УДК 517.947.5.37

Об операторах преобразования для дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами

А. А. Андрощук

Известно [1], что при исследовании обратной задачи для дифференциального уравнения

$$y'' + q(x)y + \lambda y = 0 \ (0 \leqslant x < \infty), \ y'(0) - Qy(0) = 0,$$

где $q(x)$ и Q — ограниченные операторы в сепарабельном гильбертовом пространстве H, существенно использовались представления решения $\omega(x, \lambda)$ с начальными условиями $\omega(0, \lambda) = I$ (единичный оператор), $\omega'(0,\lambda) = Q$ при помощи операторов преобразования:

$$\omega(x, \lambda) = I \cos\sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos\sqrt{\lambda} t\, dt,$$

$$I \cos\sqrt{\lambda} x = \omega(x, \lambda) - \int_0^x H(x, t)\, \omega(t, \lambda)\, dt.$$

Ядра $K(x, t)$, $H(x, t)$ — оператор-функции от x, t, обращающиеся при $t > x$ в нуль.

В данной работе доказывается существование операторов преобразования для случая, когда $q(x)$ является неограниченным оператором вида $q(x) = A - c(x)$, где A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H, а $c(x)$ — ограниченный самосопряженный оператор. Этот случай охватывает, например, задачи на собственные значения для некоторого класса гиперболических уравнений.

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(.\,,.)$ и нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u'' + Au - c(x)u + \lambda u = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = h, \ u'(0) = 0, \tag{2}$$

где $c(x)$ — сильно непрерывная оператор-функция, значениями которой являются ограниченные операторы в H; λ — комплексное число; A — самосопряженный полуограниченный снизу оператор в H. Без ограничения общности можно считать, что $A > 0$ и оператор A^{-1} ограничен. Предположим также, что функция $A^{\frac{1}{2}} c(x) A^{-\frac{1}{2}}$ сильно непрерывна по x.

Вектор-функция $u(x)$ со значениями в H называется сильным решением уравнения (1), если $u(x)$ при каждом x принадлежит $D(A)$ ($D(A)$ — область определения оператора A), два раза сильно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1).

Теорема 1. *Пусть* $c(x)$ *и* $A^{\frac{1}{2}}c(x)A^{-\frac{1}{2}}$ — *сильно непрерывные оператор-функции, причем* $c(x)$ *при каждом* x *является ограниченным оператором в* H, $h \in D(A)$. *Тогда для уравнения* (1) *существует оператор преобразования*:

$$u(x, \lambda) = h\cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, t)\,Ah\cos\sqrt{\lambda}t\,dt, \qquad (3)$$

где ядро $K(x, t)$ *по* x, t *является сильно непрерывной оператор-функцией, непрерывно действующей при каждом* x, t, *в* H. *Предполагается, что при* $t > x$ *ядро* $K(x, t)$ *обращается в нуль.*

Методом последовательных приближений нетрудно показать, что интегральное уравнение

$$\omega(x, \lambda) = \cos\sqrt{A+\lambda I}\,x + \int_0^x \frac{\sin\sqrt{A+\lambda I}\,(x-t)}{\sqrt{A+\lambda I}}\,c(t)\,\omega(t, \lambda)\,dt$$

имеет решение в классе сильно непрерывных операторных функций, и так как

$$\frac{\sin\sqrt{A+\lambda I}\,(x-t)}{\sqrt{A+\lambda I}} = \frac{1}{2}\int_{-x+t}^{x-t} e^{i\sqrt{A}s} J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(x-t)^2-s^2}\right)ds \qquad (4)$$

(J_0 — функция Бесселя),

то

$$\omega(x, \lambda) = \cos\sqrt{A+\lambda I}\,x + \int_0^x\int_0^{x-t} R(x, t, \tau)\cos\sqrt{\lambda}\tau\cos\sqrt{A+\lambda I}\,t\,d\tau\,dt. \qquad (5)$$

Ядро $R(x, t, \tau)$ по x, t, τ является сильно непрерывной оператор-функцией и при каждом x, t, τ непрерывно действует в H.

Если $h \in D(A)$, то $\omega(x, \lambda)h$ — сильное решение уравнения (1) с начальными условиями (2).

Вектор-функция $\cos\sqrt{A+\lambda I}\,x\,h$ является решением уравнения (1) при $c(x)=0$. Подставим в это уравнение при $c(x)=0$ выражение $\cos\sqrt{A+\lambda I}\,x\,h = h\cos\sqrt{\lambda}x + g(x)$, тогда $g(x)$ удовлетворяет уравнению $g''(x) + Ag(x) + \lambda g(x) = Ah\cos\sqrt{\lambda}x$ с начальными условиями $g(0) = g'(0) = 0$. Из [2, стр. 301] вытекает, что

$$g(x) = \int_0^x \frac{\sin\sqrt{A+\lambda I}\,(x-t)}{\sqrt{A+\lambda I}}\,Ah\cos\sqrt{\lambda}t\,dt.$$

Благодаря (4) и тому, что $J_0\left(\sqrt{\lambda}\sqrt{(x-t)^2-s^2}\right) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{(x-t^2-s^2)}} \frac{\cos\sqrt{\lambda}\tau\,d\tau}{\sqrt{(x-t)^2-s^2-\tau^2}}$, можно теперь $\cos\sqrt{A+\lambda I}\,x\,h$ выразить через $h\cos\sqrt{\lambda}\,x$. Подставим все это в (5) вместо $\cos\sqrt{A+\lambda I}\,xh$, после некоторых преобразований получим (3).

2. На множестве $E(\Delta)H$, где $E(\Delta)$ — разложение единицы оператора A, Δ — произвольный конечный интервал полуоси, введем скалярное произведение $(f, g)_+ = (A^2e^{2\sqrt{A}x_0}A^2f,\ A^2e^{2\sqrt{A}x_0}A^2g)$ ($x_0 > 0$ — некоторая фиксированная точка) и произведем пополнение. На этих элементах коммутируют операторы A^2 и $e^{\sqrt{A}t}$ ($|t| \leqslant x_0$). Полученное пространство обозначим H_+, его можно считать пространством с позитивной нормой по отношению к $H_0 =$

$= H$. Обозначим через H_- пространство с негативной нормой, построенное по H_0 и H_+.

Вектор-функция $g(x, y) = \cos\sqrt{\lambda}x\omega(y, \lambda)h - \dfrac{\omega(x-y, \lambda)h + \omega(x+y, \lambda)h}{2}$ является сильным решением уравнения

$$g_{xx} - g_{yy} - Ag + c(y)g = Af(x, y) \tag{6}$$

с нулевыми начальными условиями $g(0, y) = g_x(0, y) = 0$, где $f(x, y) = (I - A^{-1}c(y)) \dfrac{\omega(x-y, \lambda)h + \omega(x+y, \lambda)h}{2}$, причем по определению положено $c(-y) = c(y)$.

Если $h \in D(A)$, $A^{\frac{1}{2}}c(y)A^{-\frac{1}{2}}$ сильно непрерывна по y, $c(y)$ дважды сильно дифференцируема, то $f(x, y)$ имеет две сильные производные по y при каждом x.

Вектор-функция

$$g_0(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q<(0,y,x)} \frac{(e^{\sqrt{A}\tau})^+ Af(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - \tau^2}}\, dQ,$$

где через $(e^{\sqrt{A}\tau})^+$ обозначен сопряженный оператор к оператору $e^{\sqrt{A}\tau}$ и действующий из пространства H_0 в H_-, а $(\tau, \eta, \xi) = Q < (0, y, x)$ — внутренность конуса $(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - \tau^2 = 0$ с вершиной $(0, y, x) < (t_0, y_0, x_0)$, $0 < \xi < x < x_0$ ($P_0 = (t_0, y_0, x_0)$ — фиксированная точка), является слабым решением уравнения (6) при $c(y) = 0$, т. е. выполняется равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(g_0(x, y), \varphi) - \frac{\partial^2}{\partial y^2}(g_0(x, y), \varphi) - (g_0(x, y), A\varphi) = (f(x, y), A\varphi)$$

при любом $\varphi \in H_+$.

Если $c(y) \neq 0$, то решение уравнения (6) $g(x, y)$ является решением и интегрального уравнения

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q<(0,y,x)} \frac{(e^{\sqrt{A}\tau})^+ Af(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - \tau^2}}\, dQ -$$

$$- \frac{1}{2\pi}\int\limits_{Q<(0,y,x)} \frac{(e^{\sqrt{A}\tau})^+ c(\eta)g(\xi, \eta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 - (y-\eta)^2 - \tau^2}}\, dQ. \tag{7}$$

Пусть оператор-функция $e^{\sqrt{A}t}c(y)e^{-\sqrt{A}t}$ сильно непрерывна по t и y ($(t, y, x) < (t_0, y_0, x_0)$). Тогда итерационный ряд интегрального уравнения (7) слабо сходится к $g(x, y)$ над пространством H_+ и

$$g(x, y) = \int\limits_0^x \int\limits_{\xi+y-x}^{-\xi+y-x} \widetilde{H}(x, y; \xi, \eta)\, Af(\xi, \eta)\, d\eta\, d\xi, \tag{8}$$

где оператор-функция $\widetilde{H}(x, y; \xi, \eta)$ при каждом x, y, ξ, η действует из пространства H_0 в H_-. Использовав вид $f(x, y)$ и произведя преобразования, связанные с заменой переменных, получим

$$\cos\sqrt{\lambda}\, x\omega(y,\lambda)h = \frac{\omega(x-y,\lambda)h + \omega(x+y,\lambda)h}{2} + \\ + \int_0^x \widetilde{H}_1(x,y,t)A\omega(t,\lambda)\, h dt. \tag{9}$$

Положив в (9) $y=0$, окончательно получим

$$h\cos\sqrt{\lambda}x = u(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)\, Au(t,\lambda)\, dt, \tag{10}$$

где ядро $H(x,t)=\widetilde{H}_1(x,0,t)$ слабо непрерывно по x, t и при каждом x, t действует из пространства H_0 в H_-.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $c(y)$, $A^{\frac{1}{2}}c(y)A^{-\frac{1}{2}}$ *и* $e^{\sqrt{A}t}c(y)e^{-\sqrt{A}t}$ — *сильно непрерывные оператор-функции* $((t, y, x) < (t_0, y_0, x_0))$, *причем* $c(y)$ *два раза сильно дифференцируема,* $h \in D(A)$. *Тогда для уравнения* (1) *существует оператор обратного преобразования* (10), *где ядро* $H(x, t)$ *по* x, t *является слабо непрерывной оператор-функцией, действующей из пространства* H_0 *в* H_-. *Предполагается, что при* $t > x$ *ядро* $H(x, t)$ *обращается в нуль.*

Замечание. Вектор-функция $\cos\sqrt{\lambda}x\,\omega(y,\lambda)h$ является сильным решением уравнения

$$g_{xx} - g_{yy} - Ag + c(y)g = 0$$

с начальными условиями $g(x,0) = h\cos\sqrt{\lambda}x$, $g_y(x,0)=0$. Можно показать, что решение этого уравнения $\cos\sqrt{\lambda}x\omega(y,\lambda)h$ представимо в виде

$$\cos\sqrt{\lambda}x\omega(y,\lambda)h = h\frac{\cos\sqrt{\lambda}(y-x)+\cos\sqrt{\lambda}(y+x)}{2} + \\ + \int_0^y \widetilde{K}(x,y,t)\, Ah\cos\sqrt{\lambda}t dt,$$

и положив здесь $x=0$, получим (3).

В заключение автор выражает глубокую благодарность Ю. М. Березанскому за руководство работой, а также М. Л. Горбачуку за частые обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. С. Роде-Бекетов, Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях, Матем. сб., 51 (93), 3, 1960.
2. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
3. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Разложение по собственным функциям дифференциального уравнения второго порядка с операторными коэффициентами, ДАН СССР, т. 184, № 4, 1969.
4. В. А. Марченко, Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I, Труды Моск. матем. об-ва, т. 1, 1952.
5. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1967.
6. Ю. М. Березанский, Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», К., 1965.

Поступила 6.III 1970 г.
Институт математики АН УССР