УДК 513.83

Об одном свойстве пространств, совершенно отображающихся на метрические

В. Л. Тимохович

§ 1. В этом параграфе все пространства, если это не оговорено особо, удовлетворяют T_1-аксиоме отделимости.

Назовем концом над X максимальную центрированную систему открытых в X множеств. Очевидно, что любая центрированная система открытых в X множеств содержится в некотором конце над X. Если конец содержит в качестве подсемейства все окрестности некоторой точки $x \in X$, то считаем, что этот конец сходится к x. Конец, который не сходится ни к одной точке пространства X, назовем свободным концом над X. Обозначим пространство всех концов над X символом θX. Следующие элементарные свойства концов очевидны:

А.1) $U,\ V \in \xi \in \theta X \Rightarrow U \cap V \in \xi$;

А.2) $\xi \in \theta X$, U открыто в X, для любого $O \in \xi$ выполняется условие: $O \cap U \neq \varnothing \Rightarrow U \in \xi$;

А.3) $\xi \in \theta X$, U открыто в X, $U \notin \xi \Rightarrow$ найдется $O \in \xi$ такое, что $O \cap U = \varnothing$;

А.4) $U \subset \Gamma$, Γ открыто в X, $U \in \xi \in \theta X \Rightarrow \Gamma \in \xi$;

А.5) $\theta X \ni \xi \ni O_1 \cup O_2$, где O_i — открытое в X множество $\Rightarrow O_1 \in \xi$ или $O_2 \in \xi$;

А.6) множество U открыто и всюду плотно в $X \Rightarrow U \in \xi$ для любого $\xi \in \theta X$.

Введем топологию в θX. Обозначим $O^* = \{\xi \in \theta X \mid \xi \ni O\}$.

Легко доказываются следующие свойства оператора $O \to O^*$:

Б.1) $O_1 \subset O_2 \Rightarrow O_1^* \subset O_2^*$;

Б.2) $O_1^* \cap O_2^* = (O_1 \cap O_2)^*$;

Б.3) $O_1^* \cup O_2^* = (O_1 \cup O_2)^*$;

Б.4) $\theta X \setminus O^* = (X \setminus [O]_X)^*$.

Пусть $\{O^* \mid O$ открыто в $X\}$ — открытая база в X. Такое определение базы корректно ввиду Б. 2). Имеем следующие свойства пространства θX с указанной топологией;

Б.5) $$[\bigcup_{(\alpha)} O_\alpha^*]_{\theta X} = (\bigcup_{(\alpha)} O_\alpha)^*;$$

Б.6) обозначим $\tilde{x} = \{\xi \in \theta X \mid \xi$ содержит все окрестности точки $x\}$, тогда справедливо:

$$\tilde{x} \subset O^* \iff x \in \operatorname{Int}[O]_X;$$

Б.7) пусть $[O]_X = [V]_X$, где O и V — открытые в X множества, тогда $O^* = V^*$;

Б.8) $\xi_1,\ \xi_2 \in \theta X$; $\xi_1 \neq \xi_2 \iff$ найдутся $O_1 \in \xi_1$ и $O_2 \in \xi_2$ такие, что $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

П р е д л о ж е н и е 1. Пространство θX — нульмерный, экстремально несвязный бикомпакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пространство θX хаусдорфово. Это следует из Б. 8) и Б. 2). Экстремальная несвязность следует из Б. 5), нульмерность — из Б. 4). Докажем бикомпактность. Очевидно, что определенная выше база является и замкнутой базой пространства X. Пусть $\{O_\alpha^*\}$ — центрированная система элементов этой замкнутой базы. Так как $O_{\alpha_1}^* \cap \ldots \cap O_{\alpha_n}^* = (O_{\alpha_1} \cap \ldots \cap O_{\alpha_n})^*$, система $\{O_\alpha\}$ — центрированная. Дополним ее до конца ξ. Так как $\xi \ni O_\alpha$ для любого α, имеем: $\xi \in \bigcap\limits_{(\alpha)} O_\alpha^*$. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. Пусть δX — расширение пространства X, ξ — произвольная точка пространства θX. Определим $\tilde{\xi} = \{O \mid O$ открыто в δX, $O \cap X \in \xi\}$. Тогда $\tilde{\xi} \in \theta\delta X$. Если ξ сходится к $x \in X$, то и $\tilde{\xi}$ сходится к x. Наоборот, если $\tilde{\xi} \in \theta\delta X$, а $\xi = \{O \cap X \mid O \in \tilde{\xi}\}$, то $\xi \in \theta X$ и ξ сходится к $x \in X$, как только к x сходится $\tilde{\xi}$.

Доказательство очевидно.

П р е д л о ж е н и е 3. Пусть δX — расширение пространства X. Пространства θX и $\theta\delta X$ гомеоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение $i : \theta X \to \theta\delta X$, где $i(\xi) = \tilde{\xi}$ (см. предложение 2). Это отображение взаимно однозначно. Так как θX — бикомпакт, достаточно доказать непрерывность i.

Пусть $i(\xi) = \tilde{\xi}$ и $\tilde{\xi} \in U^*$. Тогда $\xi \ni U \cap X$. Допустим, что $\xi_1 \in (U \cap X)^*$, тогда $\xi_1 \ni U \cap X$ и $\tilde{\xi}_1 \ni U$, т. е. $\tilde{\xi}_1 \in U^*$. Непрерывность i доказана. Легко видеть, что база пространства θX переходит в базу пространства $\theta\delta X$, определенную оператором $(\ )^*$.

З а м е ч а н и е 1. Почти все предыдущие утверждения содержатся в работе [1]. Отличие состоит в том, что в [1] рассматриваются хаусдорфовы пространства.

§ 2. В дальнейшем пространства будем считать хаусдорфовыми, если это не оговорено особо.

Рассмотрим ωX — волмэновское расширение пространства X.

Положим $\tilde{x} = \{\xi \in \theta X \mid \xi$ сходится к $x\}$.

П р е д л о ж е н и е 4. Для любого $x \in \omega X$ множество $\tilde{x}$ — бикомпакт.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что $\tilde{x}$ замкнуто в $\theta\,\omega X$. Пусть $\xi \in [\tilde{x}]_{\theta\omega X}$. Возьмем произвольное $O \in \xi$. Имеем: $O^* \cap \tilde{x} \neq \varnothing$, следовательно найдется конец ξ_1 такой, что $\xi_1 \ni O$ и ξ_1 сходится к x. Тогда любая окрестность x пересекается с O. Таким образом, любая окрестность точки x пересекается с любым множеством $O \in \xi$, следовательно ξ содержит все окрестности x или, другими словами, $\xi \in \tilde{x}$.

Предложение доказано.

Обозначим $\dot{\omega} X = \bigcup\limits_{x \in \omega X} \tilde{x}$. Назовем $\dot{\omega} X$ абсолютом пространства ωX.

Определим $\pi : \dot{\omega} X \to \omega X$, где $\pi(\xi) = \bigcap\limits_{O \in \xi} [O]_{\omega X}$. Очевидно, что $\pi(\xi)$ — бикомпактное, замкнутое в ωX множество, состоящее из тех и только тех точек ωX, к которым сходится конец ξ.

Легко видеть, что для любой $x \in \omega X$ имеет место равенство: $\pi^{-1}(x) = \tilde{x}$. (Здесь и далее, где идет речь о многозначных отображениях, используется терминология работ [2 и 3].)

П р е д л о ж е н и е 5. Отображение π замкнуто.

Доказательство. Для многозначных отображений, так же как и для однозначных, справедливо утверждение: отображение f пространства X на пространство Y замкнуто тогда и только тогда, когда для любого открытого в X множества U множество $f^{\#}(U) = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subset U\}$ открыто в пространстве Y.

Рассмотрим теперь произвольное множество Γ, открытое в $\dot{\omega}X$. Имеем: $\pi^{\#}(\Gamma) = \{x \in \omega X \mid \widetilde{x} \subset \Gamma\}$.

Допустим, что $\widetilde{x} \subset \Gamma$. Учтя Б. 3) и то, что $\widetilde{x}$ — бикомпакт, получаем: найдется O^* такое, что $\widetilde{x} \subset O^* \subset \Gamma$.

Таким образом, $x \in \pi^{\#}(O^*) \subset \pi^{\#}(\Gamma)$. Но из Б. 6) следует, что $\pi^{\#}(O^*) = \operatorname{Int}[O]_{\omega X}$, и поэтому $\pi^{\#}(\Gamma)$ открыто.

Предложение 6. Отображение π^{-1} замкнуто.

Доказательство. Так как π замкнуто, π^{-1} непрерывно. Имеем далее: для любой точки $x \in \omega X$ множество $\widetilde{x}$ — бикомпакт; пространство ωX бикомпактно. Применяя одну теорему из [3], получаем, что π^{-1} — замкнутое отображение.

Учитывая предыдущие рассуждения, получаем такое предложение.

Предложение 7. Отображение π совершенно.

Далее предполагаем, что для пространства X выполняется следующая аксиома.

Аксиома 1. Для любой точки $\varphi \in \omega X \setminus X$ и любой $x \in X$ найдутся O_1 и O_2 — открытые окрестности этих точек в ωX — такие, что $O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

Нетрудно доказать, что пространство X регулярно тогда и только тогда, оно хаусдорфово и удовлетворяет аксиоме 1.

Обозначим $\dot{X} = \{\xi \in \dot{\omega}X \mid \xi$ сходится к некоторой $x \in X\}$. Легко видеть, что $\dot{X}$ — абсолют пространства X в обычном смысле. Определим $\tau X = X \cup (\theta X \setminus \dot{X})$, $\widetilde{O} = O \cup \{\xi \in \tau X \setminus X \mid \xi \ni O\}$, где O — открытое в X множество. Пространство τX с базой $\{\widetilde{O} \mid O$ открыто в $X\}$ — H-замкнутое расширение X, θ-гомеоморфное катетовскому (в [1] символом τX обозначено катетовское расширение. «Нашему» τX в [1] соответствует σX. В этой же работе подробно рассмотрены свойства этих пространств). Рассмотрим теперь последовательность отображений $\omega X \xleftarrow{\pi} \theta\omega X = \dot{\omega}X \xrightarrow{i} \theta X \xrightarrow{\pi_{\tau X}} \tau X$, где i — гомеоморфизм (см. предложение 3), а $\pi_{\tau X}$ — естественное отображение θX на τX. Как известно [1], отображение $\pi_{\tau X}$ однозначно, θ — непрерывно, совершенно и неприводимо.

Сужение $\pi_{\tau X} \mid (\theta X \setminus \dot{X})$ — гомеоморфизм и $\pi_{\tau X}(\theta X \setminus \dot{X}) = \tau X \setminus X$.

Обозначим теперь $\widetilde{\pi} = \pi_{\tau X} \circ i \circ \pi^{-1}$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие легко доказываемые утверждения:

В.1) $x, y \in X$; $x \neq y \Rightarrow \widetilde{x} \cap \widetilde{y} = \varnothing$;

В.2) $x \in X$, $\varphi \in \omega X \setminus X \Rightarrow \widetilde{x} \cap \widetilde{\varphi} = \varnothing$;

В.3) $x \in X$, $\xi \in \widetilde{x} \Rightarrow \pi(\xi) = x$.

Предложение 8. Отображение $\widetilde{\pi}$ обладает следующими свойствами:

1) $\widetilde{\pi}$ замкнуто;

2) $\widetilde{\pi} \mid X = id$ (тождественное);

3) $\widetilde{\pi}(\omega X \setminus X) = \tau X \setminus X$;

4) для любой точки x $(\in \omega X \setminus X)$ множество $\widetilde{\pi}(x)$ — бикомпакт;

5) для любой точки $x \in \omega X$ и для любой окрестности $O\widetilde{\pi}(x)$ множества $\widetilde{\pi}(x)$ в τX найдется O_x — окрестность x в ωX — такая, что $\widetilde{\pi}(O_x) \subset \subset [O\widetilde{\pi}(x)]_{\tau X}$.

Доказательство. Свойство 1) очевидно. Свойство 2) вытекает из предложений 2 и 3.

Пусть теперь $x \in \omega X \setminus X$. Из В. 3) следует, что $\pi^{-1}(X) \cap \pi^{-1}(X) = \varnothing$, но тогда $\widetilde{\pi}(x) \cap \widetilde{\pi}(X) = \varnothing$, следовательно $\widetilde{\pi}(x) \subset \tau X \setminus X$. Свойство 3) доказано. Докажем свойство 4. Допустим, что $x \in \omega X \setminus X$. Имеем: $\pi^{-1}(x)$ — бикомпакт, $i \circ \widetilde{\pi}^{-1}(x)$ — тоже бикомпакт, $\widetilde{\pi}(x) = \pi_{\tau X} \circ i \circ \pi^{-1}(x)$ — бикомпактное множество, так как $\pi_{\tau X}\ \tau X \setminus X$ гомеоморфно $\theta X \setminus \dot{X}$. Последнее свойство очевидным образом вытекает из предыдущих рассмотрений.

Предложение доказано.

§ 3. Предложение 9. Любое T_1-пространство, совершенно и непрерывно отображающееся на метрическое, удовлетворяет аксиоме 1.

Доказательство. В [4] доказано, что регулярное пространство тогда и только тогда непрерывно и совершенно отображается на метрическое, когда существует $\{\lambda_n\}$ — оперение X в ωX — такое, что для любого n и для любой точки $x \in X$ выполняется условие $[\lambda_{n+1}x]_{\omega X} \subset \subset U \in \lambda_n$ (как и в [4] это свойство оперения обозначим символом (d)). Мы воспользуемся обобщением этой теоремы на случай T_1-пространства (см. § 4).

Пусть $\varphi \in \omega X \setminus X$, $x \in X$. Ввиду свойства (d) $\bigcap\limits_{(n)} \lambda_n x = \bigcap\limits_{(n)} [\lambda_n x]_{\omega X} \subset X$.

Положим O — открытое в ωX множество такое, что $O \supset \bigcap\limits_{(n)} \lambda_n x$, $O \not\ni \varphi$.

Выберем n, при котором $[\lambda_n x]_{\omega X} \subset O$. Примем $\lambda_n x$ за искомую окрестность.

Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть пространство X непрерывно и совершенно отображается на метрическое. Тогда существует $\{\lambda_n\}$ — оперение X в τX, удовлетворяющее условию (d).*

Доказательство. Пусть $\{\mu_n\}$ — оперение X в ωX, удовлетворяющее условию (d). Определим $\lambda_n = \{\widetilde{\pi}^{\#}(O) \mid O \in \mu_n\}$. Семейство λ_n — покрытие X открытыми в τX множествами. Действительно, для любого $O \in \mu_n$ имеем $\widetilde{\pi}^{\#}(O) \cap X = O \cap X$. Допустим, что $x \in X$, тогда $\lambda_{n+1}x \subset \widetilde{\pi}^{\#}(\mu_{n+1}x) \subset \subset \widetilde{\pi}^{\#}(O_\alpha^n)$, где $O_\alpha^n \in \mu_n$ и $\mu_{n+1}x \subset O_\alpha^n$. Имеем далее $[\lambda_n x]_{\tau X} \subset \widetilde{\pi}([\mu_n x]_{\omega X})$, $\bigcap\limits_{(n)} [\lambda_n x]_{\tau X} \subset \subset \bigcap\limits_{(n)} \widetilde{\pi}([\mu_n x]_{\omega X})$. Докажем, что $\bigcap\limits_{(n)} \widetilde{\pi}([\mu_n x]_{\omega X}) \subset X$. Предположим противное, т. е. $\bigcap\limits_{(n)} \widetilde{\pi}([\mu_n x]_{\omega X}) \cap (\tau X \setminus X) \ni \xi$, тогда для любого n множества $[\mu_n x]_{\omega X}$ и $\widetilde{\pi}^{-1}(\xi)$ пересекаются. Так как $\pi^{-1}(\xi)$ — замкнутое в ωX, бикомпактное множество, содержащееся в $\omega X \setminus X$, а система $\{[\mu_n x]_{\omega X} \cap \widetilde{\pi}^{-1}(\xi)\}$ — центрированная, множество $\bigcap\limits_{(n)} [\mu_n x]_{\omega X} = \bigcap\limits_{(n)} \mu_n x$ не содержится целиком в X. Отсюда следует, что наше предположение неверно, т. е. $\bigcap\limits_{(n)} \widetilde{\pi}([\mu_n x]_{\omega X}) \subset X$. Итак, $\{\lambda_n\}$ — оперение X в τX, более того, для любой точки $x \in X$ выполняется условие $\bigcap\limits_{(n)} [\lambda_n x]_{\tau X} \subset X$.

Покажем, что из семейства $\{\lambda_n\}$ можно выбрать оперение, удовлетворяющее условию (d). Пусть $x \in X$, тогда $\widetilde{\pi}^{-1}(x) = x$. Если же $x \in \omega X \setminus X$ и $\widetilde{\pi}(x) = B \subset \tau X \setminus X$, то $\widetilde{\pi}^{-1}(B) = \bigcap\limits_{O \in \Delta} [O]_{\omega X}$, где Δ — система всех окрестностей точки x в ωX. Возьмем произвольно $x \in X$. Имеем

$$[\mu_{n+2} x]_{\omega X} \subset U_\alpha^{n+1} \subset [\mu_{n+1} x]_{\omega X} \subset U_\beta^n, \text{ где } U_\alpha^{n+1} \in \mu_{n+1}, \ U_\beta^n \in \mu_n.$$

Пусть y — произвольная точка множества $[\mu_{n+2} x]_{\omega X}$. Тогда $\tilde{\pi}^{-1}\tilde{\pi}x \subset \subset U_\beta^n$. Таким образом, $[\lambda_{n+2} x]_{\tau X} \subset \tilde{\pi}([\mu_{n+2} x]_{\omega X}) \subset \tilde{\pi}^{\#}(U_\beta^n)$. Из системы $\{\lambda_n\}$ выбросим все λ_n с четными номерами. Полученная последовательность является искомым оперением.

Теорема 2. *Регулярное пространство, имеющее в расширении τX оперение со свойством (d), непрерывно и совершенно отображается на метрическое.*

Доказательство. Возьмем произвольное открытое в τX множество U. Переберем все точки $x \in \omega X$ такие, что $\tilde{\pi}(x) \subset U$. Для каждой такой точки найдем O_x — максимальную по включению окрестность x в ωX, удовлетворяющую условию $\tilde{\pi}(O_x) \subset [U]_{\tau X}$. Пусть V — объединение этих окрестностей. Такое множество V обозначим $\tilde{\pi}^D(U)$. Имеем $U \cap X \subset \subset V \cap X \subset [U \cap X]_X$. Допустим, что $\varphi \in [V]_{\omega X}$, тогда для любой O_φ — окрестности φ в ωX — пересечение $O_\varphi \cap V$ не пусто, а следовательно, и $(O_\varphi \cap \cap X) \cap (V \cap X) \neq \varnothing$. Но это означает, что для любого $F \in \varphi$ и любой OF — окрестности F в X — $OF \cap (V \cap X) \neq \varnothing$. Но тогда $[V \cap X]_X$ пересекается с любым $F \in \varphi$ или, другими словами, $[V \cap X]_X \in \varphi$.

Положим $[V \cap X]_X \subset \Gamma \subset X$, Γ открыто в X. Для любой $\xi \in i \circ \pi^{-1}(\varphi)$ выполняется условие $\xi \in \Gamma^* \subset \theta X$. Если $\xi \in \Gamma^*$, то $\pi_{\tau X}(\xi) \in [\Gamma]_{\tau X}$, следовательно $\tilde{\pi}(\varphi) = \pi_{\tau X} \circ i \circ \pi^{-1}(\varphi) \subset [\Gamma]_{\tau X}$. Пусть U' — открытое в τX множество такое, что $[U]_{\tau X} \subset U'$, тогда из предыдущих рассуждений следует $\pi(\varphi) \subset [U']_{\tau X}$. Возьмем теперь $\{\lambda_n\}$ — оперение X в τX с указанным в условии свойством. Для каждого $U \in \lambda_n$ построим V способом, указанным выше. Полученное семейство открытых в ωX множеств обозначим через μ_n.

Так как $U \cap X \subset V \cap X \subset [U \cap X]_X$, любое μ_n — покрытие X. Очевидно также, что $\{\mu_n\}$ — оперение X в ωX. Некоторое затруднение вызывает тот факт, что $U \cap X$ в общем не совпадает с $\tilde{\pi}^D(U) \cap X$. Но тем не менее всегда $[U \cap X]_X = [\tilde{\pi}^D(U) \cap X]_X$. Далее воспользуемся следующими легко доказуемыми фактами: 1) $\bigcup\limits_{(\alpha)} \tilde{\pi}^D(U_\alpha) \subset \tilde{\pi}^D(\bigcup\limits_{(\alpha)} U_\alpha)$; 2) если $\{\eta_n\}$ — семейство покрытий пространства X открытыми в δX множествами, где δX — расширение X, и выполняется условие: для любой точки $x \in X$ и для любого n $\eta_{n+1} x \subset U \in \eta_n$, то для семейства $\{\bar{\eta}_n\}$, где $\bar{\eta}_n = \{U \cup [U \cup X]_X \mid U \in \eta_n\}$, имеем: для любой точки x и любого n $\bar{\eta}_{n+1} x \subset \eta_n x$.

Имеем следующее соотношение: для произвольной точки $x \in X$ и произвольного n $\mu_{n+2} x \subset \tilde{\pi}^D(U\{U \in \lambda_{n+2} \mid \tilde{\pi}^D(U) \ni x\}) \subset \tilde{\pi}^D(\lambda_{n+1} x) \subset \tilde{\pi}^D(U_\alpha^n)$, где $U_\alpha^n \in \lambda_n$. Таким образом, для точек пространства X справедливо: для любого n $\mu_{n+1} x \subset U \in \mu_n$. Соотношение $[\mu_{n+3} x]_{\omega X} \subset [\tilde{\pi}_D(\lambda_{n+2} x)]_{\omega X} \subset \tilde{\pi}^D(U_\alpha^n)$, где $U_\alpha^n \in \lambda_n$, окончательно доказывает теорему.

Следствие 1. *В классе регулярных пространств прообразы метрических при совершенных непрерывных отображениях совпадают с пространствами, имеющими в расширении τX оперение со свойством (d).*

§ 4. Утверждение 1. В классе T_1-пространств прообразы метрических при совершенных непрерывных отображениях совпадают с пространствами, имеющими в волмэновском расширении оперение со свойством (d).

Как указано выше, это утверждение доказано А. В. Архангельским [4] для случая регулярных пространств. Нам потребуется следующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что T_1-пространство удовлетворяет условию (a), если найдется $\{\eta_n\}$ — последовательность покрытий пространства X со свойствами: 1) для любого n η_{n+1} звездно вписано в η_n;

2) для произвольной точки $x \in X$ найдется Φ — бикомпактное, замкнутое в X множество, содержащее точку x, такое, что семейство $\{\eta_n\Phi\}$ образует базу Φ в X.

Докажем следующие леммы.

Лемма 1. *Если пространство X обладает в ωX оперением, удовлетворяющим условию* (d), *то X непрерывно и совершенно отображается на метрическое.*

Лемма 2. *Пространство, совершенно и непрерывно отображающееся на метрическое, всегда удовлетворяет условию* (a).

Лемма 3. *Любое пространство, удовлетворяющее условию* (a), *удовлетворяет и условию* (d).

Доказательство леммы 1 содержится в [4]. Лемма 2 доказывается без затруднений. В особом доказательстве нуждается лишь лемма 3.

Пусть T_1-пространство X удовлетворяет условию (a), $\{\eta_n\}$ — семейство покрытий X со свойствами, указанными в определении 1. Очевидно, что, не нарушая общности, можно предположить: $[\eta_{n+1}x]_X \subset U \in \eta_n$ для любых n и $x \in X$. Положим $\widetilde{\eta}_n = \{\widetilde{O} \mid \widetilde{O}$ — максимальное открытое в ωX множество такое, что $\widetilde{O} \cap X = O \in \eta_n\}$.

Имеем для любых $x \in X$ и n: $\widetilde{\eta}_n x \subset \widetilde{\eta_n x}$; $\widetilde{\eta}_{n+1}x \subset \widetilde{O} \in \widetilde{\eta}_n$; $\widetilde{\eta}_n x \cap X = \eta_n x$. Допустим теперь, что $\varphi \in [\widetilde{\eta}_{n+1}x]_{\omega X}$, где n произвольно, а $x \in X$. Тогда $\varphi \ni [\eta_{n+1}x]_X$ (здесь точка φ отождествляется с ультрафильтром, которым она представлена). Так как $[\eta_{n+1}x]_X \subset U \in \eta_n$, то $\varphi \in \widetilde{U} \in \widetilde{\eta}_n$, и, следовательно, $[\widetilde{\eta}_{n+1}x]_{\omega X} \subset \widetilde{U} \in \widetilde{\eta}_n$.

Осталось доказать, что $\bigcap\limits_{(n)} \widetilde{\eta}_n x \subset X$ для любой точки $x \in X$. Допустим противное, т. е. $\bigcap\limits_{(n)} [\widetilde{\eta}_n x]_{\omega X} \cap (\omega X \setminus X) \ni \varphi$ для некоторой $x \in X$. Возьмем замкнутое в X, бикомпактное множество Φ, содержащее точку x, такое, что семейство $\{\eta_n\Phi\}$ образует базу Φ в X. Из того, что $\varphi \ni [\eta_n x]_X$ следует $\varphi \ni [\eta_n\Phi]_X$ для любого n. Но тогда $\varphi \ni \Phi$, так как в силу бикомпактности Φ для любой $O\Phi$ — окрестности Φ в X — найдется n такое, что $O\Phi \supset [\eta_n\Phi]_X$. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F \cap \Phi \mid F \in \varphi\}$ в бикомпактном пространстве Φ. Имеем: $\bigcap\limits_{F\in\varphi} F \supset \bigcap\limits_{F\in\varphi} (F \cap \Phi) \neq \varnothing$. С другой стороны, $\varphi \in \omega X \setminus X$. Противоречие окончательно доказывает лемму. В силу лемм [1 — 3] утверждение 1 очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Илиадис, С. В. Фомин, Метод центрированных систем в теории топологических пространств, УМН, т. XXI, вып. 4 (130), 1966.
2. В. И. Пономарев, О свойствах топологических пространств, сохраняющихся при многозначных, непрерывных отображениях, Матем. сб., нов. серия, т. 51, вып. 4, 1960.
3. В. И. Пономарев, Новое пространство замкнутых множеств и многозначные непрерывные отображения бикомпактов, Матем. сб., нов. серия, т. 48(90) : 2, 1959.
4. А. В. Архангельский, Об одном классе пространств, содержащем все метрические и все локально бикомпактные пространства, Матем. сб., т. 67 (109):1,1965.

Поступила 19.V 1970 г.

Московский государственный университет