УДК 9.732:9.79

Об одном критерии оптимальности при выделении слабого аддитивного сигнала на фоне случайного шума произвольной природы

Н. Г. Гаткин, Ю. Л. Далецкий

1. Рассматривается вопрос о различении случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t) = \xi(t) + s(t)$, заданных на интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$. Предполагается, что для процесса $\xi(t)$ существуют корреляционные ядра

$$m_k(t_1, \ldots, t_k) = M\{\xi(t_1) \ldots \xi(t_k)\} \quad (k = 1, \ldots, 2n).$$

Нас интересует в основном случай, когда $s(t)$ — известная неслучайная функция. Однако дальнейшие рассуждения имеют смысл и в том случае, когда $s(t)$ — случайный процесс. При этом требуется существование смешанных моментов

$$c_k(t_1, \ldots, t_k) = M\{s(t_1)\xi(t_2) \ldots \xi(t_k)\} \quad (k = 1, \ldots, n).$$

Мы увидим ниже, что рассмотрение случайного сигнала $s(t)$ оказывается полезным и в задаче об обнаружении детерминированного сигнала.

Для различения обычно используется приемник — функционал $f[x(\cdot)]$ на множестве X функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, содержащем почти все реализации как процесса $\xi(t)$, так и процесса $\eta(t)$. Речь идет об отыскании наилучшего с той или иной точки зрения приемника. Хорошо известный критерий отношения правдоподобия приводит к функционалу $f[x(\cdot)] = \dfrac{d\mu_\eta}{d\mu_\xi}[x(\cdot)]$ — производной Радона — Никодима мер μ_η и μ_ξ, соответствующих случайным процессам $\eta(t)$, $\xi(t)$ [1, 2].

Этот функционал трудно поддается вычислению, если процессы не гауссовы, и, во всяком случае, требует для своего вычисления полного знания распределений вероятностей μ_ξ и μ_η.

Предполагается использовать в качестве критерия оценки функционала $f[x(\cdot)]$ нормированное среднее значение его производной по направлению*, определяемому сигналом $s(t)$, точнее величину

$$K(f) = \left.\frac{\dfrac{d}{d\alpha} Mf[\xi(\cdot) + \alpha s(\cdot)]}{\sqrt{Df[\xi(\cdot)]}}\right|_{\alpha=0}. \tag{1}$$

* Подобный критерий уже был применен нами ранее в одной задаче, связанной с гауссовыми процессами [3].

Этот критерий назовем критерием производной по направлению. С точки зрения этого критерия наилучшим в некотором классе F функционалов считается функционал f_0, на котором $K(f)$ достигает максимума

$$K(f_0) \geqslant K(f) \quad (f \in F). \tag{2}$$

Образно выражаясь, можно сказать, что речь идет о выделении на фоне шума $\xi(t)$ сигнала формы $s(t)$ с бесконечно малой амплитудой.

Ниже рассмотрим классы F_n функционалов, представимых в виде интегральных полиномов

$$f(x(\cdot)) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \ldots \int_0^T \varphi_k(t_1, \ldots, t_k)\, x(t_1)\, x(t_2) \ldots x(t_k)\, dt, \ldots, dt_k\,, \tag{3}$$

определяемых ядрами $\varphi_k(t_1, \ldots, t_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

2. Рассмотрим прежде всего вопрос о выделении детерминированного сигнала $s(t)$ на фоне гауссова шума $\xi(t)$.

Любой обладающий конечным вторым моментом функционал $f[\xi(\cdot)]$ можно, как известно, разложить в ряд Фурье — Винера

$$f(\xi) = \sum_{n} \sum_{(k_1, \ldots, k_n)} c_{k_1, \ldots, k_n} \Phi_{k_1, \ldots, k_n}[\xi], \tag{4}$$

где

$$\Phi_{k_1, \ldots, k_n}[\xi] = H_{k_1}(\xi_1) \ldots H_{k_n}(\xi_n),$$

H_k — полином Эрмита порядка k, $\xi_j = \int_0^T \xi(t)\, \varphi_j(t)\, dt$, а $\varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ — набор собственных функций корреляционного ядра $R(t, \tau)$ случайного процесса $\xi(t)$.

Из свойств полиномов Эрмита нетрудно вывести, что для любого, отличного от линейного, функционала $\Phi_{k_1 \ldots k_n}$ имеет место соотношение

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} M \Phi_{k_1, \ldots, k_n}[\xi + \alpha s]\big|_{\alpha=0} = 0,$$

которое показывает, что в числитель выражения (1) нелинейные члены ряда (4) не дают вклада. Поскольку

$$Df(\xi) = \sum_{c_{1 \ldots n}} \sum_{(k_1 \ldots k_n)} |c_{k_1 \ldots k_n}|^2,$$

то в знаменатель они вносят неотрицательные вклады и, следовательно, максимальное значение (1) может достигаться лишь тогда, когда эти вклады являются нулевыми.

Таким образом, оптимальный с точки зрения критерия производной по направлению приемник, выделяющий детерминированный сигнал на фоне гауссова шума, является линейным. Ниже мы увидим, что он совпадает с приемником, получающимся на основе критерия отношения правдоподобия.

3. Вернемся к общей ситуации, когда $\xi(t)$ и $s(t)$ — произвольные случайные процессы, обладающие указанными в п. 1 моментами. В этом случае неясно существование наилучшего функционала, на котором $K(f)$ достигает абсолютного максимума. Однако можно искать максимум в тех или иных классах функционалов.

Найдем прежде всего оптимальный с точки зрения критерия (2) линейный фильтр

$$f[\xi] = \int_0^T \varphi(t)\, \xi(t)\, dt. \tag{5}$$

Простое вычисление показывает, что в этом случае

$$K(f)=\frac{\int\limits_0^T \varphi(t)\,Ms(t)\,dt}{\left|\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mu_{1,1}(t,\tau)\,\varphi(t)\,\varphi(\tau)\,dt d\tau\right|^{1/2}}, \tag{6}$$

где $\mu_{1,1}(t,\tau)=m_2(t,\tau)-m_1(t)\,m_1(\tau)$ — корреляционное ядро процесса $\xi(t)$.

Для исследования полученного выражения введем в рассмотрение гильбертово пространство H функций $\varphi(t)$, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|=\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mu_{1,1}(t,\tau)\,\varphi(t)\,\varphi(\tau)\,dt d\tau\right\}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Скалярное произведение в этом пространстве дается формулой

$$(\varphi,\psi)=\int\limits_0^T\int\limits_0^T \mu_{1,1}(t,\tau)\,\varphi(t)\,\varphi(\tau)\,dt d\tau<\infty.$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int\limits_0^T \mu_{1,1}(t,\tau)\,b(\tau)\,d\tau=Ms(t). \tag{7}$$

Если оно имеет решение $b(t)\in H$, то выражение (6) можно записать в виде

$$K(f)=\frac{(\varphi,b)}{\|\varphi\|}.$$

Это выражение, как следует из неравенства Коши — Буняковского, достигает максимума $K_{\max}(f)=\|b\|$, если $\varphi(t)=\mathrm{const}\,b(t)$.

Таким образом, наилучшим с рассматриваемой точки зрения линейным фильтром является фильтр, переходная функция $b(t)$ которого определяется из интегрального уравнения (7).

В случае детерминированного сигнала и гауссова шума, это уравнение совпадает с хорошо известным уравнением [2, 4], определяющим структуру фильтра, оптимального с точки зрения критерия отношения правдоподобия. Это показывает, что для задачи о выделении детерминированного сигнала на фоне гауссова шума оба критерия приводят к одному и тому же результату.

4. Найдем теперь условия, которым удовлетворяют ядра $\varphi_1(t_1),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_n)$, определяющие функционал, наилучший в классе F_n. Не ограничивая общности, можно считать эти ядра симметричными относительно своих аргументов. Простые вычисления показывают, что для функционала (3)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}Mf(\xi+\alpha s)\big|_{\alpha=0}=\sum_{k=1}^{n}k\int\limits_0^T\cdots\int\limits_0^T \varphi_k(t_1,\ldots,t_k)\,c_k(t_1,\ldots,t_k)\,dt_1\ldots dt_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_0^T\cdots\int\limits_0^T \varphi_k(t_1,\ldots,t_k)\,\widetilde{c}_k(t_1,\ldots,t_k)\,dt_1\ldots dt_k, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{c}_k(t_1,\ldots,t_k)=c_k(t_1,t_2,\ldots,t_k)+c_k(t_2,t_1,\ldots,t_k)+\ldots+c_k(t_2,\ldots,t_k,t_1)$$

— функция, получающаяся из $c_k(t_1,\ldots,t_n)$ путем симметризации.

Далее

$$Df(\xi)=\sum_{k_1,k_2=1}^{n}\int_0^T\cdots\int_0^T \mu_{k_1,k_2}(t_1,\ldots,t_{k_1};\ \tau_1,\ldots,\tau_{k_2})\,\varphi_{k_1}(t_1,\ldots,t_{k_1})\times$$
$$\times\varphi_{k_2}(\tau_1,\ldots,\tau_{k_2})\,dt_1\ldots dt_{k_1}d\tau_1\ldots d\tau_{k_2}, \tag{9}$$

где

$$\mu_{k_1,k_2}(t_1,\ldots,t_k;\ \tau_{k_1},\ldots,\tau_{k_2})=m_{k_1+k_2}(t_1,\ldots,t_{k_1};\ \tau_{k_1},\ldots,\tau_{k_2})-$$
$$-m_{k_1}(t_1,\ldots,t_{k_1})\,m_{k_2}(\tau_1,\ldots,\tau_{k_2})$$

— корреляция пары произведений $\xi(t_1)\ldots\xi(t_{k_1})$, $\xi(\tau_1)\ldots\xi(\tau_{k_2})$.

Дальнейшее исследование аналогично приведенному выше.

Рассмотрим гильбертово пространство H_n, состоящее из вектор-функций

$$\Phi=(\varphi_1(t_1),\varphi_2(t_1,t_2),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_n))\ \ (t_1,\ldots,t_n\in[0,T])$$

с симметричными компонентами $\varphi_k(t_1,\ldots,t_k)$, со скалярным произведением

$$(\Phi,\Psi)_n=\sum_{s=1}^{n}\int_0^T\cdots\int_0^T \varphi_s(t_1,\ldots,t_s)\,\psi_s(t_1,\ldots,t_s)\,dt_1\ldots dt_s.$$

Введем в этом пространстве интегральный оператор A, определяемый соотношением

$$A\Phi=\Psi,$$

где

$$\psi_j(t_1,\ldots,t_j)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^T\cdots\int_0^T \mu_{js}(t_1,\ldots,t_j;\ \tau_1,\ldots,\tau_s)\,\varphi_s(\tau_1,\ldots,\tau_s)\,d\tau_1\ \ldots d\tau_s. \tag{10}$$

При этих обозначениях формулы (8) и (9) принимают вид

$$Df(\xi)=(A\Phi,\Phi)_n \tag{11}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}Mf(\xi+\alpha s)\,|_{\alpha=0}=(\Phi,\widetilde{C})_n, \tag{12}$$

где

$$\widetilde{C}=(\widetilde{c}_1(t_1),\ \ \widetilde{c}_2(t_1,t_2),\ldots,\widetilde{c}_n(t_1,\ldots,t_n)).$$

Таким образом, выражение (2) для функционала (3) можно записать в виде

$$K(f)=\frac{(\Phi,\widetilde{C})_n}{\sqrt{(A\Phi,\Phi)_n}}\ . \tag{13}$$

Предположим теперь, что элемент $\widetilde{C}$ принадлежит к области значений оператора A, т. е. существует решение $\Phi_0\in H_n$ уравнения

$$A\Phi_0=\widetilde{C}. \tag{14}$$

Оператор A, как следует из (1), положительно определен, а потому справедливо неравенство Коши — Буняковского

$$|(A\Phi_0,\Phi)_n|^2\leqslant(A\Phi,\Phi)_n\,(A\Phi_0,\Phi_0)_n,$$

показывающее, что выражение (13) достигает максимума при

$$\Phi=\mathrm{const}\,\Phi_0,$$

когда

$$K_{\max}(f)=\sqrt{(A\Phi_0,\Phi_0)_n}.$$

Таким образом, ядра $\varphi_k^{(0)}(t_1, \ldots, t_k)$ оптимального в классе F_n фильтра определяются уравнением (14), эквивалентным системе интегральных уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} \int_0^T \ldots \int_0^T \mu_{js}(t_1, \ldots, t_j; \tau_1, \ldots, \tau_s)\, \varphi_s^{(0)}(\tau_1, \ldots, \tau_s)\, d\tau_1 \ldots d\tau_s = \\ = \widetilde{c}_j(t_1, \ldots, t_j) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Отметим, что эта система по форме подобна системе, полученной в работе [5] при исследовании методом среднеквадратичной аппроксимации задачи о фильтрации стационарного случайного сигнала из стационарного шума.

В случае детерминированного сигнала правые части уравнений (15) имеют вид

$$\widetilde{c}_j(t_1, \ldots, t_j) = s(t_1)\, m_{j-1}(t_2, \ldots, t_j) + s(t_2)\, m_{j-1}(t_1, t_3, \ldots, t_j) + \ldots \\ \ldots + s(t_j)\, m_{j-1}(t_1, \ldots, t_{j-1}).$$

Аналогичный вид с заменой $s(t)$ на $Ms(t)$ имеют они при случайном независимом от шума сигнале. Это показывает, что в случае, когда сигнал не зависит от шума, оптимальный с точки зрения критерия (2) в классе F_n приемник зависит от среднего значения $Ms(t)$.

В частности, по отношению к сигналам с нулевым средним $Ms(t) = 0$ критерий (2) ведет себя так же, как по отношению к нулевому сигналу $s(t) \equiv 0$, т. е. приводит к нулевому фильтру. Если же сигнал коррелирован с шумом, такого вырождения не происходит. Мы увидим сейчас, что этот случай представляет интерес.

5. Обсудим вопрос о преобразовании выражения $K(f)$ при некоторых преобразованиях случайных процессов $\xi(t)$ и $s(t)$.

Пусть

$$y(\cdot) = T[x(\cdot)] \tag{16}$$

— непрерывное и дифференцируемое обратимое преобразование в каком-нибудь функциональном пространстве, содержащем множество реализаций X.

Напомним (см. [6]), что производной $T'_{x(\cdot)}$ этого преобразования называется линейный оператор, удовлетворяющий соотношению

$$T[x(\cdot) + \delta x(\cdot)] - T[x(\cdot)] = T'_{x(\cdot)}\delta x(\cdot) + o(\delta x(\cdot)).$$

Из правила дифференцирования сложной функции следует формула

$$\frac{d}{d\alpha} f[T(x(\cdot) + \alpha s(\cdot))]_{\alpha=0} = f'_{y(\cdot)}[T'_{x(\cdot)}s(\cdot)]_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} f[y(\cdot) + \alpha T'_{x(\cdot)}s(\cdot)]|_{\alpha=0}.$$

Эта формула показывает, что если $g(x(\cdot))$ — оптимальный с точки зрения критерия (2) приемник по отношению к сигналу $s(t)$, то приемник

$$f[y(\cdot)] = g[T^{-1}(y(\cdot))] \tag{17}$$

является оптимальным по отношению к линейным образом преобразованному сигналу

$$\sigma(\cdot) = T'_{x(\cdot)}s(\cdot). \tag{18}$$

Отметим некоторые особенности этого преобразования. Если преобразование T-линейно, то $T'_{x(\cdot)} = T$ и, в частности, не зависит от $x(\cdot)$. Для нелинейных же преобразований производная $T'_{x(\cdot)}$ уже не является постоянной и, следовательно, преобразование сигналов (18) является случайным и, к тому же, зависящим от шума.

Кроме того, если $y[x(\cdot)]$ оптимален в некотором классе F функционалов, то функционал (17) является наилучшим, вообще говоря, в некотором другом классе функционалов, получающихся из F при помощи преобразования (16).

Преобразование типа (16) в некоторых случаях может приводить к упрощению системы уравнений (15). Пусть, например, процесс $\xi(t)$ может быть получен при помощи нелинейной фильтрации белого шума $\xi_0(t)$ $(M\xi_0(t)\,\xi_0(\tau) = N\delta(t-\tau))$:

$$\xi(t) = T[\xi_0(t)],$$

причем оператор T обладает описанными выше свойствами. Преобразуем сигнал $s(t)$ в соответствии с формулой (18):

$$s_0(t) = [T'_{\xi_0(\cdot)}]^{-1} s(\cdot).$$

В соответствии с формулой (17) задача сводится к определению оптимального в некотором классе приемника, обнаруживающего на фоне белого шума случайный сигнал $s_0(t)$, вообще говоря, зависящий от этого шума. Отметим, что для белого шума система (15) резко упрощается. Для квадратичных фильтров она имеет тривиальный вид:

$$N\varphi_1(t_1) = \widetilde{c}_1(t_1) = Ms_0(t_1),$$

$$2N^2\varphi_2(t_1, t_2) = \widetilde{c}_2(t_1, t_2) = M[s_0(t_1)\,\xi_0(t_2) + s_0(t_2)\,\xi_0(t_1)].$$

6. Рассмотрим один случай, когда система (15) заведомо разрешима. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ представим в виде

$$\xi(t) = \xi_0(t) + \xi_1(t),$$

где $\xi_0(t)$ — белый шум, независимый как от процесса $\xi_1(t)$, так и от сигнала $s(t)$. Для простоты изложения ограничимся простейшим случаем, когда $n = 2$ и $M\xi_1(t) = 0$. Несложные подсчеты показывают, что в этом случае система (15) принимает вид

$$N\varphi_1(t_1) + \int_0^T \mu_{11}^{(1)}(t_1, \tau_1)\,\varphi_1(\tau_1)\,d\tau_1 + \int_0^T\int_0^T \mu_{1,2}^{(1)}(t;\ \tau_1, \tau_2)\,\varphi_2(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 = Ms(t_1),$$

$$\int_0^T \mu_{2,1}^{(1)}(t_1, t_2, \tau_1)\,\varphi_1(\tau_1)\,d\tau_1 + 2N^2\varphi_2(t_1, t_2) +$$

$$+ 2N\int_0^T [m_2^{(1)}(t_1, \tau)\,\varphi_2(\tau, t_2) + m_2^{(1)}(t_2, \tau)\,\varphi_2(\tau, t_1)]\,d\tau +$$

$$+ \int_0^T\int_0^T \mu_{2,2}^{(1)}(t_1, t_2;\ \tau_1, \tau_2)\,\varphi_2(\tau_1, \tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 = M[s(t_1)\,\xi_1(t_2) + s(t_2)\,\xi_1(t_1)], \quad (19)$$

где величины $m_k^{(1)}, \mu_{jk}^{(1)}$ относятся к процессу $\xi_1(t)$. Оператор, стоящий в левой части этой системы, может быть разложен на сумму оператора, определяемого диагональной матрицей $\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 2N^2 \end{pmatrix}$, и положительно определенного интегрального оператора.

Такая сумма всегда обратима в соответствующем гильбертовом пространстве. В случае, когда N достаточно велико по сравнению с рассматриваемыми моментами процесса $\xi_1(t)$, решение системы (19) может быть обычным образом разложено в ряд по степеням $\frac{1}{N}$ (ряд Неймана).

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Гренандер, Случайные процессы и статистические выводы, ИЛ, М., 1961.
2. К. Хелстром, Статистическая теория обнаружения сигналов, ИЛ, М., 1963.
3. Н. Ф. Воллернер, Н. Г. Гаткин, Ю. Л. Далецкий, В. В. Ярошенко, Многоканальное измерение флюктуационного напряжения, Радиотехника т. 18, № 6, 1963.
4. Н. Г. Гаткин, Ю. Л. Далецкий, Оптимальное обнаружение точно известного сигнала на фоне нестационарного гауссова шума, Радиотехника и электроника, т. 8, 1965.
5. Дж. Кацнельсон, Л. Гулд, Конструирование нелинейных фильтров и систем управления (Русс. пер.: Г.Ван-Трис, Синтез оптимальных нелинейных систем управления, «Мир», М., 1964).
6. Ж. Дьедонне, Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.

Поступила 4.V 1970 г.

Киевский политехнический институт