УДК 531.383

О методе малого параметра в теории гирокомпасов

В. П. Василенко, А. П. Янишевский

1. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение чувствительного элемента двухроторного непространственного гирокомпаса, в котором предусмотрена полная компенсация вынужденных баллистических девиаций в виде реализации соотношения

$$PlV = 2Bg\cos\varepsilon_0, \tag{1.1}$$

имеет вид [1]

$$\frac{Pl}{g}(V\alpha)^{\cdot} - Pl\beta - 2B\sin\varepsilon_0\Omega\delta = 0,$$

$$\dot\beta + \frac{V}{R}\alpha - \Omega\gamma = 0, \qquad \dot\gamma + \frac{s}{2B\sin\varepsilon_0}\delta + \Omega\beta = 0,$$

$$(2B\sin\varepsilon_0)^{\cdot} - Pl\gamma + \frac{Pl}{g}\Omega V\alpha = 0. \tag{1.2}$$

Здесь обозначения те же, что и в работе [1]; точка означает дифференцирование по времени.

Величину $\sin\varepsilon_0 \approx \sin\varphi$ [2] можно считать постоянной, поскольку в высоких широтах $\sin\varphi$ изменяется очень медленно.

Полагая в (1.1)

$$V\alpha = x_1, \quad \beta = x_2, \quad \gamma = x_3, \quad \frac{2B\sin\varepsilon_0 g}{Pl}\delta = x_4, \tag{1.3}$$

получим

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 - gx_2 - \Omega x_4 = 0,\\
\dot{x}_2 + \frac{x_1}{R} - \Omega x_3 = 0,\\
\dot{x}_3 + \frac{p^2}{g}x_4 + \Omega x_2 = 0 \quad \left(p = \frac{\sqrt{Pls}}{2B\sin\varepsilon_0}\right),\\
\dot{x}_4 - gx_3 + \Omega x_4 = 0.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

В случае, если корабль совершает маневр в виде правильной циркуляции, для $\Omega(t)$ можно принять, согласно [1], выражение

$$\Omega(t) \approx \frac{\dot{v}_N(t)}{RU\cos\varphi}, \tag{1.5}$$

соответствующее учету в проекции абсолютной угловой скорости трехгранника Дарбу на геоцентрическую вертикаль лишь производной от скоростной девиации. Подставляя в формулу (1.5) значение северной составляющей ускорения корабля, находим (в случае левой циркуляции)

$$\Omega(t) \approx \frac{v\omega\sin(\psi_0 - \omega t)}{RU\cos\varphi} = \mu\omega\sin(\psi_0 - \omega t), \tag{1.6}$$

где

$$\mu = \frac{v}{RU\cos\varphi}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T_ц}. \tag{1.7}$$

2. Будем считать, для определенности, что маневр совершается с северного курса $(\psi_0 = 0^0)$.

Тогда, с учетом (1.6), систему (1.4) можно записать в форме:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 - gx_2 + \mu\omega\sin\omega t x_4 = 0,\\
\dot{x}_2 + \frac{\nu^2}{g}x_1 + \mu\omega\sin\omega t x_3 = 0,\\
\dot{x}_3 + \frac{p^2}{g}x_4 - \mu\omega\sin\omega t x_2 = 0,\\
\dot{x}_4 - gx_3 - \mu\omega\sin\omega t x_1 = 0 \quad (g = \nu^2 R),
\end{gathered} \tag{2.1}$$

которая представляет собой, вообще говоря, систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами периода $\frac{2\pi}{\omega}$. Заметим, что параметр μ в системе (2.1) является малой величиной.

В самом деле, при скорости корабля $v = 30$ узлов, периоде циркуляции $T_ц = 4$ мин. и широте $\varphi = 70^\circ$ он принимает значение 0,097.

Рассмотрим, далее, матричное дифференциальное уравнение, соответствующее системе (2.1)

$$\frac{dX}{dt} = A(t, \mu)X, \tag{2.2}$$

где $X(t, \mu)$ — искомая матрица фундаментальных решений (интегральная матрица), нормированная к единице, т. е.

$$X(0, \mu) = E, \tag{2.3}$$

где E — единичная матрица четвертого порядка.

Матрица коэффициентов в данном случае имеет следующую структуру:

$$A(t, \mu) = A_0 + \mu A_1(t), \tag{2.4}$$

где

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & g & 0 & 0 \\ -\frac{\nu^2}{g} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^2}{g} \\ 0 & 0 & g & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1(t) = \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\sin\omega t \\ 0 & 0 & -\sin\omega t & 0 \\ 0 & \sin\omega t & 0 & 0 \\ \sin\omega t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Интегральную матрицу уравнения (2.2) строим в виде разложения по степеням малого параметра μ:

$$X(t, \mu) = X_0(t) + \mu X_1(t) + \mu^2 X_2(t) + \ldots \tag{2.6}$$

Из требования нормировки интегральной матрицы $X(t, \mu)$ следует, что матрицы $X_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ должны удовлетворять условиям

$$X_0(0) = E, \quad X_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.7}$$

Подставляя разложение (2.6) в (2.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, получим

$$\frac{dX_0}{dt} = A_0 X_0, \quad \frac{dX_k}{dt} = A_0 X_k + A_1 X_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.8}$$

Имеем, в частности,

$$X_0(t) = \begin{bmatrix} \cos\nu t & \frac{g}{\nu}\sin\nu t & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{g}\sin\nu t & \cos\nu t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos pt & -\frac{p}{g}\sin pt \\ 0 & 0 & \frac{g}{p}\sin pt & \cos pt \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_{13}^{(1)} & x_{14}^{(1)} \\ 0 & 0 & x_{23}^{(1)} & x_{34}^{(1)} \\ x_{31}^{(1)} & x_{32}^{(1)} & 0 & 0 \\ x_{41}^{(1)} & x_{42}^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.10}$$

где

$$x_{31}^{(1)}(t) = \frac{1}{2g}\frac{\omega}{p}\left\{\frac{\nu(\omega-\nu)-p^2}{(\omega-\nu)^2-p^2}\left[(\omega-\nu)\sin pt - p\sin(\omega-\nu)t\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\nu(\omega+\nu)+p^2}{(\omega+\nu)^2-p^2}\left[(\omega+\nu)\sin pt - p\sin(\omega+\nu)t\right]\right\},$$

$$x_{41}^{(1)}(t)=\frac{\omega}{2}\left\{\frac{\omega-2\nu}{(\omega-\nu)^2-p^2}\left[\cos pt-\cos(\omega-\nu)t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega+2\nu}{(\omega+\nu)^2-p^2}\left[\cos pt-\cos(\omega+\nu)t\right]\right\},$$

$$x_{32}^{(1)}(t)=\frac{\omega}{2\nu}\left\{\frac{\omega\nu-\nu^2-p^2}{(\omega-\nu)^2-p^2}\left[\cos pt-\cos(\omega-\nu)t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega\nu+\nu^2+p^2}{(\omega+\nu)^2-p^2}\left[\cos pt-\cos(\omega+\nu)t\right]\right\},$$

$$x_{42}^{(1)}(t)=\frac{\omega g}{2p\nu}\left\{\frac{2\nu+\omega}{(\omega+\nu)^2-p^2}\left[(\omega+\nu)\sin pt-p\sin(\omega+\nu)t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{2\nu-\omega}{(\omega-\nu)^2-p^2}\left[(\omega-\nu)\sin pt-p\sin(\omega-\nu)t\right]\right\},$$

$$x_{13}^{(1)}(t)=\frac{\omega g}{2p\nu}\left\{\frac{\omega-2p}{(\omega-p)^2-\nu^2}\left[(\omega-p)\sin\nu t-\nu\sin(\omega-p)t\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega+2p}{(\omega+p)^2-\nu^2}\left[(\omega+p)\sin\nu t-\nu\sin(\omega+p)t\right]\right\}, \tag{2.11}$$

$$x_{23}^{(1)}(t)=\frac{\omega}{2p}\left\{\frac{\nu^2-p\omega+p^2}{(\omega-p)^2-\nu^2}\left[\cos\nu t-\cos(\omega-p)t\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu^2+p\omega+p^2}{(\omega+p)^2-\nu^2}\left[\cos\nu t-\cos(\omega+p)t\right]\right\},$$

$$x_{14}^{(1)}(t)=\frac{\omega}{2}\left\{\frac{\omega-2p}{(\omega-p)^2-\nu^2}\left[\cos(\omega-p)t-\cos\nu t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\omega+2p}{(\omega+p)^2-\nu^2}\left[\cos(\omega+p)t-\cos\nu t\right]\right\},$$

$$x_{24}^{(1)}(t)=\frac{1}{2g}\,\frac{\omega}{\nu}\left\{\frac{\nu^2-\omega p+p^2}{(\omega-p)^2-\nu^2}\left[(\omega-p)\sin\nu t-\nu\sin(\omega-p)t\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu^2+\omega p+p^2}{(\omega+p)^2-\nu^2}\left[(\omega+p)\sin\nu t-\nu\sin(\omega+p)t\right]\right\}.$$

3. Известно [3, 4], что вопрос об устойчивости нулевого решения системы (2.2) может быть полностью решен путем исследования собственных значений или инвариантов матрицы монодромии

$$W(\mu)=X\left(\frac{2\pi}{\omega},\mu\right). \tag{3.1}$$

Так как характеристическое уравнение матрицы (3.1) возвратно [1], то ее собственные значения полностью определяются двумя первыми инвариантами. Обозначая эти инварианты $2a$ и $2b$, характеристическое уравнение матрицы (3.1) можно записать в виде

$$\lambda^4-2a\lambda^3+2b\lambda^2-2a\lambda+1=0. \tag{3.2}$$

Напомним, что $2a=Sp_1$ — след матрицы (3.1); $2b=\frac{1}{2}(Sp_1^2-Sp_2)$, где Sp_2 — след матрицы $[W(\mu)]^2$.

С учетом (2.9) и (2.10) получаем

$$a=\cos\frac{\nu}{\omega}2\pi+\cos\frac{p}{\omega}2\pi,$$

$$b=1+2\cos\frac{\nu}{\omega}2\pi\cos\frac{p}{\omega}2\pi-\mu^2\left[\left(\frac{\nu}{p}m^2+\frac{p}{\nu}n^2\right)\sin\frac{\nu}{\omega}2\pi\sin\frac{p}{\omega}2\pi+\right.$$

$$\left.+mn\left(\cos\frac{p}{\omega}2\pi-\cos\frac{\nu}{\omega}2\pi\right)^2-mn\left(\sin^2\frac{\nu}{\omega}2\pi+\sin^2\frac{p}{\omega}2\pi\right)\right], \quad (3.3)$$

где

$$m=\frac{\omega^2(\omega^2-3p^2-\nu^2)}{[\omega^2-(\nu+p)^2][\omega^2-(\nu-p)^2]}, \quad n=\frac{\omega^2(\omega^2-3\nu^2-p^2)}{[\omega^2-(\nu+p)^2][\omega^2-(\nu-p)^2]}. \quad (3.4)$$

Разложения инвариантов $2a$ и $2b$ по восходящим степеням малого параметра μ будут содержать только четные степени μ. Это следует из того обстоятельства, что уравнения (2.2) не меняются при одновременной замене μ через $-\mu$ и t через $t+\frac{\pi}{\omega}$.

Поэтому, если $X(t)$ — интегральная матрица системы (2.2), то $X\left(t+\frac{\pi}{\omega}\right)$ будет интегральной матрицей для уравнений, получаемых из (2.2) заменой μ через $-\mu$.

Отсюда заключаем, что корни характеристического уравнения (3.2) при замене μ на $-\mu$ переходят один в другой, а следовательно, инварианты $2a$ и $2b$ при этой замене не меняются [5].

4. Согласно [4] необходимое и достаточное условие устойчивости нулевого решения системы (2.2) — условие

$$|Re\,\lambda_j(\mu)|<1 \quad (j=1,\ 2,\ 3,\ 4), \quad (4.1)$$

где $\lambda_j(\mu)$ — собственные значения матрицы (3.1).

Из (3.2) находим

$$\lambda_{1,2,3,4}=\frac{u}{2}\pm\sqrt{\frac{u^2}{4}-1}, \quad u=a\pm\sqrt{a^2-2b+2}. \quad (4.2)$$

Получаем, соответственно, с точностью до величины порядка малости μ^2

$$\lambda_{1,2}=\cos\frac{p}{\omega}2\pi\pm i\sin\frac{p}{\omega}2\pi,$$

$$\lambda_{3,4}=\cos\frac{\nu}{\omega}2\pi\pm i\sin\frac{\nu}{\omega}2\pi. \quad (4.3)$$

Нарушение устойчивости решения будет наступать, если вещественная часть хотя бы одного из собственных чисел матрицы $W(\mu)$ по абсолютной величине будет равна единице. Указанное обстоятельство может иметь место при соотношениях между частотой ω циркуляции корабля и параметрами гирокомпаса p и ν вида

$$\frac{p}{\omega}=\frac{k}{2} \quad (k=1,\ 2,\ldots) \quad (4.4)$$

или

$$\frac{\nu}{\omega}=\frac{k}{2} \quad (k=1,\ 2,\ldots). \quad (4.5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Н. Кошляков, К теории гирокомпасов, ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
2. Я. Н. Ройтенберг, Гироскопы, «Наука», М., 1966.
3. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
4. Н. П. Еругин, Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами, Изд-во АН БССР, Минск, 1963.
5. А. М. Ляпунов, Об устойчивости движения в задаче о трех телах, Собр. соч., т. 1, Изд-во АН СССР, М., 1954.

Поступила 27.VI 1968 г.
Институт математики АН УССР,
Институт гидромеханики АН УССР