$) мы применяем к функции $\Phi^{(\nu,0)}(x) \in \Omega$, альтернирующей на $P_\nu = (x_0^\nu, \ldots, x_{n+1}^\nu) \in E_{n+2}$ ($\operatorname{sgn}\Phi^{(\nu,0)}(x_i^\nu) = (-1)^i v_\nu$, $v_\nu = \pm 1$), некоторое число $\varkappa_\nu$ начальных шагов итеративной процедуры выравнивания значений $|\Phi^{(\nu,k)}(x_i^\nu)|_{i=0}^{n+1}$ (при $k = 0, \ldots, \varkappa_\nu - 1$), что приводит нас к функции $\Phi^{(\nu,\varkappa_\nu)}(x) \equiv \widehat{\Phi}^{P_\nu}(x) \in \Omega$, также альтернирующей на P_ν: $\widehat{\Phi}^{P_\nu}(x_i^\nu) = (-1)^i v_\nu \varepsilon_i^\nu$, где $\varepsilon_i^\nu > 0$ ($i = \overline{0, n+1}$). Здесь, как общее правило, равенство $n+2$ значений ε_i^ν остается не достигнутым:

$$\varepsilon_{\min}^\nu \equiv \min_i \varepsilon_i^\nu \equiv \alpha_\nu < \varepsilon_{\max}^\nu \equiv \max_i \varepsilon_i^\nu \equiv \beta_\nu, \tag{8}$$

причем

$$\alpha_\nu < \dot{\varrho}(P_\nu) < \beta_\nu \tag{9}$$

по известным свойствам функций интерполяционных классов, вытекающим из условия 3°; но вместе с тем естественно, во всяком случае, предположить уже выполненными требования

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\nu &> \min_i |\widehat{\Phi}^{P_{\nu-1}}(x_i^\nu)| \equiv A_{\nu-1}, \\ \beta_\nu &< \max_i |\widehat{\Phi}^{P_{\nu-1}}(x_i^\nu)| \equiv B_{\nu-1}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

За меру незавершенности процедуры выравнивания принимаем *показатель относительного рассеяния*

$$\mathfrak{D}_\nu = (\beta_\nu - \alpha_\nu) : \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \equiv \frac{d_\nu}{0{,}5(\alpha_\nu + \beta_\nu)} \equiv \frac{200\, d_\nu}{\alpha_\nu + \beta_\nu}\ \%. \tag{11}$$

По указанным уже в начале § 2 соображениям экономичности общего вычислительного плана мы не считали бы целесообразным добиваться с первого же этапа высокой степени совершенства в выравнивании $n+2$

[1]) В том случае, когда упомянутая дополнительная точка ξ определяется систематически проведенным исследованием $\Phi^{(0,0)}(x)$ на extrema, естественно использовать результаты этого исследования для непосредственного улучшения (еще до процедуры выравнивания $\Phi^{(0,0)}(x)$) всего состава набора P_0 — с заменой, по крайней мере, простых нулей ξ_i близкими точками exrtema без нарушения факта альтернирования $\Phi^{(0,0)}(x)$.

значений ε_i^ν. Напротив, представляется возможным ограничиваться на первых этапах (скажем, при $\nu = 0,1$) более грубыми результатами выравнивания, где величина $\mathfrak{D}_\nu$, например, порядка одного или нескольких процентов, в ином случае — даже порядка 20—30% [1)], но с быстрым умалением в ходе последующих этапов. Проводимое ниже доказательство сходимости:

$$\|\widehat{\Phi}^{P_\nu}\| - \varrho \to 0 \text{ при } \mathfrak{D}_\nu \to 0 \ (\nu \to \infty)$$

является центральным вопросом настоящего рассмотрения.

Что касается последовательных переходов от $P_{\nu-1}$ к $P_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$, то моментом специфическим для о. п. ч. и. по сравнению с п. ч. и. является условие (ср. обозначения в (10))

$$A_{\nu-1} \geqslant \alpha_{\nu-1} \tag{12}$$

взамен аналогичного условия с $\dot{\rho}\,(\overline{P}_{\nu-1})$ в правой части (ср. обозначения в конце § 1). Требование же, формулируемое здесь равенством

$$B_{\nu-1} = \|\widehat{\Phi}^{P_{\nu-1}}\| = \widehat{L}_{\nu-1}, \tag{13}$$

при хотя бы полуоптимальном (ср. еще раз сноску выше) варианте перехода мы сохраняем и для процесса о. п. ч. и. Подчеркнем, вместе с тем, что, подстать допущению (8), более близким к приближенно-вычислительной практике о. п. ч. и. будет вариант перехода от $P_{\nu-1}$ к P_ν, соответствующий фигурировавшему и в теории п. ч. и. ([12]; [11, стр. 79]) под названием *допустимого*, который определится, при сохранении (12), условием

$$B_{\nu-1} = \widehat{L}'_{\nu-1}; \quad \frac{\widehat{L}'_m - A_m}{\widehat{L}_m - A_m} \geqslant 1 - \tau = \mathrm{const} > 0 \ (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{14}$$

Полуоптимальный вариант (12), (13) содержится, очевидно, как частный случай в (12) — (14) при $\tau = 0$.

Технические моменты возможно стандартизованного подхода (по какому-нибудь из рассматриваемых вариантов) к целесообразному назначению нового набора P_ν на основе исследования на extrema функции $\widehat{\Phi}^{P_{\nu-1}}(x)$ на отрезке I — принципиально те же, что и в случае обыкновенного процесса п. ч. и.; они непосредственно довольно прозрачны и для п. ч. и. многократно разъяснялись в литературе (см., например, отчетливую трактовку этого вопроса в [15, стр. 97, 98]).

В нижеследующих рассмотрениях мы будем иметь в виду процесс о. п. ч. и. при наиболее общем — *допустимом* — варианте (12) — (14) перехода от $P_{\nu-1}$ к P_ν.

Теорема о сходимости процесса о. п. ч. и. *Если в описанном выше обобщенном процессе последовательных чебышевских интерполяций (о. п. ч. и.) показатель (11) относительного рассеяния $\mathfrak{D}_\nu$ стремится к нулю при $\nu \to \infty$, то последовательность приближенно равноальтернирующих функций $\widehat{\Phi}^{P_\nu}(x) \in \Omega$ равномерно сходится к искомому решению $\Phi^*(x)$ задачи* (1) — (6)[2)].

[1)] Ср. примеры в [13, 14], где однотипные процессы о. п. ч. и. практически применялись и к более широкой категории чебышевских задач (включающей, в частности, задачу дробно-рациональной аппроксимации), для которых (наряду с существованием и единственностью точного решения) предполагалась хотя бы только применимость прямых аналогов теорем Чебышева — Маркова и Валле Пуссена, а для класса аппроксимирующих функций рассматривалось в качестве основного требования выполнение «$\mathfrak{A}$-свойства» (см. 3°, § 1).

[2)] Следующее ниже доказательство непосредственно распространяется и на аналогично формулируемую теорему для дискретной чебышевской задачи, где вместо фигурирующего в (6) сплошного отрезка I — конечное N-точечное подмножество ($N > n + 2$).

Доказательство. Напомним, что по смыслу введенных выше обозначений, с учетом соотношений (9), (12), (10), (14) и известных свойств равноальтернирующей, имеем при $\mathbf{v} = 0, 1, 2, \ldots$

$$\widehat{\Phi}^{P_\nu}(x_i^\nu) = (-1)^i \mathfrak{v}_\nu \varepsilon_i^\nu \quad (\varepsilon_i^\nu > 0, \ \ i = \overline{0, n+1}; \ \mathfrak{v}_\nu = \pm 1);$$

$$\min_i \varepsilon_i^\nu = \alpha_\nu, \ \max_i \varepsilon_i^\nu = \beta_\nu; \quad \alpha_\nu < \dot{\varrho}(P_\nu) < \beta_\nu;$$

$$\| \widehat{\Phi}^{P_\nu} \| = \widehat{L}_\nu.$$

$$\operatorname{sgn} \widehat{\Phi}^{P_\nu}(x_i^{\nu+1}) = (-1)^i \mathfrak{v}_{\nu+1}; \ \min_i |\widehat{\Phi}^{P_\nu}(x_i^{\nu+1})| = A_\nu \geqslant \alpha_\nu (> A_{\nu-1} \text{ при } \nu \geqslant 1);$$

$$\max_i |\widehat{\Phi}^{P_\nu}(x_i^{\nu+1})| = \widehat{L}'_\nu; \quad \frac{\widehat{L}'_\nu - A_\nu}{\widehat{L}_\nu - A_\nu} \geqslant 1 - \tau = \text{const} > 0.$$

$$\dot{\varrho}(P_{\nu+1}) < \widehat{L}'_\nu. \tag{15}$$

Учитывая еще очевидные (в предположении незавершенности процесса о. п. ч. и.) неравенства (при $\mathbf{v} = 0, 1, \ldots$)

$$\dot{\varrho}(P_\nu) < \varrho, \text{[1]} \tag{16}$$

имеем бесконечную цепочку неравенств:

$$0 < \alpha_0 \leqslant A_0 < \alpha_1 \leqslant A_1 < \alpha_2 \leqslant A_2 < \ldots < \varrho. \tag{17}$$

Следовательно, существует

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu \to \infty} A_\nu = \mathfrak{a} \leqslant \varrho. \tag{18}$$

Далее, согласно (11), где $\beta_\nu - \alpha_\nu = d_\nu$, имеем

$$d_\nu = \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} \mathfrak{D}_\nu = \left(\alpha_\nu + \frac{1}{2} d_\nu\right) \mathfrak{D}_\nu \tag{19}$$

и затем

$$d_\nu = \frac{\alpha_\nu}{1 - \frac{1}{2}\mathfrak{D}_\nu} \mathfrak{D}_\nu. \tag{19'}$$

Поскольку в правой части (19′) — произведение ограниченной величины на бесконечно малую, заключаем, что

$$d_\nu \to 0 \text{ при } \nu \to \infty. \tag{20}$$

В отличие от положения вещей в трактовке аналогичных дискретных задач, связываемых с применением обыкновенного процесса п. ч. и. (с условным абстрагированием и от ошибок округления!), здесь вычислительный процесс о. п. ч. и. предстает как принципиально бесконечный. Однако (по крайней мере — при исключении случаев, когда искомая равноальтернирующая функция чебышевского альтернанса имеет более, чем $n + 2$, точек достижения модуль-максимума) здесь для дискретной чебышевской задачи окажется конечным число этапов процесса, но для последнего этапа ($\nu = \nu^*$) число шагов $\varkappa_{\nu^*} = \infty$(ср. обсуждение родственного вопроса в [11, стр. 80, 81]), учитывая существенным образом при данном обобщении K -свойство 2° класса Ω).

[1]) Точнее говоря (но без какого-нибудь влияния на формулировку дальнейших соотношений), с учетом и возможных «уникально счастливых» случаев (ср. конец доказательства),

$$\dot{\varrho}(P_\nu) \leqslant \varrho. \tag{16'}$$

Из неравенств $A_\nu < \alpha_{\nu+1} < \dot{\varrho}(P_{\nu+1}) < \beta_{\nu+1} = \alpha_{\nu+1} + d_{\nu+1}$ выводим:

$$0 < \dot{\varrho}(P_{\nu+1}) - A_\nu < (\alpha_{\nu+1} - A_\nu) + d_{\nu+1}. \tag{21}$$

Поскольку $d_{\nu+1} \to 0$ и, с другой стороны, $\lim\limits_{\nu\to\infty}(\alpha_{\nu+1} - A_\nu) = \mathfrak{a} - \mathfrak{a} = 0$ в силу (18), то

$$\dot{\varrho}(P_{\nu+1}) - A_\nu \to 0 \text{ при } \nu \to \infty. \tag{22}$$

Мы теперь должны существенным образом опереться на теорему, установленную нами в [1], используя следующие соответствия (частью сходные с фигурировавшими в конце § 1):

$$\left.\begin{array}{c}(\overline{P} \ldots P_{\nu+1}), \qquad (\overline{\Phi} \ \ldots \ \hat{\Phi}^{P_\nu}), \\ (\overline{u} \ldots A_\nu), \quad (\overline{v} \cdots \hat{L}'_\nu), \ (\overline{\varrho} \ldots \dot{\varrho}(P_{\nu+1})).\end{array}\right\} \tag{23}$$

По прямому смыслу теоремы [1], пока в рассматриваемом нами процессе разность $\hat{L}'_\nu - A_\nu$ (соответствующая $\overline{v} - \overline{u}$ в цитируемой теореме) принимает для некоторых ν значения, большие какого-нибудь фиксированного $\gamma > 0$, соответственные значения разности $\dot{\rho}(P_{\nu+1}) - A_\nu$ (отвечающие $\overline{\rho} - \overline{u}$) должны превышать некоторое соответственное число $\delta(\gamma) > 0$. Но если так, то из доказанного соотношения (22) непосредственно вытекает

$$\hat{L}'_\nu - A_\nu \to 0 \text{ при } \nu \to \infty, \tag{24}$$

а в силу условия (14), означающего, что $\hat{L}_\nu - A_\nu \leqslant \dfrac{1}{1-\tau}(\hat{L}'_\nu - A_\nu)$, заключаем немедленно, что и

$$\hat{L}_\nu - A_\nu \equiv \| \hat{\Phi}^{P_\nu} \| - A_\nu \to 0. \tag{25}$$

Но $\hat{L}_\nu - A_\nu = (\hat{L}_\nu - \varrho) + (\varrho - A_\nu)$, где оба слагаемых в правой части заведомо положительные, так что соотношение (25) возможно лишь при условии, что при $\nu \to \infty$ одновременно

$$\hat{L}_\nu - \varrho \equiv \| \hat{\Phi}^{P_\nu} \| - \varrho \equiv \| \hat{\Phi}^{P_\nu} \| - \| \Phi^* \| \to 0 \tag{26}$$

и

$$\varrho - A_\nu \to 0. \tag{27}$$

Соотношением (26), в силу аналога (ε, η)-теоремы § 1, как раз и устанавливается непосредственно справедливость утверждения доказываемой нами теоремы. Вместе с тем, соотношение (27), в сопоставлении с (18), (20) и (9), означает, что

$$\varrho = \mathfrak{a} = \lim_{\nu\to\infty} \alpha_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \dot{\varrho}(P_\nu), \tag{28}$$

хотя, в отличие от положения вещей в точном процессе п. ч. и., здесь нет речи об обязательно монотонном стремлении величины $\dot{\rho}(P_\nu)$ ($\leqslant \rho$ согласно (16), (16′)) к ее пределу ρ.

Доказанная теорема обнаруживает устойчивость факта сходимости процесса о. п. ч. и. относительно неточностей допускаемых в незавершаемой процедуре итеративного выравнивания модулей отклонений $\Phi^{(\nu,k)}(x_i^\nu)$ $(i = \overline{0, n+1})$, — неточностей безгранично умаляемых ($\mathfrak{D}_\nu \to 0$) при $\nu \to \infty$, но, возможно, значительных на первых этапах. Эти неточности, по смыслу изложенного выше, отнюдь не сводятся только к ошибкам от численных округлений, хотя включают последние как составную часть.

Что касается, собственно, упомянутых ошибок от округлений, то ближайшее их рассмотрение, при необходимой конкретизации аналитического определения самого интерполяционного класса Ω, выдвигает ряд специфических вопросов «анализа чувствительности», касающихся некоторых закономерностей, которые обнаруживаются в нормативном сопоставлении практических порядков малости различных взаимосвязанных (относящихся к оценкам точности) характеристических величин : величины (ср. (3)) превышения $\widehat{L}_\nu - \rho$, допустимых погрешностей определяемых значений параметров $\{\widehat{g}_j^\nu\}_{i=0}^n$ и абсцисс наборов $P_\nu = \{x_i^\nu\}_{i=0}^{n+1}$ (ср. в классическом случае полиномиальной аппроксимации некоторые рассмотрения в [11, стр. 56—60]). В данной статье, трактующей процесс о. п. ч. и. для интерполяционных классов в общей постановке, последний круг вопросов не рассматривается.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Т. Гаврилюк, Е. Я. Ремез, Предложение о функциях интерполяционного класса, ДАН СССР, т. 183, № 4, 1968.
2. E. Aparo, Su un procedimento di approssimazione secondo Cebyscev, Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat., **28**, № 3, 1960, 311—317.
3. Th. Motzkin, Approximation by curves of a unisolvent family, Bull. Amer. Math. Soc., **55**, № 8, 1949, 789—793.
4. L. Tornheim, On n-parameter families of functions, Trans. Amer. Math. Soc., **69**, N 3, 1950, 457—467.
5. Е. П. Новодворский, И. Ш. Пинскер, Процесс уравнивания максимумов, УМН, т. 6, № 6, 1951.
6. Ph. C. Curtis, n-parameter families and best approximation, Pacific J. of Math., **9**, N 4, 1959, 1013—1025.
7. М. И. Морозов, О некоторых вопросах равномерного приближения, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 1, 1952.
8. В. Н. Буров, Некоторые эффективные способы решения задачи П. Л. Чебышева, Изв. вузов, Математика, № 1, 1957.
9. В. Н. Буров, О некоторых вопросах равномерной аппроксимации, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, т. 218, 1961.
10. Е. Я. Ремез, Sur le calcul effectif des polynomes d'approximation de Tchebycheff, C. R. Acad. Sc. Paris, **199**, 1934, 337—339.
11. Е. Я. Ремез, Основы численных методов чебышевского приближения, «Наукова думка», К., 1969.
12. Е. Я. Ремез, О методе последовательных чебышевских интерполяций, УМЖ, т. XII, № 2, 1960.
13. Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк, Вычислительная разработка нескольких подходов к приближенному решению чебышевских задач с нелинейно входящими параметрами. II, УМЖ, т. XIII, № 1, 1961.
14. Е. Я. Ремез, В. Т. Гаврилюк, Вычислительная разработка нескольких подходов к приближенному решению чебышевских задач с нелинейно входящими параметрами. III, УМЖ, т. XIII, № 2, 1961.
15. E. W. Cheney, Introduction to approximation theory, New York, 1966.

Поступила 18.VI 1970 г.

Институт математики АН УССР