УДК 517.54

Факторизация матриц-функций частного вида

В. Н. Гордиенко

Рассмотрим матрицы-функции, заданные на единичной окружности. В случае, если функции заданы на другой простой замкнутой кривой, нужно внести соответствующие изменения в приводимое ниже определение стандартной факторизации. Другие рассуждения изменений не требуют.

Определение 1. Левой стандартной факторизацией матрицы-функции $A(t)$ назовем представление матрицы-функции $A(t)$ в виде произведения

$$A(t) = F_{+}(t) D(t) F_{-}(t),$$

где $F_{+}(t)$ — краевое значение матрицы-функции $F_{+}(z)$, аналитической внутри единичного круга, причем $\det F_{+}(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1$; $F_{-}(t)$ — краевое значение матрицы-функции $F_{-}(z)$, аналитической вне единичного круга, причем $\det F_{-}(z) \neq 0$ при $|z| \geqslant 1$; диагональная матрица $D(t)$ имеет вид

$$D(t) = (\delta_{ji} t^{\varkappa_j})_1^n,$$

где $\varkappa_j$ — некоторые целые числа, называемые левыми частными индексами матрицы-функции $A(t)$. При этом в стандартной факторизации

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n.$$

Аналогично определяется правая стандартная факторизация матрицы-функции $A(t)$ и ее правые частные индексы.

Условия, которым должна удовлетворять матрица-функция, допускающая стандартную факторизацию, установлены в работах [1 и 2]. В частности, если матрица-функция такова, что $\det A(t) \neq 0$ при $|t| = 1$ и все ее элементы удовлетворяют условию H (условие Гельдера) с произвольным показателем $0 < \alpha \leqslant 1$ (в таком случае считаем, что матрица-функция удовлетворяет условию H), то такие матрицы-функции, как можно установить из работы [1], допускают стандартную факторизацию. Но само построение стандартной факторизации в общем случае требует решения некоторой системы сингулярных интегральных уравнений. Эффективное построение стандартной факторизации проведено только для матриц-функций некоторых частных видов. В работе [1] дано превращение матрицы-функции, являющейся произведением матриц, мероморфно продолжимых соответственно в D^{+} и D^{-}, из которого можно получить стандартную факторизацию выделением диагонального множителя. В работе [2] построена стандартная факторизация треугольных матриц-функций.

Мы построим стандартную факторизацию некоторых теплицевых матриц-функций.

Определение 2. Теплицевые матрицы-функции вида

$$A(t)=\begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t)\dots a_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(t) & a_0(t)\dots a_{n-2}(t) \\ \dots & \dots \\ a_1(t) & a_2(t)\dots a_0(t) \end{pmatrix}$$

назовем T-циклическими матрицами-функциями.

Теорема 1. *Если T-циклическая матрица-функция удовлетворяет условию H, то она может быть представлена в виде произведения*

$$A(t)=F_+(t)F_-(t), \tag{1}$$

где $F_+(t)$ и $F_-(t)$ — T-циклические матрицы-функции, служащие краевыми значениями матриц-функций $F_+(z)$ и $F_-(z)$, аналитических соответственно внутри и вне единичной окружности (за исключением бесконечно удаленной точки, где элементы матрицы-функции $F_-(z)$ могут иметь полюсы).

Доказательство. Выполнив умножение в правой части равенства (1), непосредственной проверкой убеждаемся, что произведение двух T-циклических матриц-функций есть T-циклическая матрица-функция. При этом

$$a_0(t)=f_0^+(t)f_0^-(t)+\sum_{j=1}^{n-1}f_j^+(t)f_{n-j}^-(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_r(t)=\sum_{j=0}^{r}f_j^+(t)f_{r-j}^-(t)+\sum_{j=r+1}^{n-1}f_j^+(f)f_{n+r-j}^-(t), \tag{2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{n-1}(t)=\sum_{j=0}^{n-1}f_j^+(t)f_{n-1-j}^-(t).$$

Введем обозначения

$$\sigma_k(t)=\sum_{s=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}ks}a_s(t), \tag{3}$$

$$\sigma_k^+(t)=\sum_{s=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}ks}f_s^+(t), \tag{3'}$$

$$\sigma_k^-(t)=\sum_{s=0}^{n-1}e^{i\frac{2\pi}{n}ks}f_s^-(t). \tag{3''}$$

Тогда, как нетрудно проверить,

$$\sigma_k(t)=\sigma_k^+(t)\sigma_k^-(t)\quad(k=0,1,\dots,n-1).$$

Таким образом, решив n скалярных задач Римана (при этом берем построенное в работе [3] каноническое решение, которое в нашем случае всегда существует), получим две системы (3′), (3″) n линейных уравнений для определения n пар неизвестных функций $f_j^+(t)$, $f_j^-(t)$, $j=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Коэффициенты при неизвестных в обеих системах образуют один и тот же определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots & 1 \ldots & 1 \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}r} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}k} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}kr} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}k(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)r} \ldots & e^{i\frac{2\pi}{n}(n-1)^2} \end{vmatrix}.$$

Это определитель Вандермонда. Он отличен от нуля. Следовательно, при любом наборе $\sigma_k(t)$ обе системы (3′), (3″) имеют решение.

Теорема 1 доказана.

Для того чтобы из равенства (1) можно было получить стандартную факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\det F_+(t) \neq 0$; $\det F_-(t) \neq 0$ при $|t| = 1$. В этом случае, приведя матрицы-функции $F_+(z)$ и $F_-(z)$ к нормальной форме в нулях их определителей и в бесконечно удаленной точке, как описано в работе [1], и вынеся диагональный множитель, получим левую стандартную факторизацию матрицы-функции $A(t)$.

Следовательно, для того чтобы матрица-функция $A(t)$, удовлетворяющая условию теоремы 1, допускала стандартную факторизацию, необходимо и достаточно, чтобы $\det A(t) \neq 0$ при $|t| = 1$. Стандартная факторизация таких матриц-функций может быть построена эффективно.

Существует другой способ построения стандартной факторизации T-циклической матрицы-функции $A(t)$.

Рассмотрим подробнее матрицу коэффициентов систем (3′), (3″)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & e^{i2\pi/n} & \ldots & e^{ir2\pi/n} & \ldots & e^{i(n-1)2\pi/n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{ik2\pi/n} & \ldots & e^{ikr2\pi/n} & \ldots & e^{ik(n-1)2\pi/n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & e^{i(n-1)2\pi/n} & \ldots & e^{i(n-1)r2\pi/n} & \ldots & e^{i(n-1)^2 2\pi/n} \end{pmatrix}.$$

Лемма. *Матрица $\sigma/\sqrt{n}$ — унитарная матрица.*

Для доказательства рассмотрим матрицу

$$S = \sigma\sigma^* = (s_{kr})_1^n = \left(\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)m}\right)_1^n.$$

Ее диагональный элемент $s_{rr} = \sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}m\cdot 0} = n$. Недиагональные элементы ее имеют вид

$$s_{kr} = \sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)m}.$$

Возможны три случая:

1°) $k - r$ взаимно просто с n. Тогда $e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)}$ — первообразный корень

n-й степени из единицы. Все числа $e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)m}$ различны и представляют собой все корни n-й степени из единицы. Тогда $s_{kr}=0$ как сумма всех корней n-й степени из единицы;

2°) $n \vdots (k-r)$. В этом случае $e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)} = e^{i\frac{2\pi}{n/(k-r)}}$ — первообразный корень из единицы степени $n/(k-r)$. Каждое значение в сумме s_{kr} при этом повторяется ровно $k-r$ раз. Таким образом, s_{kr} — сумма всех корней из единицы степени $n/(k-r)$, повторенная $(k-r)$ раз. Следовательно, опять $s_{kr}=0$;

3°) пусть наибольший делитель чисел n и $k-r$, равный d, отличен от единицы и от $k-r$. Тогда s_{kr} можно представить в виде

$$s_{kr}=\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n}(k-r)m}=\sum_{m=0}^{n-1} e^{i\frac{2\pi}{n/d}\frac{k-r}{d}m}.$$

Поскольку числа n/d и $(k-r)/d$ взаимно просты, то $e^{i\frac{2\pi}{n/d}\frac{k-r}{d}}$ — первообразный корень из единицы степени n/d. При этом каждое значение корня повторяется в сумме s_{kr} ровно d раз. Следовательно, s_{kr} — сумма всех корней из единицы степени n/d, повторенная d раз. Итак, и в этом случае $s_{kr}=0$.

Таким образом, S — диагональная матрица: $S=\sigma\sigma^*=nE$, где E — единичная матрица n-го порядка. Отсюда

$$(\sigma/\sqrt{n})(\sigma/\sqrt{n})^*=E,$$

т. е. $\sigma/\sqrt{n}=U$ — унитарная матрица.

Лемма доказана.

Теорема 2. *T-циклическая матрица-функция $A(t)$ унитарно эквивалентна диагональной матрице-функции $D_\sigma(t)$*

$$D_\sigma(t)=\begin{pmatrix} \sigma_0(t) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1(t) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$A(t)=UD_\sigma(t)U^{-1}, \tag{4}$$

где $U=\sigma/\sqrt{n}$ — постоянная унитарная матрица.

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$\sigma^*A(t)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-i\frac{2\pi}{n}} & \dots & e^{-i(n-1)\frac{2\pi}{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-i(n-1)\frac{2\pi}{n}} & \dots & e^{-i(n-1)^2\frac{2\pi}{n}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(t) & a_0(t) & \dots & a_{n-2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_0(t) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{i(n-1)2\pi/n} & \dots & e^{i2\pi/n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{i2\pi/n} & \dots & e^{i(n-1)2\pi/n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \\ a_{n-1}(t) & a_0(t) & \dots & a_{n-2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_0(t) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_0(t) & \sigma_0(t) & \dots & \sigma_0(t)\\ \sigma_1(t) & e^{i(n-1)2\pi/n}\sigma_1(t) & \dots & e^{i2\pi/n}\sigma_1(t)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \sigma_{n-1}(t) & e^{2\pi/n}\sigma_{n-1}(t) & \dots & e^{i(n-1)2\pi/n}\sigma_{n-1}(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_0(t) & 0 & \dots & 0\\ 0 & \sigma_1(t) & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n-1}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}} & \dots & e^{i\frac{2\pi}{n}}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & e^{i\frac{2\pi}{n}} & \dots & e^{i(n-1)\frac{2\pi}{n}}\end{pmatrix}=D_\sigma(t)\,\sigma^*.$$

Следовательно,

$$\sigma^*A(t)=D_\sigma(t)\,\sigma^*,$$

откуда

$$(\sigma^*/\sqrt{n})\,A(t)=D_\sigma(t)\,(\sigma^*/\sqrt{n}).$$

Но $(\sigma^*/\sqrt{n})=(\sigma/\sqrt{n})^*=U^*=U^{-1}$ — постоянная унитарная матрица. Итак,

$$U^{-1}A(t)=D_\sigma(t)\,U^{-1}$$

или

$$A(t)=UD_\sigma(t)\,U^{-1}.$$

Теорема 2 доказана.

Итак, все T-циклические матрицы приводятся к диагональному виду одним и тем же постоянным унитарным преобразованием, т. е. все они являются коммутативными матрицами простой структуры, как следует из работы [4].

Следствие 1. *Если $A(t)$ — T-циклическая матрица-функция, удовлетворяющая условию H, и* $\det A(t)\neq 0$, *то $A(t)$ допускает стандартную факторизацию как левую, так и правую. При этом частные индексы матрицы-функции совпадают с индексами функций $\sigma_s(t)$ (с точностью до порядка).*

Доказательство. Решив n скалярных задач Римана

$$\sigma_s(t)=t^{\varkappa_j}g_j^+(t)\,g_s^-(t),$$

где $\operatorname{ind} g_s^+(t)=\operatorname{ind} g_s^-(t)=0$, и записав $D_\sigma(t)$ в виде произведения

$$D_\sigma(t)=G_+(t)\,D(t)\,G_-(t)$$

(или $D_\sigma(t)=G_-(t)\,D(t)\,G_+(t)$ для правой факторизации), по формуле (4) имеем

$$A(t)=UG_+(t)\,D(t)\,G_-(t)\,U^{-1}=F_+(t)\,D(t)\,F_-(t)$$

— левая факторизация (которая, вообще говоря, может отличаться от стандартной порядком рядов), где $F_+(t)=UG_+(t)$; $F_-(t)=G_-U^{-1}$ (аналогично $A(t)=UG_-(t)\,D(t)\,G_+(t)\,U^{-1}=F_{1-}(t)\,D(t)F_{1+}(t)$— правая факторизация).

Следствие 2. *Если $A(t)$ — T-циклическая матрица-функция, то*

$$\det A(t)=\prod_{s=0}^{n-1}\sigma_s(t).$$

Следствие 3. *Если* $\det A(t)=0$, *то ее ранг (т. е. число линейно независимых строк) равен числу отличных от нуля сумм $\sigma_s(t)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что ранг матрицы $D_\sigma(t)$ равен указанному числу, а эквивалентные матрицы имеют одинаковый ранг.

Следствие 4. *Если $A(t)$ — T-циклическая вырожденная матрица-функция ранга r, удовлетворяющая условию H, то матрица-функция $A(t)$ допускает «обобщенную» факторизацию вида*

$$A(t) = F_+(t)\, D_r(t)\, F_-(t),$$

где

$$D_r(t) = \begin{pmatrix} t^{\varkappa_1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t^{\varkappa_2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & t^{\varkappa_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица-функция $F_+(t)$ ($F_-(t)$) имеет $n - r$ произвольных строк (столбцов). Произвольные строки (столбцы) выбираются из функций, аналитических внутри (вне) единичного круга, так, чтобы $\det F_+(z) \neq 0$ *при* $|z| \leqslant 1$ ($\det F_-(z) \neq 0$ при $|z| \geqslant 1$).

Следствие 5. *Невырожденные T-циклические матрицы и матрицы-функции образуют коммутативную группу.*

Доказательство непосредственно вытекает из равенства (4) с учетом того, что диагональные невырожденные матрицы образуют коммутативную группу.

Хотя теплицевы матрицы (и матрицы-функции) в общем случае группы не образуют (даже полугруппы), но некоторые частные их виды (невырожденные) образуют группы, причем коммутативные. Кроме Т-циклических матриц такие группы образуют также теплицевы треугольные матрицы (верхние или нижние). Для таких матриц-функций справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если $A(t)$ — теплицева треугольная матрица-функция и* $\det A(t) \neq 0$ *при* $|t| = 1$, *то $A(t)$ допускает представление в виде произведения*

$$A(t) = G_+(t)\, G_-(t), \tag{5}$$

где матрицы-функции $G_+(t)$, $G_-(t)$ такого же вида, что и $A(t)$, причем $G_+(t)$ — краевое значение матрицы-функции, аналитической внутри единичного круга; $G_-(t)$ — краевое значение матрицы-функции, аналитической вне единичного круга, кроме, возможно, бесконечно удаленной точки. Матрицы $G_+(t)$ и $G_-(t)$ коммутируют.

Доказательство. Распишем формулу (5) в предположении, что $A(t)$ — верхняя треугольная матрица-функция:

$$\begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_n(t) \\ 0 & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1^+(t) & g_2^+(t) & \dots & g_n^+(t) \\ 0 & g_1^+(t) & \dots & g_{n-1}^+(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g_1^+(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^-(t) & g_2^-(t) & \dots & g_n^-(t) \\ 0 & g_1^-(t) & \dots & g_{n-1}^-(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & g_1^-(t) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Выполнив умножение в правой части равенства (6), непосредственной проверкой убеждаемся, что произведение двух верхних треугольных теплицевых матриц-функций является матрицей-функцией того же вида. При этом

$$a_1(t) = g_1^+(t)\, g_1^-(t),$$

$$a_2(t) = g_1^+(t)\, g_2^-(t) + g_2^+(t)\, g_1^-(t),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_j(t) = \sum_{r=1}^{j} g_r^+(t)\, g_{j+1-r}^-(t), \tag{7}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n(t) = \sum_{r=1}^{n} g_r^+(t)\, g_{n+1-r}^-(t).$$

Поскольку функции $g_j^+(t)$ и $g_j^-(t)$ входят в каждое уравнение системы (7) симметрично, то матрицы-функции $G_+(t)$ и $G_-(t)$ коммутируют.

Решая верхнее уравнение системы (7) (однородную скалярную задачу Римана), выбираем $g_1^+(t)$, $g_1^-(t)$ так, чтобы $\operatorname{ind} g_1^+(t) = 0$, $\operatorname{ind} g_1^-(t) = \operatorname{ind} a_1(t) = k$, причем порядок функции $g_1^-(z)$ в бесконечно удаленной точке равнялся ее индексу.

Далее решаем

$$a_2(t) = g_1^+(t)\, g_2^-(t) + g_2^+(t)\, g_1^-(t)$$

или

$$[g_1^+(t)]^{-1} a_2(t)\, [g_1^-(t)]^{-1} = g_2^+(t)\, [g_1^+(t)]^{-1} + g_2^-(t)\, [g_1^-(t)]^{-1}.$$

Учитывая, что $g_1^+(t)\, g_1^-(t) = a(t)$, и меняя знак, имеем

$$[g_1^+(t)]^{-1} g_2^+(t) - [-g_1^-(t)]^{-1} g_2^-(t) = [a_1(t)]^{-1} a_2(t),$$

т. е. приходим к скалярной задаче о скачке.

Аналогично находятся остальные элементы матриц-функций $G_+(t)$ и $G_-(t)$ из условий

$$[g_1^+(t)]^{-1} g_j^+(t) - [g_1^-(t)]^{-1} g_j^-(t) = \frac{a_j(t) - \sum\limits_{i=2}^{j-1} g_i^+(t)\, g_{j+1-i}^-(t)}{a_1(t)}. \tag{8}$$

Теорема доказана.

Следствие 6. *Теплицева треугольная невырожденная матрица-функция $A(t)$ допускает левую —*

$$A(t) = F_+(t)\, D(t)\, F_-(t)$$

и правую —

$$A(t) = F_-(t)\, D(t)\, F_+(t)$$

стандартные факторизации. Частные индексы матрицы-функции $A(t)$ равны между собой и равны $k = \operatorname{ind} a_1(t)$.

Доказательство. Из равенства (8) замечаем, что функции $[g_1^-(z)]^{-1} g_j^-(z)$ даются интегралом типа Коши и, следовательно, регулярны в бесконечно удаленной точке, их порядок в этой точке неотрицательный. Отсюда вытекает, что из всех функций $g_j^-(z)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ функция $g_1^-(z)$ имеет в бесконечно удаленной точке наименьший порядок, равный $k = \operatorname{ind} a_1(t)$. А это значит, что порядки всех строк (и столбцов) матрицы-функции $G_-(z)$ в бесконечно удаленной точке равны между собой и равны k, т. е. матрица-функция $G_-(z)$ нормально расположена в бесконечно удаленной точке как относительно строк, так и относительно столбцов. Согласно работе [1], частные индексы в этом случае равны порядкам строк в бесконечно удаленной точке. Итак, частные индексы матрицы-функции $A(t)$ равны между собой и равны $k = \operatorname{ind} a_1(t)$.

Записав матрицу-функцию $G_-(t)$ в виде

$$G_-(t) = D(t)\, F_-(t) = F_-(t)\, D(t),$$

замечаем, что $F_-(t) = t^{-k} G_-(t)$ — также теплицева треугольная матрица-функция. Подставив в выражение (5) вместо $G_-(t)$ его значение и положив $G_+(t) = F_+(t)$. имеем левую стандартную факторизацию матрицы-функции $A(t)$. Учитывая, что $G_+(t)$ и $G_-(t)$ коммутируют, имеем правую стандартную факторизацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов, Краевая задача Римана для системы n пар функций, УМН, т. 7, вып. 4(50), 1952.
2. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, т. 13, вып. 2, 1958.
3. Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, Физматгиз, М., 1958.
4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Физматгиз, М., 1966.

Поступила 19.I 1970 г.,
после переработки — 15.VI 1970 г.

Каменец-Подольский педагогический институт