УДК 519.41/47

Об относительно свободных группах, близких к метабелевым

И. Д. Иванюта

В работе [1] Д. Е. Коэн показал, что свободная метабелева группа счетного ранга удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп, допускающих автоморфизмы, индуцированные перестановками свободных образующих элементов. Метабелевой назовем группу с абелевым коммутантом.

В данной заметке получен аналогичный результат для свободной группы $F(\mathfrak{M})$ счетного ранга многообразия $\mathfrak{M}$, определенного тождеством

$$[x, y, z;\ u, v] = 1,$$

т. е. для группы $F'(\mathfrak{M}) = F/V$, где F — абсолютно свободная группа счетного ранга, V — вполне характеристическая подгруппа F, соотвествующая $\mathfrak{M}$.

При доказательстве существенно используется тот факт, что второй коммутант $F(\mathfrak{M})$ группы $F(\mathfrak{M})$ совпадает с ее центром $Z(F(\mathfrak{M}))$ [2], т. е. группы многообразия $\mathfrak{M}$ удовлетворяют тождеству

$$[[x, y;\ u, v], z] = 1.$$

Легко видеть, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_2 \cap \mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — многообразие всех абелевых групп, $\mathfrak{N}_2$ — многообразие всех нильпотентных групп класса нильпотентности не выше 2. Поскольку все подмногообразия указанного пересечения конечно базируемы [3], свободные группы многообразия $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию максимальности для вполне характеристических подгрупп. Это следует также из результата данной заметки.

1. Вспомогательная часть. Напомним некоторые понятия и факты из [1], необходимые для дальнейшего.

Операция алгебраического замыкания в множестве C сопоставляет каждому подмножеству X из C подмножество X из C так, что выполняются условия: а) $X \subseteq \overline{X}$; б) если $X \subseteq Y$, то $\overline{X} \subseteq \overline{Y}$; в) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$; г) если $x \in \overline{X}$, то $x \in \overline{X}_0$ для некоторого конечного $X_0 \subseteq X$.

Например, в коммутативном кольце замкнутыми множествами являются идеалы. Алгебраическое замыкание имеет свойство конечности базиса (с. к. б.), если любое замкнутое множество является замыканием конечного множества. Это эквивалентно условию максимальности для замкнутых множеств.

Частично упорядоченное (ч. у.) множество назовем тесным, если любая бесконечная последовательность его элементов содержит возрастающую (не обязательно строго возрастающую) подпоследовательность.

Пусть C — любое множество с операцией замыкания, P — любое ч. у. множество. Определим на $C \times P$ операцию замыкания, индуцированную операцией замыкания на C и частичным порядком на P: $(c, p) \in \overline{X}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $(c_1, p_1), (c_2, p_2), \ldots, (c_n, p_n) \in X$, что $c = \overline{(c_1, c_2, \ldots, c_n)}$, $p_i \leqslant p$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 1. *Если операция замыкания на C имеет с. к. б., а ч. у. множество P является тесным, то индуцированная операция замыкания на $C \times P$ имеет с. к. б.*

Пусть T — множество всех четверок $(i_1, i_2; i_3, i_4)$, где i_k — целые положительные числа, причем $i_1 < i_2$, $i_3 < i_4$, $i_1 < i_3$. Определим два порядка на T:

1) $(i_1, i_2; i_3, i_4) < (j_1, j_2; j_3, j_4)$, если для некоторого r $i_r < j_r$, но $i_k = j_k$ для всех $k < r$;

2) $(i_1, i_2; i_3, i_4) \preccurlyeq (j_1, j_2; j_3, j_4)$, если для некоторого сохраняющего порядок взаимно однозначного отображения φ множества J натуральных чисел в себя $\varphi(i_k) = j_k$ для всех $k = 1, 2, 3, 4$.

Очевидно множество $(T \leqslant)$ вполне упорядочено, а ч. у. множество $(T \prec)$ является тесным.

Пусть, далее, Φ — множество всех сохраняющих порядок взаимно однозначных отображений множества J в себя, Z — кольцо целых чисел, M — свободный Z-модуль, базисом которого являются элементы из T.

Определение. Подмодуль N модуля M назовем Φ-подмодулем, если из того, что $\Sigma m_\alpha (i_1^{(\alpha)}, i_2^{(\alpha)}; i_3^{(\alpha)}, i_4^{(\alpha)}) \in N$, следует

$$\Sigma m_\alpha(\varphi(i_1^{(\alpha)}), \varphi(i_2^{(\alpha)}); \varphi(i_3^{(\alpha)}), \varphi(i_4^{(\alpha)})) \in N \text{ для любого } \varphi \in \Phi.$$

Лемма 2. *Z-модуль M удовлетворяет условию максимальности для Φ-подмодулей.*

Доказательство аналогичное доказательству предложения 2 из [1]. Старшим членом элемента $u \in M$ назовем его член максимальный в $(T \leqslant)$; обозначим его через $\omega(u)$. Коэффициент при этом члене назовем старшим коэффициентом. Определим отображение $\theta : M \to Z \times T$, положив $\theta(u) = (m, \omega, (u))$, где m — старший коэффициент u. Операция замыкания в Z, где замкнутыми множествами являются идеалы, имеет с. к. б. По лемме 1 операция замыкания в $Z \times T$, индуцированная операцией замыкания в Z и упорядоченностью в $(T \preccurlyeq)$, имеет с. к. б. Если N — Φ-подмодуль модуля M, то, очевидно, $\theta(N)$ — замкнутое множество в $Z \times T$. Пусть $\theta(N) = \overline{(\theta(u_1), \theta(u_2), \ldots, \theta(u_r))}$. Очевидно для $u \in N$ существует в Φ-подмодуле, порожденном $u_1, u_2, \ldots, u_r$, такое v, что $\theta(u) = \theta(v)$, откуда следует $\omega(u - v) < \omega(u)$. Поскольку множество $(T \leqslant)$ вполне упорядочено, по индукции легко получить, что N есть Φ- подмодуль, порожденный $u_1, u_2, \ldots, u_r$, т. е. любой Φ-подмодуль из M конечно порожден.

2. Основная часть. Употребим обычные обозначения для коммутаторов элементов группы G:

$$[a_1, a_2] = a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2,$$

и для $n > 2$

$$[a_1 a_2, \ldots, a_n] = [[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}], a_n],$$

кроме того,

$$[a_1, a_2, \ldots, a_k;\ b_1, b_2, \ldots, b_m] = [[a_1, a_2, \ldots, a_k], [b_1, b_2, \ldots, b_m]], \quad a^b = b^{-1}ab.$$

Приведем основные коммутаторные тождества:

$$\begin{gathered} [a, b]^{-1} = [b, a], \\ [a, b] = [b, a^{-1}]^a = [b^{-1}, a]^b, \\ [ab, c] = [a, c]^b [b, c], \quad [a, bc] = [a, c] [a, b]^c \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через H^G нормальное замыкание подгруппы H в G, а через $d_G(H)$ — минимальное число элементов из H, порождающие H^G как нормальную подгруппу. Через $\max$-Ω обозначим условие максимальности для подгрупп, выдерживающих автоморфизмы из множества Ω. В частности, $\max$-n ($\max$-G) означает условие максимальности для нормальных подгрупп группы G.

Пусть A — нормальная абелева подгруппа G, $B = G/A$, $\Gamma = ZB$ — целочисленное групповое кольцо группы B. Для $x \in G$, $a \in A$, $\xi = xA$ определим отображение $a^\xi = x^{-1}ax$, которое не зависит от выбора x в классе ξ. Вообще, если $\eta = \sum_{i=1}^{r} m_i\xi_i \in \Gamma$, где $m_i \in Z$, $\xi_i \in B$, то

$$a^\eta = \prod_{i=1}^{r} (a^{\xi_i})^{m_i}.$$

Таким образом, A можно рассматривать как Γ-модуль. Γ-подмодули A совпадают с нормальными подгруппами группы G, содержащимися в A.

Лемма (Ф. Холл). Расширение G абелевой группы A удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп тогда и только тогда, когда выполняются условия:

1) $B = G/A$ удовлетворяет условию $\max$-n;

2) $d_G(A) = m$ конечно;

3) если $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^G$, то каждый Γ-модуль Γ/L_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяет условию максимальности для Γ-подмодулей, где L_i содержит все элементы $\eta \in \Gamma$ такие, что $a_i^\eta = 1$.

Теорема 1. *Свободная группа $F(\mathfrak{M})$ счетного ранга многообразия $\mathfrak{M}$, определенного тождеством*

$$[x, y, z;\ u, v] = 1, \tag{2}$$

удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп, инвариантных относительно автоморфизмов, индуцированных перестановками свободных образующих элементов группы $F(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Пусть F — абсолютно свободная группа счетного ранга со свободными образующими $x_1, x_2, \ldots, V$ — вполне характеристическая подгруппа F, соответствующая многообразию $\mathfrak{M}$. Тогда $F(\mathfrak{M}) = F/V$ — свободная группа счетного ранга многообразия $\mathfrak{M}$ со свободными образующими элементами $y_1 = x_1V$, $y_2 = x_2V, \ldots$ Пусть $G = F(\mathfrak{M}) \lambda S$ — полупрямое произведение, где S — группа всех подстановок на множестве свободных образующих элементов группы $F(\mathfrak{M})$. Из [2] следует, что $A = F''(\mathfrak{M}) = Z(F(\mathfrak{M}))$. Поэтому, применяя тождества (1) и (2), получим:

$$\begin{gathered}[y_i, y_j, y_2;\ y_3, y_4] = [y_i, y_2;\ y_3, y_4]\,[y_j, y_2;\ y_3, y_4],\\ [y_1^{-1}, y_2;\ y_3, y_4] = [y_1, y_2;\ y_3, y_4]^{-1}.\end{gathered} \tag{3}$$

Взяв вместо y_2, y_3, y_4 произведение y_iy_j или соответственно y_2^{-1}, y_3^{-1}, y_4^{-1}, получим аналогичные равенства. Далее

$$\begin{gathered}[y_2, y_1;\ y_3, y_4] = [y_1, y_2;\ y_3, y_4]^{-1},\\ [y_1, y_2;\ y_4, y_3] = [y_1, y_2;\ y_3, y_4]^{-1}.\end{gathered} \tag{4}$$

Имеет место равенство $A = \{[y_1, y_2;\ y_3, y_4], [y_1, y_2;\ y_1, y_3]\}^G$. Действительно, из (3) следует, что любой элемент из A является произведением коммутаторов вида $[y_i, y_j;\ y_k, y_l]$. Но любой такой коммутатор можно получить из $[y_1, y_2;\ y_3, y_4]$ или $[y_1, y_2;\ y_1, y_3]$, применяя подстановки из S и тождества (4).

Пусть $\Gamma = ZB$ — целочисленное групповое кольцо группы $B = G/A$, $a = [y_1, y_2;\ y_3, y_4] \in A$, L — совокупность всех элементов $\eta \in \Gamma$ таких, что $a^\eta = 1$, Γ — модуль $M = \Gamma/L$.

Легко видеть, что элементы из Γ, одинаково действующие на элемент a, лежат в одном классе по L. Все элементы из $F(\mathfrak{M})/A$ действуют на a тривиально; при рассмотрении подстановок из S имеет значение лишь их действие на y_1, y_2, y_3, y_4. Поэтому подстановку $\begin{pmatrix} y_1, y_2, y_3, y_4, \dots \\ y_i, y_j; y_k, y_l, \dots \end{pmatrix}$ обозначим через $(i, j;\ k, l)$. Из (4) следует, что

$$(i, j;\ k, l) + (k, l;\ i, j) \equiv 0 \pmod L,$$

$$(i, j;\ k, l) + (j, i;\ k, l) \equiv 0 \pmod L,$$

$$(i, j;\ k, l) + (i, j;\ l, k) \equiv 0 \pmod L.$$

Это значит что, например,

$$(i, j;\ k, l) + L = -(j, i;\ k, l) + L.$$

Из сказанного выше следует, что Γ-модуль M на самом деле является ZS-модулем, натянутым на элементы (i, j, k, l), где i, j, k, l — целые положительные числа, причем $i < j$, $k < l$, $i < k$. Поскольку на произвольном конечном множестве натуральных чисел отображения с Φ действуют так же, как некоторые подстановки из S, каждый Γ-подмодуль модуля M является Φ-подмодулем. В силу леммы 2 модуль M удовлетворяет условию максимальности для Γ-подмодулей.

Легко видеть, что $A_1 = \{a\}^G$ Γ-изоморфно M. Следовательно, группа A_1 удовлетворяет условию max-G. Аналогичное утверждение можно доказать для $A_2 = \{[y_1, y_2;\ y_1, y_3]\}^G$. Поскольку $A = A_1A_2$ и условие max-G является полисвойством [4, лемма 1], группа A удовлетворяет условию max-G. Как следует из [1], группа $F(\mathfrak{M})/A$ также удовлетворяет условию max-G. Тогда условие max-G для группы $F(\mathfrak{M})$ следует из леммы 1 работы [4].

Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Свободные группы $F_k(\mathfrak{M})$ конечного ранга k многообразия $\mathfrak{M}$ удовлетворяют условию* max-n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактор-группа $F'_k(\mathfrak{M})/F''_k(\mathfrak{M})$ удовлетворяет условию max-n (см. [4]), а группа $F''_k(\mathfrak{M})$ абелева и конечно порождена, следовательно, удовлетворяет условию max-n.

Тогда из [4, лемма 1] следует условие max-n для $F_k(\mathfrak{M})$.

С л е д с т в и е. *Все подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$ конечно базируемы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. D. E. C o h e n, On the laws of a metabelian variety, J. Algebra, **5**, 1967, 267—273.
2. Э. Б. К и к о д з е, О свободных группах некоторых многообразий, Алгебра и логика, 5, 1966.
3. X. Н е й м а н, Многообразия групп, «Мир», М., 1969.
4. P. H a l l, Finiteness conditions for soluble groups, Proc. London Math. Soc., **4**, 1954, 419—436.

Поступила 29.X 1969 г.

Институт математики АН УССР