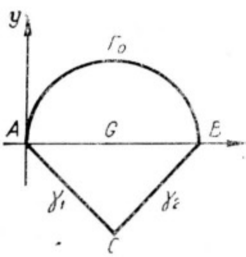
1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

О нормальной разрешимости задачи Трикоми для уравнения типа Лаврентьева—Бицадзе

Н. Г. Сорокина

Данная работа примыкает к статье автора [1], где исследовалась обобщенная разрешимость задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина эллиптико-гиперболического типа. Устанавливается нормальная разрешимость в смысле обобщенных решений задачи Трикоми для модельного уравнения смешанного типа, так называемого уравнения Лаврентьева — Бицадзе



$$\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} = f, \ f \in L_2(G) \tag{1}$$

(см. область G на рисунке). На это уравнение нельзя прямо обобщить подобный результат, установленный в [1], так как (1) — уравнение с разрывными коэффициентами.

1. Обобщенное решение задачи Трикоми. Рассмотрим уравнение (1) в области G с кусочно-гладким контуром $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ (рисунок). В нижней полуплоскости выражение $\operatorname{sign} y u_{xx} + u_{yy} = Lu$ гиперболично и $\gamma_1 = AC$, $\gamma_2 = BC$ — его характеристики. Нехарактеристический участок контура Γ_0 для простоты предположим нормальным, т. е. совпадающим с полуокружностью. Граничная задача Трикоми заключается в том, чтобы найти функцию u из соболевского пространства $W_2^2(G)$, удовлетворяющую уравнению (1) и граничному условию

$$u|_{\Gamma_0 \cup \gamma_1} = 0 \tag{2}$$

(функции u вообще комплексны). Исследуем только обобщенную разрешимость задачи (1), (2).

В дальнейшем удобно использовать следующие обозначения. Пусть G_r — область, $G_r = G \setminus (G \cap (K_r^+ \cup K_r))$, где K_r^+, K_r — кружки радиуса r: K_r^+ с центром в точке A, K_r с центром в точке B. Обозначим буквой U класс в пространстве $L_2(G)$ функций u с такими свойствами:

1) функции u непрерывны в замкнутой области $G \cup \Gamma$ и равны нулю на Γ_0;

2) функции u непрерывно дифференцируемы в области $G \cup \Gamma$ за вычетом точки B, вблизи которой порядок роста первых производных не выше $\frac{1}{2}$. Для любого r $u \in W_2^2(G_r)$.

Определение. Функция $u \in W_2^1(G)$ называется полусильным решением задачи (1), (2), если существует последовательность функций $u_n \in U \cap W_2^1(G)$ такая, что $Lu_n = f_n \in L_2(G)$ и при этом $\| u_n \|_{W_2^1(\gamma_1)} \to 0$, $\| u_n - u \|_{W_2^1(G)} \to 0$, $\| f_n - f \|_{L_2(G)} \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае считаем также, что функция u входит в область определения $D(T) \in W_2^1(G)$ полусильного оператора T задачи (1), (2) и $Tu=f$.

Введение оператора T оправдано включением L (гр) $\subset T$, где L (гр) — сильный оператор задачи (1), (2), определенный сужением T на функции $u \in D(T)$, для которых соответствующие приближающие последовательности $u_n \in W_2^2(G)$, а также тем, что сильную разрешимость доказать не удается.

Наше определение обобщенного решения связано с явным выражением решения задачи Трикоми, полученным А. В. Бицадзе [2, 3]. Приведем здесь результат А. В. Бицадзе в удобной для нас форме [3, стр. 102—106]. Пусть для определенности на рисунке полуокружность Γ_0 имеет радиус $\frac{1}{2}$, так что координаты точек A, B будут $A(0, 0)$, $B(1, 0)$. Следующая задача

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} = 0,\ u\big|_{\Gamma_0} = 0,\ u\big|_{\gamma_1} = \psi(x) \quad \left(\psi \in C^\infty\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \tag{3}$$

имеет единственное решение в классе функций, непрерывных в замкнутой области $G \cup \Gamma$, непрерывно дифференцируемых в $G \cup \Gamma$ за вычетом точек A, B, причем первые производные при приближении к точкам A, B допускают рост не выше 1-го порядка, а за вычетом этих точек кусочно непрерывно дифференцируемы. Это решение имеет вид:

$$u = u_э(x, y) = \operatorname{Re} \frac{2}{\pi(1+i)} \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right) \times \\ \times \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt \tag{4}$$

при $y > 0$ (причем $z = x + iy$), а при $y < 0$

$$u = u_г(x, y) = u_э(x+y, +0) - \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x-y}{2}\right). \tag{4'}$$

Очевидно, дифференциальные свойства функции u определяются свойствами интеграла $J = \int_0^1 \sqrt{\frac{z(1-z)}{t(1-t)}} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right) \psi\left(\frac{t}{2}\right) dt$, $y \geqslant 0$. Пусть теперь $\psi(x) \in C_0^\infty\left(0, \frac{1}{2}\right)$, тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ справедливо

$$J = \sqrt{z(1-z)} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \psi_1(t) \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t+z-2tz}\right) dt = \sqrt{z^3(1-z)} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \psi_1(t) \times \\ \times \frac{2(1-t)\,dt}{(t-z)(t+z-2tz)}, \tag{5}$$

где $\psi_1(t) \in C_0^\infty(\varepsilon, 1-\varepsilon)$. Из первого равенства (5) следует, что при $\{\varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon,\ y \geqslant 0\}$ $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и y, так как $\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \psi_1(t) \frac{dt}{t-z}$ — интеграл типа Коши с финитной функцией $\psi_1(t)$, а знаменатель $t + z - 2tz \neq 0$ при $0 < t < 1$. Из второго равенства (5) следует, что, так как вблизи точек A, B знаменатель подынтегральной функции не равен нулю, функция $u(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области $G \bigcup \Gamma$ за вычетом точки B, дважды кусочно непрерывно дифференцируема в $G \bigcup \Gamma$ за вычетом точек A, B, причем вблизи точки B первые производные растут не быстрее $\frac{1}{\sqrt{r}}$, $r = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$. Отсюда следует такая лемма.

Л е м м а 1. *Если функция* $\psi \in C_0^\infty\left(0, \frac{1}{2}\right)$, *то задача* (3) *имеет единственное решение в классе* U.

Следующая основная лемма будет доказана в п. 2.

Л е м м а 2. *Для функций* $u \in U$ *справедливо неравенство*

$$\lim_{r\to 0} \| Lu \|^2_{L_2(G_r)} + \| u \|^2_{W_2^1(\gamma_1)} \geqslant \alpha \lim_{r\to 0} \| u \|^2_{W_2^1(G_r)} \quad (\alpha > 0). \tag{6}$$

С л е д с т в и е 1. *Если функция* $u \in U$ *и при этом* $Lu \in L_2(G)$, *то* $u \in W_2^1(G)$.

С л е д с т в и е 2. *Для функций* $u \in D(T)$ *справедливо неравенство*

$$\| Tu \|^2_{L_2(G)} \geqslant \alpha \| u \|^2_{W_2^1(G)}. \tag{7}$$

Т е о р е м а 1. *Для любой функции* $f \in L_2(G)$ *существует полусильное решение* $u \in D(T)$ *задачи* (1), (2). *Это решение единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Единственность решения $u \in D(T)$ следует из неравенства (7), установим его существование. Доказательство достаточно провести для вещественных функций. Предположим сначала $f \in C^\infty(G)$. Задача $u_{xx} + u_{yy} = f$ в круге K $y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ имеет, как известно, решение u, равное нулю на границе круга и бесконечно дифференцируемое вплоть до его границы. Эту функцию u, рассматриваемую в верхней половине круга K, примем за значения некоторого решения уравнения (1) в области G для ее части $G_1 = G \bigcap (y > 0)$. По значениям $u_1(x, 0)$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0)$ достроим функцию u_1 в области $G_2 = G \bigcap (y < 0)$ по формуле Даламбера для уравнения $-u_{xx} + u_{yy} = f$. Значения u_1 на характеристике γ_1 обозначим как функцию ψ. Рассмотрим два случая: $\psi(C) = 0$ и $\psi(C) \neq 0$. Покажем, что в первом случае задача (1), (2) имеет полусильное решение. Так как $\psi(A) = \psi(C) = 0$, функцию ψ можно приблизить в метрике $W_2^1(\gamma_1)$ финитными функциями ψ_n. Пусть $u_{2,n} \in U$ — решение задачи

$$Lu_{2,n} = 0, \; u_{2,n}|_{\Gamma_0} = 0, \; u_{2,n}|_{\gamma_1} = \psi_n.$$

Такое решение существует в силу леммы 1. Полусильное решение задачи (1), (2) задается последовательностью $u_n = u_1 - u_{2,n} \in U$. Действительно, $Lu_n = Lu_1 = f$; $u_n \in W_2^1(G)$ в силу следствия 1. Замечая, что $u_n|_{\gamma_1} = \psi - \psi_n$, $L(u_n - u_m) = 0$, имеем вследствие (6) для разности функций $u_n - u_m$

$$\| \psi_n - \psi_m \|^2_{W_2^1(\gamma_1)} \geqslant \alpha \| u_n - u_m \|^2_{W_2^1(G)},$$

так что последовательность u_n фундаментальна в $W_2^1(G)$ вместе с ψ_n, фундаментальной в $W_2^1(\gamma_1)$. Следовательно, в метрике $W_2^1(G)$ существует предел этой последовательности u. Очевидно, функция u и будет полусильным решением.

Пусть теперь $\psi(C) \neq 0$. Мы сведем этот случай к предыдущему, если построим функцию $u_0 \in W_2^2(G)$ как некоторое решение уравнения $Lu = 0$, непрерывно дифференцируемое в области G вплоть до границы, и такое, что $u_0|_{\Gamma_0} = 0$, $u_0(C) = \psi(C)$. Действительно, после этого достаточно заменить в приведенном выше доказательстве функцию u_1 функцией $u_1 - u_0$. Построим функцию u_0. Очевидно, что для функции $\delta(x, y) = a + bx + cy + dxy$ всегда $L\delta = 0$. Потребуем: $\delta(A) = \delta(B) = 0$, $\delta(C) = \psi(C)$. Легко видеть, такая функция δ существует. Пусть ее значения на Γ_0 описываются функцией φ. В области G существует решение $w \in W_2^2(G)$ задачи $Lw = 0$, $w|_{\Gamma_0} = \varphi$, для которого $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ (см. [3, стр. 105]). Такое решение находится сначала в области G_1, как значения при $y \geqslant 0$ функции, гармонической в круге K и удовлетворяющей граничному условию $u|_{\Gamma_0} = \varphi(x, y)$, $u|_{\Gamma_0^*} = \varphi(x, -y)$, где Γ_0^* — нижняя полуокружность. Затем в области G_2 оно достраивается по значениям $w(x, 0)$, $\frac{\partial w}{\partial y}(x, 0)$ по формуле Даламбера. Так как $w(A) = w(B) = 0$, $\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$, то $w(C) = 0$. Очевидно, достаточно положить теперь $u_0 = \delta - w$.

Мы закончим доказательство теоремы, если построим полусильное решение (1), (2) для любой $f \in L_2(G)$. Существует последовательность функций $f_m \in C^\infty(G)$ такая, что $\|f_m - f\|_{L_2(G)} \to 0$, $m \to \infty$. Для любой функции f_m существует полусильное решение u_m задачи (1), (2). Пусть $u_n^{(m)}$ — соответствующая приближающая последовательность, построенная как выше. Положим $u_n^{(m)}|_{\gamma_1} = \psi_n^{(m)}$. К функциям u_m можно применить неравенство (7) в виде

$$\|f_m - f_l\|^2_{L_2(G)} \geqslant \alpha \|u_m - u_l\|^2_{W_2^1(G)},$$

так что фундаментальность последовательности u_m следует из фундаментальности f_m (в соответствующих метриках). Пусть $u \in W_2^1(G)$ — предел последовательности u_m. Покажем, что $u \in D(T)$ и $Tu = f$. Достаточно для любого k указать функцию $u_{n_k}^{(m_k)}$ такую, что

$$\|u_{n_k}^{(m_k)} - u\|_{W_2^1(G)} < \frac{1}{k}, \quad \|\psi_{n_k}^{(m_k)}\|_{W_2^1(\gamma_1)} < \frac{1}{k}, \quad \|Lu_{n_k}^{(m_k)} - f\|_{L_2(G)} < \frac{1}{k}. \tag{8}$$

Очевидно, $\|u_n^{(m)} - u\|_{W_2^1(G)} \leqslant \|u_n^{(m)} - u_m\|_{W_2^1(G)} + \|u_m - u\|_{W_2^1(G)}$, $Lu_n^{(m)} = f_m$. Зафиксируем m_k достаточно большим так, чтобы $\|u_{m_k} - u\|_{W_2^1(G)} < \frac{1}{2k}$, $\|f_{m_k} - f\|_{L_2(G)} < \frac{1}{k}$, а затем n_k достаточно большим так, чтобы $\|u_{n_k}^{(m_k)} - u_{m_k}\|_{W_2^1(G)} < \frac{1}{2k}$, $\|\psi_{n_k}^{(m_k)}\|_{W_2^1(\gamma_1)} < \frac{1}{k}$. Последнее возможно, так как при любом m_k $\|\psi_n^{m_k}\|_{W_2^1(\gamma_1)} \to 0$, $n \to \infty$. Ясно, что функция $u_{n_k}^{(m_k)}$ удовлетворяет неравенствам (8).

Теорема 1 доказана.

2. Доказательство леммы 2. Пусть $u \in U$. Достаточно доказать неравенство (6) для вещественных функций. Не ограничивая общности, предполагаем область G смещенной вдоль оси ox таким образом, что точка B совпадает с началом координат. Оценим снизу выражение $I_r = 2\int_{G_r} -Lu\,(au + bu_x + cu_y)\,dxdy$, где a, b, c — функции. Их выберем следующими:

$$a = \text{const} > 0, \; b = -\delta x, \; c = \begin{cases} \delta y, & y \leqslant 0, \\ -\sigma\delta y, & y > 0, \end{cases} \tag{9}$$

где $\sigma, \delta > 0$ — постоянные, причем $2\delta > 2a > \delta(\sigma - 1)$, $1 < \sigma < 3$. Положим $k = -\operatorname{sign} y$, $-Lu = ku_{xx} - u_{yy}$; $G_r = G_{r,1} \bigcup G_{r,2}$, $G_{r,i} = G_r \bigcap G_i$, $i = 1, 2$, где $G_1 = G \bigcap (y > 0)$, $G_2 = G \bigcap (y < 0)$. Границы введенных областей обозначаем буквой Γ с соответствующими индексами. Путем интегрирования по частям после несложных преобразований для значений $i = 1, 2$ получим

$$I_{r,i} = 2\int\limits_{G_{r,i}} (ku_{xx} - u_{yy})(au + bu_x + cu_y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{G_{r,i}} (Z\bar{u}, \bar{u})\,dxdy + 2a\int\limits_{\Gamma_{r,i}} u\,(ku_x n_x - u_y n_y)\,ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{r,i}} \frac{(n_y u_x - n_x u_y)^2 (b^2 - c^2 k) - (bu_x + cu_y)^2 (n_y^2 - n_x^2 k)}{bn_x + cn_y}\,ds = I_{r,i}^{(1)} + I_{r,i}^{(2)} + I_{r,i}^{(3)}. \tag{10}$$

Здесь $\bar{n} = (n_x, n_y)$ — внешняя нормаль к границе $\Gamma_{r,i}$; $\bar{u} = (u_x, u_y)$ — двумерный вектор, а Z — матрица:

$$Z = \begin{vmatrix} (ck)_y - b_x k - 2ak & b_y - c_x k \\ b_y - c_x k & c_y - b_x + 2a \end{vmatrix}.$$

Так как $I_r = I_{r,1} + I_{r,2}$, достаточно оценить снизу выражения $I_r^{(k)} = I_{r,1}^{(k)} + I_{r,2}^{(k)}$, $k = 1, 2, 3$, и полученные неравенства сложить. В силу (9) матрица Z положительно определена как в области G_1, где

$$Z = \begin{vmatrix} \delta(\sigma - 1) + 2a & 0 \\ 0 & -\delta(\sigma - 1) + 2a \end{vmatrix},$$

так и в области G_2, где

$$Z = \begin{vmatrix} 2\delta - 2a & 0 \\ 0 & 2\delta + 2a \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что для любого r $I_r^{(1)} \geqslant C_0 \int\limits_{G_r} (u_x^2 + u_y^2)\,dxdy \geqslant c_1 \| u \|^2_{W_2^1(G_r)}$, где c_0, $c_1 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от u и r. Последнее неравенство справедливо, так как функции u обращаются в нуль на участке границы G_r.

Оценим $I_r^{(2)} = I_{r,1}^{(2)} + I_{r,2}^{(2)}$. На кривой $\Gamma_r \bigcap \Gamma_0 = \Gamma_{0,r}$ интеграл $\int\limits_{\Gamma_{0,r}} u(ku_x n_x - u_y n_y)\,ds = 0$ вместе с u. Интегралы $I_{r,1}^{(2)}$ и $I_{r,2}^{(2)}$, взятые вдоль линии $y = 0$, взаимно уничтожаются, так как здесь $kn_x = 0$, что гасит разрывность коэффициента k в подынтегральной функции. Оценим $I_{r,\Gamma}^{(2)} = 2a \int\limits_{(\gamma_1 \cup \gamma_2) \cap \Gamma_r} \times u\,(ku_x n_x - u_y n_y)\,ds$. Замечаем, что на γ_1 $u_x n_x - u_y n_y = -\frac{\partial u}{\partial s}$, на γ_2 $u_x n_x - u_y n_y = \frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$ — производная вдоль контура интегрирования. Отсюда

$$I_{r,\Gamma}^{(2)} = 2a \int\limits_C^{A_r} \frac{\partial u}{\partial s} u\,ds + \int\limits_C^{B_r} \frac{\partial u}{\partial s} u\,ds = a\,[-2u^2(C) + u^2(A_r) + u^2(B_r)],$$

где A_r, B_r — точки на характеристиках γ_1, γ_2 на расстоянии r от точек A, B

соответственно. Итак, $I_r^{(2)} = I_{r,\Gamma}^{(2)} + I_{S_r^+ \cup S_r}^{(2)}$, где S_r^+, S_r — участки границ кружков K_r^+, K_r внутри области G, $I_{S_r^+ \cup S_r}^{(2)} = 2a \int\limits_{S_r^+ \cup S_r} u\,(ku_x n_x - u_y n_y)\,ds$.

Далее, так как $u \in U$, существуют числа M, N (зависящие вообще от u) такие, что для любого r $|u_x| < \frac{M}{\sqrt{r}}$, $|u_y| < \frac{M}{\sqrt{r}}$, $|u| < N$. Отсюда

$$I_{S_r^+ \cup S_r}^{(2)} \leqslant c_2 MN \int\limits_{S_r^+ \cup S_r} \frac{1}{\sqrt{r}}\,ds = 0\,(\sqrt{r}) \text{ при } r \to 0,\ c_2 > 0.$$

Перейдем к оценке $I_r^{(3)} = I_{r,1}^{(3)} + I_{r,2}^{(3)}$. Так как на Γ_0 $n_y u_x - n_x u_y = 0$, то интеграл $I_{r,1}^{(3)}$, взятый вдоль $\Gamma_{0,r}$, неотрицателен при любом r, если на Γ_0 выполняется условие $bn_x + cn_y \leqslant 0$, т. е. в силу (9):

$$xn_x + \sigma y n_y \geqslant 0. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что (11) имеет место для нормального контура: $y^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Действительно, при $x \leqslant -\frac{1}{2}$ $n_x \leqslant 0$, $n_y \geqslant 0$, так что (11) очевидно. При $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 0$ (11) можно записать в виде $\left|\frac{dy}{dx}\right| : \left|\frac{y}{x}\right| \leqslant \sigma$, но для нормального контура $\left|\frac{dy}{dx}\right| : \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{x + \frac{1}{2}}{x + 1} < 1 < \sigma$.

Интегралы $I_{r,1}^{(3)}$, $I_{r,2}^{(3)}$, взятые вдоль линии $y = 0$, взаимно уничтожаются. Действительно, подынтегральное выражение можно записать в виде $(u_x^2 k + u_y^2)(bn_x - cn_y) + 2u_x u_y (cn_x k - bn_y) = -2bu_x u_y n_y$, так как $n_x = 0$, $c = 0$ при $y = 0$, так что гасится разрывность функции k.

Оценим на $\Gamma_r \cap (\gamma_1 \cup \gamma_2)$ интеграл $I_{r,2}^{(3)} = I_{r,(\gamma_1 \cup \gamma_2)}^{(3)}$. Так как на $\gamma_1 \cup \gamma_2$ $n_y^2 - n_x^2 k = 0$, на γ_2 $\frac{b^2 - c^2}{bn_x + cn_y} = b + c = 0$, то

$$I_{r,(\gamma_1 \cup \gamma_2)}^{(3)} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{(n_y u_x - n_x u_y)^2 (b^2 - c^2)}{bn_x + cn_y}\,ds = \delta \sqrt{2} \int\limits_{\gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds.$$

Итак, $I_r^{(3)} \geqslant I_{r,(\gamma_1 \cup \gamma_2)}^{(3)} + I_{S_r^+ \cup S_r}^{(3)}$, где

$$I_{S_r^+ \cup S_r}^{(3)} = \int\limits_{S_r^+ \cup S_r} [(u_x^2 k + u_y^2)(bn_x - cn_y) + 2u_x u_y (cn_x k - bn_y)]\,ds = I_{S_r^+}^{(3)} + I_{S_r}^{(3)}.$$

В силу ограниченности u, u_x, u_y вблизи точки A очевидна оценка $I_{S_r^+}^{(3)} = O(r)$. Оценим $I_{S_r}^{(3)}$:

$$|I_{S_r}^{(3)}| \leqslant \int\limits_{S_r} |(u_x^2 k + u_y^2)(bn_x - cn_y) + 2u_x u_y (cn_x k - bn_y)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_3 M^2 \int\limits_{S_r} \frac{r}{(\sqrt{r})^2}\,ds = O(r),$$

$c_3 > 0$, так как $|b| \leqslant \delta r$, $|c| \leqslant \delta r$ в силу (9). Мы можем оценить окончательно I_r снизу:

$$I_r \geqslant c_1 \| u \|^2_{W^1_2(G_r)} - 2au^2\,(C) - \delta\sqrt{2} \int\limits_{\gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 ds + I^{(2)}_{S_r^+ \cup S_r} + I^{(3)}_{S_r^+ \cup S_r}, \quad (12)$$

причем величины $I^{(2)}_{S_r^+ \cup S_r}$, $I^{(3)}_{S_r^+ \cup S_r}$ стремятся к нулю вместе с r для каждой фиксированной функции u. Оценим теперь I_r сверху. Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$I_r \leqslant c_4 \left(\frac{1}{\varepsilon} \| Lu \|^2_{L_2(G_r)} + \varepsilon \| u \|^2_{W^1_2(G_r)} \right). \quad (13)$$

Пусть ε достаточно мало, так что $c_1 - c_4\varepsilon = c_5 > 0$. Объединяя (12) и (13), получим неравенство

$$\frac{c_4}{\varepsilon} \| Lu \|^2_{L_2(G_r)} \geqslant c_5 \| u \|^2_{W^1_2(G_r)} - 2au^2\,(C) - \delta\sqrt{2} \int\limits_{\gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 ds +$$

$$+ I^{(2)}_{S_r^+ \cup S_r} + I^{(3)}_{S_r^+ \cup S_r}.$$

В этом неравенстве можно перейти к пределу при $r \to 0$:

$$\frac{c_4}{\varepsilon} \lim_{r \to 0} \| Lu \|^2_{L_2(G_r)} \geqslant c_5 \lim_{r \to 0} \| u \|^2_{W^1_2(G_r)} - 2au^2\,(C) - \delta\sqrt{2} \int\limits_{\gamma_1} \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right)^2 ds. \quad (14)$$

Если учесть, что $u^2(C) = \left(\int\limits_A^C \frac{\partial u}{\partial s}\, ds \right)^2 \leqslant c_6 \left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|^2_{L_2(\gamma_1)}$, из (14) следует неравенство (6).

Лемма 2 доказана.

3. З а д а ч а н а с о б с т в е н н ы е з н а ч е н и я. Исследуем обобщенную разрешимость задачи

$$Lu - \lambda u = f, \ f \in L_2(G), \quad (15)$$

где u удовлетворяет (1), λ — комплексный параметр, следуя схеме [1, § 2]. К скалярному произведению (Lu, v) в $L_2(G)$, $u, v \in W^2_2(G)$, применим формулу Грина отдельно в каждой из подобластей G_1, G_2:

$$(Lu, v) = (u, Lv) + \int\limits_{\Gamma_\bullet} [u(\bar{v}_x n_x - \bar{v}_y n_y) - \bar{v}(u_x n_x + u_y n_y)]\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\gamma_1 \cup \gamma_2} [u(-\bar{v}_x n_x + \bar{v}_y n_y) - \bar{v}(-u_x n_x + u_y n_y)]\, ds.$$

При этом интегралы по участку AB оси ox взаимно сокращаются, так как здесь $n_x = 0$, что гасит разрывность коэффициента $\operatorname{sign} y$. Благодаря этому задача

$$L^+ v = g \in L_2(G), \quad (16)$$

сопряженная к (1), (2), определяется, как и в [1], дифференциальным выражением $L^+ = L$, действующим на функции $v \in W^2_2(G)$, удовлетворяющие сопряженному граничному условию

$$v|_{\Gamma_\bullet \cup \gamma_2} = 0. \quad (17)$$

Так как задача (16), (17) сводится к задаче типа (1), (2) после замены переменных $x' = -x$, эта задача также полусильно разрешима для любой $g \in L_2(G)$. При этом для конструкции сопряженного полусильного оператора T^+ следует в определении оператора T поменять местами γ_1 и γ_2, точки A и B (класс функций U при этом перейдет в класс U^+).

Из теоремы 1 следует, что полусильный оператор T для задачи (1), (2) имеет непрерывный обратный, определенный на всем пространстве $L_2(G)$ (то же справедливо для $(T^+)^{-1}$). Более того, из неравенства (7) следует, что T^{-1} (а вместе с ним и $(T^+)^{-1}$) вполне непрерывен.

Лемма 3. *Оператор T^+ совпадает с сопряженным к T в $L_2(G)$.*

Доказательство. Пусть $u \in D(T)$, $v \in D(T^+)$, u_n, v_n — последовательности, приближающие u, v в смысле полусильного решения, такие, как в доказательстве теоремы 1; G_r (как выше) — область, получающаяся из G после исключения точек A, B вместе с кружками K_r^+, K_r (S_r^+, S_r — участки границ K_r^+, K_r, заключенные внутри G). Справедливо равенство

$$(Lu_n, v_n)_{L_2(G_r)} - (u_n, Lv_n)_{L_2(G_r)} = \int\limits_{(\gamma_1 \cup \gamma_2) \cap \Gamma_r} [u_n(-\bar{v}_{nx}n_x + \bar{v}_{ny}n_y) - \bar{v}_n(-u_{nx}n_x + u_{ny}n_y)]\, ds + \int\limits_{S_r^+ \cup S_r} [u_n(\operatorname{sign} y\bar{v}_{nx}n_x + \bar{v}_{ny}n_y) - \bar{v}_n(\operatorname{sign} y u_{nx}n_x + u_{ny}n_y)]\, ds = J_{1,r} + J_{2,r}. \tag{18}$$

В (18) выражение $J_{2,r} = O(\sqrt{r})$ при $r \to 0$, так как вблизи точки A v_{nx}, v_{ny}, вблизи B u_{nx}, u_{ny} растут не быстрее, чем $\frac{1}{\sqrt{r}}$, функции u_n, v_n ограничены и длины дужек S_r^+, S_r малы—порядка 1. Интегрируя по частям, получим для $J_{1,r}$:

$$J_{1,r} = \int\limits_{A_r}^{C} \left(-u_n \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial s} + \bar{v}_n \frac{\partial u_n}{\partial s}\right) ds + \int\limits_{C}^{B_r} \left(u_n \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial s} - \bar{v}_n \frac{\partial u_n}{\partial s}\right) ds =$$

$$= \int\limits_{A_r}^{C} 2\bar{v}_n \frac{\partial u_n}{\partial s}\, ds + \int\limits_{C}^{B_r} 2u_n \frac{\partial \bar{v}_n}{\partial s}\, ds + (u_n\bar{v}_n)(A_r) - (u_n\bar{v}_n)(B_r).$$

Из второго равенства и оценки $J_{2,r}$ следует, что в (18) можно перейти к пределу по r. Учитывая, что u_n, v_n непрерывны (так что $(u_n\bar{v}_n)(A_r) \to 0$, $(u_n\bar{v}_n)(B_r) \to 0$ при $r \to 0$), получим при любом n:

$$(Lu_n, v_n) - (u_n, Lv_n) = \int\limits_{A}^{C} 2\bar{v}_n \frac{\partial u_n}{\partial s}\, ds + \int\limits_{C}^{B} 2u_n \frac{\partial v_n}{\partial s}\, ds,$$

откуда следует неравенство

$$|(Lu_n, v_n) - (u_n, Lv_n)| \leqslant c\left(\| v_n \|_{L_2(\gamma_1)} \| u_n \|_{W_2^1(\gamma_1)} + \| u_n \|_{L_2(\gamma_2)} \| v_n \|_{W_2^1(\gamma_2)}\right)$$

с некоторой постоянной $c > 0$. Из сходимости u_n, v_n в $W_2^1(G)$ следует, что при достаточно большом n нормы $\| v_n \|_{L_2(\gamma_1)}$, $\| u_n \|_{L_2(\gamma_2)}$ ограничены. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим

$$(Tu, v) = (u, T^+v) \quad (u \in D(T),\ v \in D(T^+)). \tag{19}$$

Полагая $Tu = \alpha$, $T^{+}v = \beta$, из (19) получим $(\alpha, (T^{+})^{-1}\beta) = (T^{-1}\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta \in L_2(G)$. Отсюда $(T^{+})^{-1} = (T^{-1})^{*}$, так что $T^{+} = T^{*}$.

Лемма доказана.

В силу полной непрерывности T^{-1} пара уравнений в $L_2(G)$ $(E - \lambda T^{-1})u' = f'$, $(E - \lambda (T^{-1})^{*}v') = g'$ фредгольмова. Но тогда фредгольмова и пара

$$(T - \lambda E)u = f, \ (T^{*} - \lambda E)v = g. \tag{20}$$

Благодаря лемме 3, фредгольмовость пары (20) можно интерпретировать как нормальную разрешимость для полусильных решений задачи (15).

Теорема 2. *Задача* $Lu - \lambda u = 0$, $u|_{\Gamma_0 \cup \gamma_1} = 0$ *имеет отличные от нуля полусильные решения из пространства* $W_2^1(G)$, *собственные функции не более чем для счетного числа значений параметра* $\lambda = \lambda_k$ $(\kappa = 1, 2, \ldots)$, $|\lambda_k| \to \infty$, *ее собственных чисел. Отвечающее каждому* λ_k *собственное подпространство конечномерно. У сопряженной задачи* $Lv - \lambda v = 0$, $v|_{\Gamma_0 \cup \gamma_2} = 0$, *собственные числа равны* $\bar{\lambda}_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. *Собственные подпространства основной и сопряженной задачи, отвечающие* λ_k и $\bar{\lambda}_k$, *имеют одинаковую размерность. Задача* (15) *полусильно разрешима для тех и только тех* f, *которые ортогональны к собственному подпространству сопряженной задачи, отвечающему* $\bar{\lambda}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Сорокина, О сильной разрешимости задачи Трикоми, УМЖ, т. 18, № 6, 1966.
2. А. В. Бицадзе, К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1953.
3. А. В. Бицадзе, Уравнения смешанного типа, Изд-во АН СССР, М., 1959.

Поступила 8.XII 1967 г.,
после переработки — 19.V 1970 г.

Институт гидромеханики АН УССР