УДК 539.3

К решению пространственной задачи теории упругости цилиндрически трансверсально-изотропного тела

В. М. Деев, В. П. Мальханов

Для построения теории толстостенных цилиндрических оболочек, выполненных из цилиндрически трансверсально-изотропного материала, необходимо иметь общее решение уравнений равновесия в перемещениях, т. е. уравнений Ляме. Такие решения были получены в работе [1]. Однако эти решения содержат дифференциальные операторы высокого порядка над тремя разрешающими функциями, которые удовлетворяют уравнениям в частных производных 10-, 8- и 4-го порядка соответственно. Так как вопросы понижения порядка дифференциальных операторов в выше упомянутых общих решениях до настоящего времени не рассмотрены, представляется целесообразным получить общие решения пространственной задачи теории упругости цилиндрически трансверсально-изотропной среды, содержащие более низкий порядок (второй для дифференциальных операторов над разрешающими функциями).

Уравнения Ляме для случая цилиндрически трансверсально-изотропной среды имеют вид:

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ D_{11}u_r + D_{12}u_\varphi + D_{13}u_z = 0;\\ &\text{б)}\ D_{21}u_r + D_{22}u_\varphi + D_{23}u_z = 0;\\ &\text{в)}\ D_{31}u_r + D_{32}u_\varphi + D_{33}u_z = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где u_r, u_z, u_φ — составляющие вектора перемещений, а D_{ij} — дифференциальные операторы второго порядка:

$$D_{11} = c_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$D_{12} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{2}(3c_{11} - c_{12})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$D_{21}=\frac{1}{2}(c_{11}+c_{12})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{2}(3c_{11}-c_{12})\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$D_{23}=(c_{13}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z},\quad D_{31}=(c_{13}+c_{44})\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial z}\right),\tag{2}$$

$$D_{22}=\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)+c_{11}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+c_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$D_{13}=(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2}{\partial r\partial z},\quad D_{32}=(c_{13}+c_{44})\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z},$$

$$D_{33}=c_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+c_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Для расщепления системы на независимые уравнения понизим порядок ее на одну единицу, т. е. сведем систему трех дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент вектора перемещений к системе двух дифференциальных уравнений относительно двух разрешающих функций. Для этого представим компоненты вектора перемещений в виде:

$$u_r=L_{12}\Phi_2=\alpha_1\frac{1}{r^2}\Phi_2,$$

$$u_\varphi=L_{22}\Phi_1+L'_{22}\Phi_2=\left(\beta_1\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\beta_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_3\frac{1}{r^2}+\beta_4\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\right.$$

$$\left.+\beta_5\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_1+\left(\beta'_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\beta'_3\frac{1}{r^2}\right)\Phi_2,\tag{3}$$

$$u_z=L_{32}\Phi_1=\gamma\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi}\Phi_1.$$

Подставим (3) в третье уравнение системы (1):

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r\partial z\partial\varphi}[\beta_2(c_{13}+c_{44})-\gamma c_{44}]+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi}[\beta_3(c_{13}+c_{44})+\gamma c_{44}]+\right.$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial z\partial\varphi}[\gamma c_{44}+\beta_1(c_{13}+c_{44})]+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^3\partial z}[\beta_4(c_{13}+c_{44})+\gamma c_{44}]+$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial^4}{\partial z^3\partial\varphi}[\beta_5(c_{13}+c_{44})+c_{33}\gamma]\right\}\Phi_1+\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r\partial z\partial\varphi}[\alpha_1(c_{13}+c_{44})+\beta'_2\times\right.$$

$$\left.\times(c_{13}+c_{44})]+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi}[(c_{13}+c_{44})(\beta'_3-\alpha_1)]\right\}\Phi_2=0.$$

Из тождественного обращения в нуль этого уравнения определяем произвольные постоянные в (3):

$$\beta_1=-c_{44},\quad \beta_2=c_{44}=-\beta_3=-\beta_4,\quad \gamma=c_{13}+c_{44},\quad \beta_5=-c_{33},$$
$$\alpha_1=1=\beta'_3=-\beta'_2,$$

а первое и второе уравнения системы (1) дадут следующую систему уравнений относительно двух разрешающих функций Φ_1 и Φ_2:

$$\left\{\frac{c_{44}(5c_{11}-3c_{12})}{2}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{c_{44}(c_{12}-3c_{11})}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial\varphi^2}+\right.$$

$$+\left[\frac{c_{33}(c_{12}-c_{11})}{2}-c_{44}^2\right]\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial z^2}+\left[c_{44}^2+\frac{c_{33}(c_{12}-c_{11})}{2}\right]\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+[-c_{44}^2-c_{33}c_{11}+(c_{13}+c_{44})^2]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial\varphi^2}-c_{44}c_{33}\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}+\right. \qquad \text{(a)}$$

$$\left.+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\right)+\frac{c_{44}(c_{12}-c_{11})}{2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{c_{44}(c_{11}-c_{12})}{2}\left(\frac{5}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{3}{r^4}-\frac{\partial^4}{\partial r^4}\right)\right\}\Phi_1+\left\{\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\left(\frac{3}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{5}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}+\frac{3}{r^4}\right)+c_{44}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\right)\right\}\Phi_2=0, \qquad (4)$$

$$\left\{\frac{-c_{44}(c_{12}+5c_{11})}{2}\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}\right)+2c_{11}c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r^2\partial\varphi}-\right.$$

$$-\frac{c_{44}(c_{11}+c_{12})}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^4}{\partial r^3\partial\varphi}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial r\partial\varphi^3}\right)+\left[\frac{c_{33}(3c_{11}-c_{12})}{2}-\right.$$

$$\left.\left.-(c_{13}+c_{44})^2\right]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial z^2}+\left[(c_{13}+c_{44})^2-\frac{c_{33}(c_{11}+c_{12})}{2}\right]\frac{1}{r}\frac{\partial^4}{\partial r\partial\varphi\partial z^2}\right\}\Phi_1+$$

$$+\left[c_{44}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial\varphi}+\frac{c_{11}-c_{12}}{2}\left(\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r^2\partial\varphi}+\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}\right)\right]\Phi_2=0.$$

Если умножить второе уравнение системы (4) на r и продифференцировать по r, а первое продифференцировать по φ и полученные результаты сложить, то получим уравнение для разрешающей функции Φ_1:

$$\left\{c_{11}c_{44}\left(\frac{9}{r^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{4}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r^2\partial\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial^4}{\partial r^3\partial\varphi}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^5}{\partial r^2\partial\varphi^3}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial_5}{\partial\varphi^5}\right)+\right.$$

$$+c_{44}(5c_{11}-2c_{12})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi}+c_{44}(3c_{12}-5c_{11})\frac{1}{r^4}\frac{\partial^3}{\partial\varphi^3}+c_{44}(c_{11}-$$

$$-c_{12})\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial r\partial\varphi^3}-\frac{1}{2}\frac{\partial^5}{\partial r^4\partial\varphi}\right)+[(c_{13}+c_{44})^2-c_{33}c_{11}]\frac{1}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial\varphi\partial z^2}+$$

$$+[c_{33}c_{11}-(c_{11}+c_{44})^2]\frac{1}{r}\frac{\partial^4}{\partial r\partial\varphi\partial z^2}+[c_{13}(c_{13}+2c_{44})-c_{11}c_{33}]\frac{1}{r^2}\times$$

$$\left.\times\frac{\partial^5}{\partial r^2\partial\varphi\partial z^2}+[-c_{44}^2-c_{33}c_{11}+(c_{13}+c_{44})^2]\frac{1}{r^3}\frac{\partial^5}{\partial z^2\partial\varphi^3}-c_{44}c_{33}\frac{\partial^5}{\partial z^4\partial\varphi}\right\}\Phi_1=0. \qquad (5)$$

Произведем теперь следующее представление компонент вектора перемещений:

$$u_r = \left(l_1 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + l_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + l_3 \frac{1}{r^2} + l_4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l_5 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \Phi_3 +$$

$$+ \frac{l}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \Phi_4 = L_{11}\Phi_3 + L'_{11}\Phi_4,$$

$$u_\varphi = \left(m_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \Phi_3 + \left(m_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} + m_2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \Phi_4 = L_{21}\Phi_3 + L'_{21}\Phi_4, \quad (6)$$

$$u_z = \left(n_1 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} + n_2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial z}\right) \Phi_3 = L_{31}\Phi_3.$$

Поставим (6) в систему (1). Тождественное обращение в нуль третьего уравнения даст значения постоянных:

$$l_1 = -c_{44}, \quad l_2 = -c_{44} = -l_3 = l_4, \quad l_5 = -c_{33}, \quad m_1 = -2c_{44},$$

$$m_2 = -m_3 = +1, \quad n_1 = n_2 = (c_{13} + c_{44}), \quad l = 1.$$

Первое и второе уравнения дадут систему двух уравнений относительно двух разрешающих функций Φ_3 и Φ_4:

$$\Big\{(c_{13}^2 + 2c_{13}c_{44} - c_{11}c_{33}) \left(\frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3}{\partial r \partial z^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \left[\frac{c_{33}(c_{12} - c_{11})}{2} -\right.$$

$$\left. - c_{44}^2\right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + c_{33}c_{44} \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{c_{44}(3c_{11} - c_{12})}{2} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \varphi^2}\right) + \frac{c_{44}(5c_{11} + c_{12})}{2} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{c_{44}(c_{12} - c_{11})}{2} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + \quad (а)$$

$$+ c_{11}c_{44} \left[3 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^4}\right) - \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{\partial^4}{\partial r^4}\right]\Big\} \Phi_3 -$$

$$- \Big\{\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \varphi^2}\right] -$$

$$- c_{44} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial \varphi^2}\Big\} \Phi_4 = 0, \quad (7)$$

$$\Big\{c_{44}(c_{12} - 3c_{11}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial \varphi} + \frac{c_{44}(5c_{11} - 3c_{12})}{2} \left[\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \varphi} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3}\right] + \frac{-c_{44}(c_{11} + c_{12})}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^4}{\partial r^3 \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^4}{\partial r \partial \varphi^3}\right) + \left[\frac{c_{33}(c_{12} - 3c_{11})}{2} -\right.$$

$$\left. - 2c_{44}^2 + (c_{13} + c_{44})^2\right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \varphi} + \left[(c_{13} + c_{44})^2 - \frac{c_{33}(c_{11} + c_{12})}{2}\right] \frac{1}{r} \times$$

$$\times \frac{\partial^4}{\partial r \partial z^2 \partial \varphi}\Big\} \Phi_3 - \Big\{\frac{c_{11} - c_{12}}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^4}{\partial r^3 \partial \varphi} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^4}{\partial r \partial \varphi^3} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial r^2 \partial \varphi} + 3 \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{r^4} \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} - \frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\right] + c_{44} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^4}{\partial r \partial z^2 \partial \varphi}\right]\Big\} \Phi_4 = 0. \quad (б)$$

Если первое уравнение системы (7) умножить на r и продифференцировать по r, а второе продифференцировать по φ и полученные результаты сложить, то получим уравнение для разрешающей функции Φ_3:

$$\Big\{c_{11}c_{44}\Big[3\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{3}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{3}{r^4}-\frac{\partial^4}{\partial r^4}\right)-r\frac{\partial^5}{\partial r^5}-\frac{10}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{2}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{1}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4}\Big]+[-c_{11}c_{33}+c_{13}^2+2c_{13}c_{44}]\Big[\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial\varphi^2}+$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial^5}{\partial r\partial z^2\partial\varphi^2}+2\frac{\partial^4}{\partial r^2\partial z^2}\Big]+(-c_{11}c_{44})\frac{1}{r^3}\frac{\partial^5}{\partial r\partial\varphi^4}-c_{33}c_{44}\left(\frac{\partial^4}{\partial z^4}+\right.$$

$$\left.+r\frac{\partial^5}{\partial r\partial z^4}\right)+(c_{13}^2+2c_{13}c_{44}-c_{11}c_{33})\left(r\frac{\partial^5}{\partial r^3\partial z^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Big\}\Phi_3=0. \tag{8}$$

И, наконец, произведем такую замену:

$$u_r=L_{13}\Phi_5=a_1\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\Phi_5,\quad u_\varphi=a_2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial z}\Phi_5=L_{23}\Phi_5,$$

$$u_z=\left(a_3\frac{\partial^2}{\partial r^2}+a_4\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+a_5\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+a_6\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_5=L_{33}\Phi_5. \tag{9}$$

Подставим (9) в систему (1). Тождественное обращение первого и второго уравнений в нуль определит значения постоянных:

$$a_1=a_2=-(c_{13}+c_{44}),\quad a_3=a_4=a_5=c_{11},\quad a_6=c_{44},$$

а третье уравнение системы даст уравнение для разрешающей функции

$$\left[g_1\Delta\Delta+g_2\Delta\frac{\partial^2}{\partial z^2}+g_3\frac{\partial^4}{\partial z^4}\right]\Phi_5=0, \tag{10}$$

где

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},\quad g_1=c_{11}c_{44},\quad g_2=c_{11}c_{33}+c_{44}^2-$$

$$-(c_{13}+c_{44})^2,\quad g_3=c_{33}c_{44}.$$

Таким образом, мы получили решение уравнений Ляме в виде:

$$u_r=L_{11}\Phi_3+L_{12}\Phi_2+L_{13}\Phi_5+L'_{11}\Phi_4,$$

$$u_\varphi=L_{21}\Phi_3+L_{22}\Phi_1+L_{23}\Phi_5+L'_{21}\Phi_4+L'_{22}\Phi_2,$$

$$u_z=L_{31}\Phi_3+L_{32}\Phi_1+L_{33}\Phi_5.$$

Функции Φ_1, Φ_3, Φ_5 определены уравнениями (5), (8), (10) соответственно, а функции Φ_2, Φ_4 определяются из системы (4), (7) методом разделения переменных.

Имея общее решение пространственной задачи для цилиндрической трансверсально-изотропной среды, можно построить приближенные методы толстостенных оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Галеркин, Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, М., 1952.
2. С. Г. Лехницкий, Теория упругости анизотропного тела, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
3. Р. Курант, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
4. В. М. Деев, В. П. Мальханов, Общее решение пространственной задачи теории упругости для криволинейной трансверсальной изотропной среды, УМЖ, т. 22, № 4, 1970.
5. В. М. Деев, Н. С. Смирнов, Общие решения в статике упругой среды в случае криволинейной анизотропии, Материалы VIII Научно-технической конференции, Харьков, 1967.

Поступила 9.II 1970 г.
Харьков, УЗПИ