УДК 517.926

Исследование устойчивости в резонансных случаях

К. Г. Валеев, М. Я. Важговская

В статье рассматриваются вопросы решения неявных уравнений, которые используются при исследовании устойчивости систем дифференциальных уравнений.

1. Исследование устойчивости и отыскание характеристических показателей системы дифференциальных уравнений в резонансных случаях приводится к решению уравнения вида

$$\det(\lambda E + \mu\Psi(\lambda, \mu)) = 0, \tag{1.1}$$

где E — единичная матрица, $\Psi(\lambda, \mu)$ — квадратная матрица, элементы которой являются функциями переменных λ, μ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть в замкнутой области* $|\mu| \leqslant \mu_0$ *и* $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ *задана матрица* $\Psi(\lambda, \mu)$

$$\Psi(\lambda, \mu) = [\psi_{sk}(\lambda, \mu)]_1^n,$$

где $\psi_{sk}(\lambda, \mu)$ — *аналитические функции переменных* λ *и* μ *в области:* $|\mu| \leqslant \mu_0$, $|\lambda| \leqslant \lambda_0$. *Предполагаем выполненными условия:*

$$\|\Psi(\lambda, \mu)\| \leqslant M\,(M > 0); \;\; \|\Psi(\lambda, \mu)\| = \max_{(s)} \sum_{k=1}^{n} |\psi_{sk}|. \tag{1.2}$$

Если выполнено дополнительное условие

$$|\mu| \leqslant \min\left\{\frac{|\lambda_0|}{8M};\ \mu_0\right\},\quad |\lambda| \leqslant 0{,}5\lambda_0, \tag{1.3}$$

то уравнение

$$\det(\lambda E + \mu\Psi(\lambda, \mu)) = 0 \tag{1.4}$$

может быть приведено к уравнению

$$\det(\lambda E + \mu\Phi(\mu)) = 0,\quad \|\Phi(\mu)\| \leqslant 2M. \tag{1.5}$$

При этом справедливо разложение на матричные множители:

$$\lambda E + \mu\Psi = (\lambda E + \mu\Phi)(E + \mu\Gamma), \tag{1.6}$$

где переменные матрицы Φ, Γ *имеют вид:*

$$\Phi(\mu) = [\varphi_{sk}(\mu)]_1^n,\quad \Gamma(\lambda, \mu) = [\gamma_{sk}(\lambda, \mu)]_1^n.$$

Доказательство можно разбить на несколько частей.

I. Предполагая, что равенство (1.6) выполняется, получим матричное уравнение для Φ, Γ:

$$\Psi = \Phi + \lambda\Gamma + \mu\Phi\Gamma. \tag{1.7}$$

Разлагая матрицы Ψ, Γ в степенные ряды по степеням λ, имеем:

$$\begin{gathered}\Psi(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \psi_k(\mu),\quad \|\psi_k(\mu)\| \leqslant \frac{M}{|\lambda_0^k|},\\ \Gamma(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \Gamma_k(\mu).\end{gathered} \tag{1.8}$$

Подставляя (1.8) в (1.7) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим

$$\begin{gathered}\psi_0 = \Phi + \mu\Phi\Gamma_0,\\ \psi_j = \Gamma_{j-1} + \mu\Phi\Gamma_j\ \ (j = 1, 2, 3, \ldots),\end{gathered} \tag{1.9}$$

откуда имеем равенства:

$$\begin{gathered}\Gamma_0 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^k \Phi^k \psi_{k+1},\\ \Phi = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^k \Phi^k \psi_k.\end{gathered} \tag{1.10}$$

Применим для отыскания матрицы Φ метод последовательных приближений:

$$\Phi_0 \equiv 0,\ \Phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu^k \Phi_n^k \psi_k\ \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.11}$$

II. Докажем по индукции, что $\|\Phi_n\| \leqslant 2M$.

Действительно, $\|\Phi_0\| = 0$. Предположим, что $\|\Phi_n\| \leqslant 2M$. Тогда из (1.11) получим

$$\|\Phi_{n+1}\| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\mu^k|\, \|\Phi_n^k\|\, \|\psi_k\| \leqslant M\left(1 - \frac{|\mu|\,\|\Phi_n\|}{|\lambda_0|}\right)^{-1} \leqslant 2M. \tag{1.12}$$

Ограниченность $\| \Phi_n \|$ доказана.

III. Докажем следующее утверждение. Пусть A и B — квадратные матрицы, справедливо неравенство:

$$\| A^n - B^n \| \leqslant (\| z \| + \| B \|)^n - \| B^n \|, \; z = A - B \;\; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Действительно, пусть $A - B = z$, $A^n - B^n = (z + B)^n - B^n$. Тогда имеем неравенство:

$$\| A^n - B^n \| \leqslant n \| B^{n-1} \| \| z \| + \frac{n(n-1)}{2} \| B^{n-2} \| \| z^2 \| + \ldots$$

$$\ldots + \| z^n \| = (\| B \| + \| z \|)^n - \| B^n \|.$$

IV. Покажем, что метод последовательных приближений сходится. Для этого достаточно показать, что при $q < 1$

$$\| \Phi_{n+1} - \Phi_n \| \leqslant q \| \Phi_n - \Phi_{n-1} \|. \tag{1.13}$$

Используя равенство (1.10), получим

$$\| \Phi_{n+1} - \Phi_n \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | \mu^k | \| \Phi_n^k - \Phi_{n-1}^k \| \| \psi_k \|.$$

Применим к этому неравенству предыдущее утверждение, обозначив:

$$\Phi_n - \Phi_{n-1} = z_n ,$$

$$\| z_{n+1} \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} | \mu^k | \| \psi_k \| [(\| z_n \| + \| \Phi_{n-1} \|)^k - \| \Phi_{n-1}^k \|]. \tag{1.14}$$

Ряд (1.14) представим в виде разности двух рядов с положительными членами; используя неравенства (1.3) и (1.12), получим:

$$\| z_{n+1} \| \leqslant \left| \frac{\mu}{\lambda_0} \right| M \| z_n \| \left[1 - \left| \frac{\mu}{\lambda_0} \right| (\| z_n \| + \| \Phi_{n-1} \|) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[1 - \left| \frac{\mu}{\lambda_0} \right| \| \Phi_{n-1} \| \right]^{-1} \leqslant \frac{4}{15} \| z_n \|.$$

Это означает, что условие (1.13) действительно выполнено.

V. Для того, чтобы уравнения (1.4), (1.5) имели одинаковые решения, достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\| \mu \Gamma \| < 1.$$

Как следует из (1.9),

$$\Gamma_k = \psi_{k+1} - \mu \Phi \psi_{k+2} + \mu^2 \Phi^2 \psi_{k+3} + \ldots ,$$

$$\| \Gamma_0 \| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} M | \mu^k | | \lambda_0^{-k-1} | \| \Phi^k \| = \frac{M}{| \lambda_0 |} \left(1 - \left| \frac{\mu}{\lambda_0} \right| \| \Phi \| \right)^{-1} \leqslant \frac{2M}{| \lambda_0 |} .$$

Аналогично получим оценки:

$$\| \Gamma_k \| \leqslant \frac{2M}{| \lambda_0^{k+1} |} \;\; (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.15}$$

Так как по условию теоремы $|\lambda| < 0{,}5\,|\lambda_0|$, то получим:

$$\|\mu\Gamma\| \leqslant |\mu| \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda^k|\,\|\Gamma_k\| \leqslant \left|\frac{\mu}{\lambda_0}\right| 2M \left(1 - \left|\frac{\lambda}{\lambda_0}\right|\right)^{-1} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Теорема доказана.

Пример 1. Систему двух дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mu AY(t) + 2\mu \cos tBY(t),$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

рассмотрим в двух случаях.

1. Из работы [1] следует, что при $A = A_1$ уравнение для характеристических показателей принимает вид (1.1), где элементы матрицы $\Psi(\lambda, \mu)$ следующие: -

$$\psi_{11} = -\varepsilon - 2\mu\left[\frac{(\lambda - \varepsilon\mu)\,\alpha^2}{(\lambda - \varepsilon\mu)^2 + 1} + \frac{\beta\gamma(\lambda + \varepsilon\mu)}{(\lambda + \varepsilon\mu)^2 + 1}\right] + O(\mu^2),$$

$$\psi_{12} = -2\mu\left[\frac{\alpha\beta(\lambda - \varepsilon\mu)}{(\lambda - \varepsilon\mu)^2 + 1} + \frac{\beta\gamma(\lambda + \varepsilon\mu)}{(\lambda + \varepsilon\mu)^2 + 1}\right] + O(\mu^2),$$

$$\psi_{21} = -2\mu\left[\frac{\alpha\gamma(\lambda - \varepsilon\mu)}{(\lambda - \varepsilon\mu)^2 + 1} + \frac{\gamma\delta(\lambda + \varepsilon\mu)}{(\lambda + \varepsilon\mu)^2 + 1}\right] + O(\mu^2),$$

$$\psi_{22} = \varepsilon - 2\mu\left[\frac{\beta\gamma(\lambda - \varepsilon\mu)}{(\lambda - \varepsilon\mu)^2 + 1} + \frac{\delta^2(\lambda + \varepsilon\mu)}{(\lambda + \varepsilon\mu)^2 + 1}\right] + O(\mu^2).$$

Приведем это уравнение к виду (1.5). Применяя доказанную теорему, получим элементы матрицы $\Phi(\mu)$:

$$\varphi_{11} = -\varepsilon + 4\beta\gamma\mu^2\varepsilon + \ldots, \qquad \varphi_{21} = -4\alpha\gamma\varepsilon\mu^2 + \ldots,$$

$$\varphi_{12} = 4\mu^2\varepsilon\beta\gamma + \ldots, \qquad \varphi_{22} = \varepsilon + 4\beta\gamma\mu^2\varepsilon + \ldots$$

Многоточия везде обозначают члены порядка μ^4. Уравнение (1.5) приводится к виду

$$\lambda^2 - \mu^2\varepsilon^2 - 8\beta\gamma\mu^4\varepsilon^2 + O(\mu^6) = 0,$$

из которого находим характеристические показатели:

$$\lambda_{1,2} = \pm\,\mu\varepsilon\,(1 + 4\mu^2\beta\gamma + O(\mu^3)).$$

В этом случае решение неустойчиво.

2. Если $A = A_2$, то элементы матрицы $\Psi(\lambda, \mu)$ следующие:

$$\psi_{11} = -\frac{2\mu(\alpha^2 + \beta\gamma)(\lambda^3 + \lambda)}{(\lambda^2 + \mu^2\varepsilon^2 - 1)^2 + 4\lambda^2} + O(\mu^2),$$

$$\psi_{12} = -\varepsilon - \frac{2\beta\mu(\alpha + \delta)(\lambda^3 + \lambda)}{(\lambda^2 + \mu^2\varepsilon^2 - 1)^2 + 4\lambda^2} + O(\mu^2),$$

$$\psi_{21} = \varepsilon - \frac{2\mu\gamma(\alpha + \delta)(\lambda^3 + \lambda)}{(\lambda^2 + \mu^2\varepsilon^2 - 1)^2 + 4\lambda^2} + O(\mu^2),$$

$$\psi_{22} = -\frac{2\mu(\delta^2 + \beta\gamma)(\lambda^3 + \lambda)}{(\lambda^2 + \mu^2\varepsilon^2 - 1)^2 + 4\lambda^2} + O(\mu^2).$$

Находим из (1.10) элементы матрицы $\Phi(\mu)$:

$$\varphi_{11} = 2\mu^2\varepsilon(\alpha\beta + \delta\gamma) + \ldots, \qquad \varphi_{21} = \varepsilon + 2\mu^2\varepsilon(\alpha\delta - \gamma^2 - \alpha^2 - \beta\gamma) + \ldots,$$

$$\varphi_{12} = -\varepsilon + 2\mu^2\varepsilon(\beta^2 - \alpha\delta + \delta^2 + \beta\gamma) + \ldots, \qquad \varphi_{22} = -2\mu^2\varepsilon(\alpha\beta + \delta\gamma) + \ldots$$

Получим уравнение для характеристических показателей:

$$\lambda^2 + \mu^2\varepsilon^2 - 2\mu^4\varepsilon^2[(\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2] + O(\mu^6) = 0,$$

откуда находим характеристические показатели

$$\lambda_{1,2} = \pm i\varepsilon\mu\{1 - \mu^2[(\alpha - \delta)^2 + (\beta + \gamma)^2] + O(\mu^4)\}.$$

Решение устойчиво при достаточно малых значениях $\mu > 0$.

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dY(t)}{dt} = \mu^2 AY + \mu\cos tBY + \mu\sin tCY,$$

где

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \delta & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение для характеристических показателей приводится к виду (1.1), где элементы $\Psi(\lambda, \mu)$ следующие:

$$\psi_{11} = -\mu a - 2\mu\frac{(\lambda - \mu^2 b)(\alpha\delta + \beta\gamma) + \beta\delta - \alpha\gamma}{(\lambda - \mu^2 b)^2 + 1}, \quad \psi_{12} = 0,$$

$$\psi_{21} = 0, \; \psi_{22} = -\mu b - 2\mu\frac{(\lambda - \mu^2 a)(\alpha\delta + \beta\gamma) + \alpha\gamma - \beta\delta}{(\lambda - \mu^2 a)^2 + 1}.$$

Применяя доказанную теорему, находим характеристические показатели:

$$\lambda_1 = \mu^2 a + 2\mu^2(\beta\delta - \alpha\gamma) + 2\mu^4(a - b)(\alpha\delta + \beta\gamma) +$$
$$+ 4\mu^4(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma) + O(\mu^6),$$
$$\lambda_2 = \mu^2 b - 2\mu^2(\beta\delta - \alpha\gamma) - 2\mu^4(a - b)(\alpha\delta + \beta\gamma) -$$
$$- 4\mu^4(\alpha\delta + \beta\gamma)(\beta\delta - \alpha\gamma) + O(\mu^6).$$

В зависимости от вида матриц B и C решение может быть устойчивым или неустойчивым.

2. Задача отыскания характеристических показателей дифференциального уравнения n-го порядка в кратных резонансных случаях приводит часто к уравнению вида

$$\varphi(z, \mu) = a_0(\mu) + a_1(\mu)z + \ldots + a_n(\mu)z^n + \ldots, \tag{2.1}$$

где $\varphi(z, \mu)$ — аналитическая функция при $|z| \leqslant \varepsilon$, $|\mu| \leqslant \varepsilon_1$, и выполнено условие

$$|\varphi(z, \mu)| \leqslant M.$$

Предполагаем, что $\varphi(z, 0)$ имеет n-кратный корень $z = 0$:

$$a_0(0) = 0, \; a_1(0) = 0, \ldots, a_{n-1}(0) = 0, \; a_n(0) > 0, \; a_k(\mu) = O(\mu^{n-k}).$$

Найдем уравнение для отыскания корней $z_i(\mu)$ функции $\varphi(z, \mu)$ таких, что

$$z_1(0) = 0, \; z_2(0) = 0, \ldots, \; z_n(0) = 0. \tag{2.2}$$

По теореме Вейерштрасса [2] из $\varphi(z, \mu)$ можно выделить множитель

$$\varphi_n(z, \mu) = z^n + b_1(\mu) z^{n-1} + \ldots + b_n(\mu), \tag{2.3}$$

нулями которого являются $z_j(\mu)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$,

$$\varphi(z, \mu) = (b_n + b_{n-1}z + \ldots + b_1 z^{n-1} + z^n)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots), \tag{2.4}$$

$$b_k = b_k(\mu), \ b_k(0) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Сравнивая коэффициенты в (2.1) и (2.4), получим бесконечную систему уравнений, которую можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} c_0 & 0 & \ldots 0 \\ c_1 & c_0 & \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots c_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

$$(E + b_1 F + \ldots + b_n F^n) C = A, \tag{2.6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ . & . & . & . \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \\ . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Из уравнения (2.6) находим C, разлагая в ряд по степеням F матрицу

$$(E + b_1 F + \ldots + b_n F^n)^{-1}.$$

Из уравнения (2.6) находим:

$$c_k = a_{n+k} - b_1 a_{n+k+1} + (b_1^2 - b_2) a_{n+k+2} + \ldots \ (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Для исследования сходимости рядов в (2.8) введем нормированное пространство m_ε с нормой

$$\| C \| = \sup_{(k)} | c_k \varepsilon^k | \ (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из свойств аналитических функций [3] следуют неравенства

$$| a_k | \leqslant \frac{M}{\varepsilon^k}, \ | a_k \varepsilon^k | \leqslant M \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где

$$M = \max | \varphi(z, \mu) |, \ | z | \leqslant \varepsilon, \ | \mu | \leqslant \varepsilon_1,$$

следовательно, выполнено неравенство:

$$\| A \| \leqslant M \varepsilon^{-n}, \ A \in m_\varepsilon.$$

Непосредственным рассмотрением получим, что

$$\| F \| = \sup \| FX \| = \varepsilon^{-1}, \ \| X \| = 1.$$

Поэтому система (2.6) имеет единственное решение — вектор C — такое, что $\| C \|$ ограничена, если

$$\sum_{k=1}^{n} | b_k(\mu) | \varepsilon^{-k} < 1. \tag{2.9}$$

Это условие можно выполнить при $|\mu| \leqslant \varepsilon_2$ $(\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1)$, так как выполнено условие $b_k(0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; подставляя $c_0, \ldots, c_{n-1}$ в (2.5) и зная $a_0, \ldots, a_{n-1}$, из (2.5) найдем

$$b_k = \psi_k(b_1, \ldots, b_n, \mu) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \quad c_0 \neq 0. \tag{2.10}$$

Введем векторы

$$B = \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(B, \mu) = \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \psi_1 \end{pmatrix}, \quad \|B\| = \sup_{(k)} |b_{n-k}\varepsilon^k| \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Из (2.6) получим оценку

$$\|C\| \leqslant M(\varepsilon^n - n\|B\|)^{-1}.$$

Систему уравнений (2.10) можно записать в виде

$$B = \Psi(B, \mu).$$

Применим метод последовательных приближений: $B_{n+1} = \Psi(B_n, \mu)$. Правые части системы (2.10) обращаются в нуль при $\mu = 0$. Поэтому элементы функционального определителя

$$\frac{D\Psi}{DB} = \frac{D(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{D(b_1, \ldots, b_n)}$$

обращаются в нуль при $\mu = 0$. Возьмем произвольное число $S > 0$, выберем $\varepsilon_3 > 0$ $(\varepsilon_3 < \varepsilon_2)$ так, чтобы

$$\|\psi(0, \mu)\| < \frac{S}{2}$$

и

$$\left\| \frac{D\Psi(B, \mu)}{DB} \right\| < \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \|B\| < S, \quad |\mu| < \varepsilon_3. \tag{2.11}$$

Это всегда возможно. Из условия (2.11) следует, что последовательные приближения сходятся. Сходимость будет равномерная по μ и, следовательно, элементы B являются аналитическими функциями параметра μ при $|\mu| < \varepsilon_3$.

Построив множитель $\varphi_n(z, \mu)$ (2.3), можем исследовать устойчивость решений уже обычным путем, применив условия Гурвица.

Пример 3. Рассмотрим устойчивость решений уравнения

$$y''' + \lambda^2 y' + 2\mu \cos t y = 0. \tag{2.12}$$

При $\mu = 0$ решением характеристического уравнения будут $\pm \lambda i$; 0. Из работы [1] следует, что уравнение для характеристических показателей при $\mu \neq 0$ имеет вид:

$$p^3 + \lambda^2 p = \mu^2 \left[\frac{1}{(p+i)^3 + \lambda^2(p+i) + \ldots} + \frac{1}{(p-i)^3 + \lambda^2(p-i) + \ldots} \right].$$

Указанным в п. 2 способом рассмотрены частные случаи при различных λ. Найдем характеристические показатели p_j в разных случаях:

I) $\lambda = 0$, $p_1 = 0$, $\quad p_{2,3} = \pm \mu i \sqrt{6} + O(\mu^3)$;

II) $\lambda = \mu\Theta, \ \Theta = O(\mu), \ p_1 = 0, \ p_{2,3} = \pm \mu i \sqrt{6 + \Theta^2} + O(\mu^3)$;

III) $\lambda = 1, \ p_1 = 0, \ p_{2,3} = \pm \mu i + O(\mu^3)$;

IV) $\lambda = 0{,}5, \ p_1 = 0, \ p_{2,3} = \pm i \cdot 0{,}25 + 6\mu^2 + O(\mu^3)$;

V) $\lambda = 2, \ p_1 = 0, \ p_{2,3} = \pm 2i + \frac{1}{30} i\mu^2 + O(\mu^4)$.

В случае IV решения неустойчивы, а во всех других решения устойчивы при достаточно малых значениях $|\mu|$.

Замечание. Рассуждения п. 2 фактически доказывают теорему Вейерштрасса. Векторная форма записи доказательства, близкого по существу к известным доказательствам [2, 4] теоремы, удобна для следующих обобщений, когда ищется решение неявних уравнений в банаховом пространстве. Много примеров использования теоремы Вейерштрасса в теории дифференциальных уравнений дано в [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Г. Валеев, О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, Прикл. матем. и мех., т. XXIV, вып. 4, 1960.
2. Н. П. Еругин, Неявные функции, Изд-во Ленингр. ун-та, 1956.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1958.
4. Э. Гурса, Курс математического анализа, т. II, ч. 1, ГТТИ, М. — Л., 1933.
5. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.

Поступила 14.IV 1969 г.,
после переработки — 24.VII 1970 г.

Киевский институт инженеров гражданской авиации,
Одесский политехнический институт