УДК 517.917

Некоторые теоремы о поведении решений в целом одной нелинейной системы

М. А. Балитинов

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений с двумя нелинейностями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3), \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$, $\varphi_2(x_2)$ и $\varphi_3(x_3)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решений системы (1). Вопросы устойчивости в целом нулевого решения для нелинейных систем трех уравнений изучались многими авторами [1—4].

При $a_{21} \cdot a_{31} \neq 0$ система (1) линейным преобразованием приводится к виду:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax - \varphi(y) - f(z), \\ \dot{y} &= x - by, \\ \dot{z} &= x - cz. \end{aligned} \tag{2}$$

Случай $a_{21} \cdot a_{31} = 0$ частично рассмотрен в [5, 6]. Пусть система (2) удовлетворяет обобщенным условиям Рауса — Гурвица

$$\begin{gathered} a + b + c > 0,\ c\frac{\varphi(y)}{y} + b\frac{f(z)}{z} + abc > 0, \\ (a + b)\frac{\varphi(y)}{y} + (a + c)\frac{f(z)}{z} + (a + c)(a + b)(b + c) > 0, \end{gathered} \tag{3}$$

при $yz \neq 0$.

В данной статье, пользуясь вторым методом Ляпунова и опираясь на известную теорему Барбашина — Красовского [7], нами будут установлены некоторые теоремы о поведении решений в целом системы (2) в следующих случаях:

1) $c > 0,\ b > 0,\ a + b < 0,\ a + c > 0$;

2) $c > 0,\ b > 0,\ a + b > 0,\ a + c < 0$.

1. Пусть $c > 0,\ b > 0,\ a + b < 0,\ a + c > 0$. Введем обозначения:

$$m = \inf\frac{f(z)}{z},\ k^2 = \frac{b - c}{a + b}m - c^2,\ f_1(z) = f(z) - mz,$$

$$\varphi_1(y) = -\varphi(y) - \frac{a + c}{b - c}(k^2 + b^2)y,\ u = (a + b)x - \frac{a + b}{b - c}(k^2 + b^2)y + mz,$$

$$v = cx + \frac{a + c}{b - c}(k^2 + bc)y - mz,\ \omega = x + (a + c)y,\ N = a + b + c.$$

Всюду в дальнейшем предполагается, что система (2) удовлетворяет условиям (3). Следовательно, имеют место неравенства:

$$N > 0, \ \frac{f_1(z)}{z} \geqslant 0, \ 0 \leqslant \frac{\varphi_1(y)}{y} \leqslant \frac{Nk^2}{c}.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3), *а также*

$$\frac{\varphi_1(y)}{y} < \frac{-4b(a+c)(a+b)Nk^2(k^2+c^2)(k^2+b^2)}{[b(a+c)(k^2+c^2)-c(a+b)(k^2+b^2)]^2}.$$

Тогда нулевое решение системы (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3), *а также*

1) $\dfrac{\varphi_1(y)}{y} \leqslant \dfrac{-4b(a+c)(a+b)Nk^2(k^2+c^2)(k^2+b^2)}{[b(a+c)(k^2+c^2)-c(a+b)(k^2+b^2)]^2}, \quad |y| > M;$

2) $k^2 > 0, \ zf_1(z) \underset{|z|\to\infty}{\to} \infty.$

Тогда система (2) *предельно ограничена.*

Теорема 3. *Пусть*: 1) *выполнены условия* (3);

2) $b(a+c)(k^2+c^2)+c(a+b)(k^2+b^2) \leqslant 0;$

3) $k^2 > 0$ (*если* $k^2 = 0$, *то* $\int\limits_0^\infty f_1(u)\,du = \infty$);

4) $\varphi_1(y)$ — *неубывающая функция.*

Тогда нулевое решение системы (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 4. *Если* $b(a+c)(k^2+c^2)+c(a+b)(k^2+b^2) \geqslant 0$ *и* $f_1(z)$ — *неубывающая функция, то для устойчивости в целом нулевого решения системы* (2) *достаточно выполнения условий* (3).

Доказательство теорем 1 и 2. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}Au^2 + \frac{1}{2}Bv^2 + \frac{1}{2}k^2B\omega^2 + [(a+b)^2A + (k^2 +$$

$$+ c^2)B]\int\limits_0^z f_1(u)\,du - (k^2+cN)B\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du,$$

где $A = b(a+c)(k^2+c^2)$, $B = (a+b)^2(k^2+b^2)$.

Производная $\dot{V}$ в силу системы (2) имеет вид

$$\dot{V} = -\{tN(a+c)(k^2+c^2)u^2 - (a+b)[b(a+c)(k^2+c^2) - c(a+b)(k^2 +$$

$$+ b^2)]u\varphi_1(y) - (a+b)^3k^2(k^2+b^2)y\varphi_1(y) + (a+b)^2(a+c)k^2(k^2+c^2)zf_1(z)\},$$

V — определенно положительная и бесконечно большая функция.

В самом деле, в силу условий теоремы $k^2 > 0$, но тогда справедливо

$$2V \geqslant Au^2 + Bv^2 + k^2B\omega^2 + \frac{(a+b)Nk^2AB^2}{[(a+b)A-cB]^2}(k^2+cN)y^2 = Au^2 + Bv^2 +$$

$$+ k^2B\omega^2 + \frac{(a+b)Nk^2AB^2}{[(a+b)A-cB]^2}\frac{k^2+cN}{(k^2+N^2)^2}(u+v-N\omega)^2 = W,$$

W — положительно определенная квадратичная форма; $V \leqslant 0$ и $\{\dot{V}=0\}$ не содержит целых траекторий системы (2), отличных от состояния равновесия.

Рассмотрим два случая:

а) $\varphi_1(y) = 0$ при $y \neq 0$. В этом случае, в силу предположений теоремы, имеем $zf_1(z) > 0$ при $z \neq 0$. Поэтому $\{\dot{V} = 0\} \subset \{u = 0,\ z = 0\}$. Следовательно, если некоторая траектория системы (2) при всех t принадлежит множеству $\{\dot{V} = 0\}$, то вдоль этой траектории $u(t) \equiv 0$, $z(t) = 0$. Далее, из третьего уравнения системы (2) следует, что вдоль нее и $x(t) \equiv 0$;

б) $y\varphi_1(y) > 0$ при $y \neq 0$. В этом случае $\{\dot{V} = 0\} \subset \{u = 0,\ y = 0\}$. Отсюда, как и в случае а), легко получить требуемое утверждение. Функции V и $\dot{V}$ удовлетворяют условиям теоремы Барбашина — Красовского.

При выполнении условий теоремы 2 можно построить замкнутое ограниченное множество Q, что на дополнении Q^c имеют место:

1) V — определенно положительная и бесконечно большая функция;

2) $\dot{V} \leqslant 0$;

3) $\{\dot{V} = 0\}$ не содержит целых траекторий системы (2). Полученные условия равносильны утверждению теоремы 2.

Для доказательства теоремы 3 будут нужны следующие леммы.

Л е м м а 1. *Если $\varphi(u)$ — непрерывна и $0 \leqslant \frac{\varphi(u)}{u} \leqslant k$, то при $(x - y)\,y \geqslant 0$ имеет место неравенство*:

$$\int_0^x \varphi(u)\,du - \int_0^y \varphi(u)\,du \leqslant \frac{k}{2}(x^2 - y^2).$$

Л е м м а 2. *Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $\mu|\beta| > \gamma > 0$ и $(\beta x + \gamma y)^2 - kx^2 + \mu k y^2 > 0$. Тогда $W(x, y) = (\beta x + \gamma y)^2 - 2\int_0^x \varphi(u)\,du + 2\mu\int_0^y \varphi(u)\,du > 0$ для любой непрерывной неубывающей функции $\varphi(u)$, для которой*

$$0 < \frac{\varphi(u)}{u} < k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим для определенности, что $\beta < 0$. При $(x - y)\,y \geqslant 0$ $W(x, y) > 0$ в силу леммы 1. При $xy < 0$ утверждение леммы очевидно. Для изучения функции $W(x, y)$ в области $D = \{(y - x)\,x \geqslant 0\}$ рассмотрим вспомогательную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\beta(\beta x + \gamma y) + \varphi(x), \\ \dot{y} &= -\gamma(\beta x + \gamma y) - \mu\varphi(y). \end{aligned} \tag{4}$$

Так как при $M(x, y) \in D$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}(\gamma x - \beta y)^2|_{(4)} = 2(\gamma x - \beta y)[\gamma\varphi(x) + \beta\mu\varphi(y)] < 0,$$

то система (4) не имеет в области D ни замкнутых траекторий, ни состояний равновесия, отличных от начала координат. Далее, в области D

$$\dot{W}|_{(4)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 < 0,$$

поэтому $W(x, y)$ монотонно убывает вдоль решений системы (4). Предположим, что в некоторой точке $p(x_0, y_0)$ $W(x_0, y_0) \leqslant 0$, где $(y_0 - x_0)\,x_0 > 0$. Пусть $\varphi(t, p)$ — траектория системы (4), выходящая при $t = 0$ из точки $p(x_0, y_0)$ фазовой плоскости. Так как $W(x, x) > 0$ при $x \neq 0$ и $W(0, y) > 0$ при $y \neq 0$, то $\varphi(t, p) \subset D$ при всех $t \geqslant 0$. Далее, вдоль $\varphi(t, p)$ имеем

$\frac{d}{dt}(\gamma x-\beta y)^2<0$. Поэтому $\varphi(t, p)$ ограничена, а следовательно, $\varphi(t, p)\underset{t\to\infty}{\to} O(0, 0)$. Это невозможно, так как $W(0, 0)=0\geqslant W(x_0, y_0)$. Противоречие доказывает лемму. Лемма 2 справедлива и в случае $\mu|\beta|=\gamma$.

Лемма 3. *Если:*

$$1)\qquad \mu_1\geqslant\mu_2,\ \mu_2|\beta|-\gamma\mu_1+\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{k_0}\geqslant 0;$$

$$2)\qquad \alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2-\mu_1 kx^2+\mu_2 ky^2>0 \text{ при } 0\leqslant k\leqslant k_0,$$

то $W(x, y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2-2\mu_1\int\limits_0^x\varphi(u)\,du+2\mu_2\int\limits_0^y\varphi(u)\,du>0$ *для любой непрерывной неубывающей функции* $\varphi(u)$, *для которой*

$$0\leqslant\frac{\varphi(u)}{u}\leqslant k_0.$$

Доказательство. В областях $D_1=\{(x-y)\,y\geqslant 0\}$, $D_2=\{xy\leqslant 0\}$ утверждение леммы очевидно. Для изучения функции $W(x, y)$ в области $D_3=\{(y-x)\,x\geqslant 0\}$ представим ее в виде

$$W=\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma}x^2-2\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma k_0}\int\limits_0^x\varphi(u)\,du+\frac{1}{\gamma}(\beta x+\gamma y)^2-2\mu_2\int\limits_0^y\varphi(u)\,du-$$
$$-2\left[\mu_1-\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma k_0}\right]\int\limits_0^x\varphi(u)\,du=2\frac{\alpha\gamma-\beta^2}{\gamma}\int\limits_0^x\left(u-\frac{\varphi(u)}{k_0}\right)du+\overline{W}(x, y), \tag{5}$$

$\overline{W}(x, y)\geqslant 0$ в области D_3. Это доказывается так же, как и аналогичное утверждение леммы 2.

Замечание. В условиях леммы 3 функция $W(x, y)$ бесконечно большая. Утверждение легко вывести, если воспользоваться представлением (5).

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим функцию

$$V=\frac{1}{2}Au^2+\frac{1}{2}Bv^2+\frac{1}{2}k^2B\omega^2+[(a+b)^2A+(k^2+c^2)B]\int\limits_0^z f_1(u)\,du+$$
$$+[(a+b)^2A-(k^2+c^2)B]\int\limits_0^y\varphi_1(u)\,du-\frac{a+b}{c^2}(k^2+c^2)\times$$
$$\times[(a+b)A+cB]\int\limits_0^\theta\varphi_1(u)\,du,$$

где

$$A=b(a+c)(k^2+c^2),\ B=(a+b)^2(k^2+b^2),\ \theta=\frac{c}{c-b}(y-z).$$

Функцию $V(x, y, z)$ перепишем в виде

$$2V=(a+b)^2\frac{k^2+c^2}{k^2+bN}[(k^2+bN)x+(ak^2-bcN)z]^2+2[(a+b)^2A+$$
$$+(k^2+c^2)B]\int\limits_0^z f_1(u)\,du+W(y, \theta).$$

В силу леммы 3 $W(y, \theta)$ — определенно положительная и бесконечно большая функция. Следовательно, определенно положительной и бесконечно большой будет и функция $V(x, y, z)$. Производная ее, в силу системы (2), имеет вид

$$\dot{V} = -ANu^2 + 2(a+b)Au\varphi_1(y) - c^{-1}(a+b)^2 k^2 Ay\varphi_1(y) -$$
$$-(a+b)(k^2+c^2)\{(a+b)(a+c)k^2 z f_1(z) - c^{-1}[(a+b)A +$$
$$+ cB](y-\theta)[\varphi_1(y) - \varphi_1(\theta)]\},$$

$\dot{V} \leqslant 0$ и множество $\{\dot{V} = 0\}$ не содержит целых траекторий системы (2). Возможны следующие случаи. А. $k^2 = 0$. В этом случае $\varphi_1(y) \equiv 0$, $f_1(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, $\{\dot{V} = 0\} = \{u = 0\}$. Если некоторая траектория $\psi(t, p)$ системы (2) целиком принадлежит множеству $\{\dot{V} = 0\}$, то вдоль этой траектории $u(t) \equiv 0$. А так как $\dot{u} = -Nu - (a+b) f_1(z)$, то вдоль этой траектории $z(t) \equiv 0$. Отсюда и из третьего уравнения системы (2) следует, что вдоль $\psi(t, p)$ и $x(t) \equiv 0$. Следовательно, $\psi(t, p)$ совпадает с началом координат. В. $k^2 > 0$. Существуют такие значения $y \neq 0$, что $\varphi_1(y) = 0$. Тогда, в силу условий теоремы, $f_1(z) \neq 0$ при $z \neq 0$, поэтому $\{\dot{V} = 0\} \subset \subset \{u = 0, z = 0\}$. Если вдоль некоторой траектории $u(t) \equiv 0$, $z(t) \equiv 0$, то вдоль этой траектории и $x(t) \equiv 0$. С. $k^2 > 0$, $\varphi_1(y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Этот случай аналогичен случаю В. Итак, функции V и $\dot{V}$ удовлетворяют всем условиям теоремы Барбашина — Красовского.

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим функцию

$$V = \frac{1}{2}cu^2 - \frac{1}{2}(a+b)v^2 - \frac{1}{2}(a+b)k^2\omega^2 + (a+b)(k^2+cN)\int_0^y \varphi_1(u)\,du -$$
$$-(a+b)[k^2+c^2-c(a+b)]\int_0^z f_1(u)\,du - b^{-2}(a+b)[b(a+c)(k^2+c^2) +$$
$$+ c(a+b)(k^2+b^2)]\int_0^\theta f_1(u)\,du,$$

где $\theta = \frac{b}{c-b}(y-z)$. Производная $\dot{V}$ имеет вид

$$\dot{V} = -cNu^2 + 2c(a+b)u\varphi_1(y) - (a+b)^2 k^2 y\varphi_1(y) - cb^{-1}(a+b)^2 k^2 z f_1(z) +$$
$$+ b^{-1}(a+b)[b(a+c)(k^2+c^2) + c(a+b)(k^2+b^2)](z-\theta)[f_1(z) - f_1(\theta)].$$

Если $k^2 = 0$, то $\varphi_1(y) \equiv 0$, $f_1(z) \neq 0$ при $z \neq 0$. Отсюда и из условий теоремы 4 следует, что $\int_0^\infty f_1(u)\,du = \infty$. Если же $k^2 > 0$, то

$$2V \geqslant cu^2 - (a+b)v^2 - (a+b)k^2\omega^2 + \frac{(a+b)Nk^2(k^2+cN)}{c(k^2+N^2)^2}(u+v-N\omega)^2 = W.$$

С помощью критерия Сильвестра нетрудно показать, что $W(u, v, \omega)$ — положительно определенная квадратичная форма. Следовательно, в обоих случаях $V(x, y, z)$ — определенно положительная и бесконечно большая функция. $\dot{V} \leqslant 0$ и множество $\{\dot{V} = 0\}$ не содержит целых траекторий системы (2), отличных от состояния равновесия. Значит функции V и $\dot{V}$ удовлетворяют всем условиям известной нам теоремы.

2. Пусть $c > 0$, $b > 0$, $a + b > 0$, $a + c < 0$.

Введем обозначения:

$$m = \inf\frac{\varphi(y)}{y}, \quad \varphi_1(y) = \varphi(y) - my, \quad f_1(z) = -f(z) - \frac{a+b}{c-b}(k^2+c^2)z,$$

$$k^2=\frac{c-b}{a+c}m-b^2,\ N=a+b+c,\ u=(a+c)x+my-\frac{a+c}{c-b}(k^2+c^2)z,$$

$$v=bx-my+\frac{a+b}{c-b}(k^2+bc)z,\ \omega=x+(a+b)z.$$

Имеют место следующие предложения.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (3), *а также*

1) $\dfrac{f_1(z)}{z}\leqslant\dfrac{-4c(a+c)(a+b)Nk^2(k^2+c^2)(k^2+b^2)}{[c(a+b)(k^2+b^2)-b(a+c)(k^2+c^2)]^2},\ |z|>M;$

2) $k^2>0,\quad y\varphi_1(y)\underset{|y|\to\infty}{\to}\infty.$

Тогда система (2) *предельно ограничена.*

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (3), *а также*

$$\frac{f_1(z)}{z}<\frac{-4c(a+c)(a+b)Nk^2(k^2+c^2)(k^2+b^2)}{[c(a+b)(k^2+b^2)-b(a+c)(k^2+c^2)]^2}.$$

Тогда нулевое решение системы (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 7. *Пусть:* 1) *выполнены условия* (3);

2) $b(a+c)(k^2+c^2)+c(a+b)(k^2+b^2)\leqslant 0;$

3) $k^2>0$ $\left(\text{*если* } k^2=0, \text{ *то* } \int\limits_0^\infty\varphi_1(u)\,du=\infty\right);$

4) $f_1(u)$ — *неубывающая функция.*

Тогда нулевое решение системы (2) *устойчиво в целом.*

Теорема 8. *Если* $b(a+c)(k^2+c^2)+c(a+b)(k^2+b^2)\geqslant 0$ *и* $\varphi_1(y)$ — *неубывающая функция, то для устойчивости в целом нулевого решения системы* (2) *достаточно выполнения условий* (3).

Теоремы 5—8 доказываются аналогично теоремам 1—4 соответственно с помощью функций:

$$V=\frac{1}{2}Au^2+\frac{1}{2}Bv^2+\frac{1}{2}k^2B\omega^2+[(a+c)^2A+(k^2+b^2)B]\int\limits_0^y\varphi_1(u)\,du-$$

$$-(k^2+bN)B\int\limits_0^z f_1(u)\,du,$$

где $A=c(a+b)(k^2+b^2),\ B=(a+c)^2(k^2+c^2);$

$$V=\frac{1}{2}Au^2+\frac{1}{2}Bv^2+\frac{1}{2}k^2B\omega^2+[(a+c)^2A+(k^2+b^2)B]\int\limits_0^y\varphi_1(u)\,du+$$

$$+[(a+c)^2A-(k^2+b^2)B]\int\limits_0^z f_1(u)\,du-b^{-2}(a+c)(k^2+b^2)\times$$

$$\times[(a+c)A+bB]\int\limits_0^\theta f_1(u)\,du,$$

где $A=c(a+b)(k^2+b^2),\ B=(a+c)^2(k^2+c^2),\ \theta=\dfrac{b}{c-b}(y-z);$

$$V=\frac{1}{2}bu^2-\frac{1}{2}(a+c)v^2-\frac{1}{2}(a+c)k^2\omega^2+(a+c)(k^2+bN)\int\limits_0^z f_1(u)\,du-$$

$$
-(a+c)\left[k^2+b^2-b(a+c)\right]\int\limits_0^y \varphi_1(u)\,du - b^{-2}(a+c)\left[c(a+b)(k^2+b^2)+\right.
$$

$$
\left.+\,b(a+c)(k^2+c^2)\right]\int\limits_0^\theta \varphi_1(u)\,du,
$$

где $\theta=\dfrac{b}{c-b}(y-z)$.

Следующий пример показывает, что система (2) при выполнении обобщенных условий Рауса — Гурвица допускает неограниченные решения:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2x-\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}z-f(z),\\
\dot{y} &= x-y, \qquad\qquad\qquad\qquad (6)\\
\dot{z} &= x-3z,
\end{aligned}
$$

где $\dfrac{f(z)}{z}>0$ $(z\neq 0)$, $f(z)=O(z^{-\alpha})$ $(\alpha>1)$ при $z>M$. Система (6) удовлетворяет обобщенным условиям Рауса—Гурвица. Покажем, что она имеет неограниченные решения.

Пусть

$$
Q=\left\{z\geqslant M,\ 0\leqslant -2x-y+9z\leqslant x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z,\right.
$$

$$
\left. z\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z\right)^{\lambda}\geqslant 1\right\},
$$

где M — достаточно велико, $\lambda>\dfrac{2}{\alpha-1}$.

Система (6) допускает функцию Ляпунова

$$
V=\left(x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}z\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z\right)^2+4\int\limits_0 f(z)\,dz,
$$

производная $\dot{V}$ которой в силу системы имеет вид

$$
\dot{V}=-4\left(x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}z\right)^2.
$$

Множество, где $\dot{V}=0$, не содержит целых траекторий системы (6). Поэтому система (6) не содержит ни замкнутых траекторий, ни особых точек, отличных от $O(0,\ 0,\ 0)$.

Пусть $\psi(t,\ p)$ — траектория системы (6), выходящая при $t=0$ из точки p фазового пространства и $p\in Q$.

Так как в области Q имеем

$$
\dot{z}=x-3z=\frac{1}{2}(u+v)=\frac{1}{4}(2u+v)+\frac{1}{4}v\geqslant 0,\ \dot{u}\,|_{u=0}=-f(z)<0,
$$

$$
\frac{d}{dt}(2u+v)\,|_{v=-2u}=\left[-4u-3f(z)\right]|_{v=-2u}=2v-3f(z)\geqslant 2z^{-\frac{1}{\lambda}}-3f(z)>0,
$$

$$
\frac{d}{dt}(zv^{\lambda})\,|_{z=v^{-\lambda}}=\left[\dot{z}v^{\lambda}+\lambda zv^{\lambda-1}\dot{v}\right]|_{z=v^{-\lambda}}=v^{\lambda-1}\left[\frac{1}{2}(u+v)v-\lambda zf(z)\right]\Big|_{z=v^{-\lambda}}\geqslant
$$

$$\geqslant v^{\lambda-1}\left[\frac{1}{4}v^2-\lambda zf(z)\right]\Big|_{z=v^{-\lambda}}=v^{\lambda-1}\left[\frac{1}{4}z^{-\frac{2}{\lambda}}-\lambda zf(z)\right]>0,$$

где $u=x+\frac{1}{2}y-\frac{9}{2}z,\ v=x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}z$, то $\psi(t,p)\subset Q$ при всех $t\geqslant 0$.

Замкнутая сбласть $Q\ni O(0,0,0)$.

Следовательно, $\psi(t,p)\underset{t\to\infty}{\to}\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Тузов, О необходимых и достаточных условиях устойчивости одной системы регулирования, ДАН БССР, т. 4, № 3, 1960.
2. В. А. Плисс, Некоторые проблемы теории устойчивости движения в целом, Изд-во ЛГУ, 1958.
3. Н. Н. Красовский, Об устойчивости при любых начальных возмущениях решений одной нелинейной системы трех уравнений, ПММ, т. XVII, вып. 3, 1953.
4. И. В. Гайшун, Об одном применении качественных методов в теории устойчивости нелинейных систем, Дифференц. уравнения, т. 6, № 7, 1970.
5. М. А. Балитинов, А. Р. Эфендиев, Об устойчивости одной нелинейной системы, Ученые записки Дагестанского пед. ин-та, т. 5, 1966.
6. М. А. Балитинов, Поведение решений в целом одной нелинейной системы, Дифференц, уравнения, т. 5, № 2, 1969.
7. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский, Об устойчивости движения в целом, ДАН СССР, т. 86, вып. 3, 1952.

Поступила 19.IV 1968 г.,
после переработки — 4.X 1970 г.

Дагестанский государственный университет