УДК 517.512.6

Обратные теоремы приближения в среднем в областях с углами

Л. И. Колесник, М. И. Андрашко

В этой работе доказана обратная теорема приближения в среднем функций класса E_p в областях с углами. Приближение в среднем аналитических функций впервые рассматривалось Д. Уолшем и Г. Расселом [1]. Они получили конструктивную характеристику функций класса E_p, удовлетворяющих интегральному условию Гельдера α $(0 < \alpha < 1)$ в областях с аналитической границей. С. Я. Альпер [2] обобщил этот результат на случай областей с гладкой границей типа Λ.

В данной работе рассматривается задача приближения в среднем функций класса E_p в областях с углами. Полученная нами прямая теорема [3] и настоящая обратная теорема дают конструктивную характеристику функций класса E_p, удовлетворяющих некоторому обобщенному условию Гельдера α $(0 < \alpha < 1)$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определения и вспомогательные утверждения.

Определение. Считаем, что замкнутое ограниченное множество G с односвязным дополнением CG является множеством типа $A_{(a,b)}$, если его граница C состоит из конечного числа k гладких дуг C_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ с непрерывной кривизной, которые образуют между собой в точках стыка z_j (внутренние по отношению к множеству G) положительные углы $\alpha_j\pi$, $a < \alpha_j < b$, и, если множество G обладает тем свойством, что функцию $z = \psi(w)$, осуществляющую конформное отображение внешности единичного круга $|w| \leqslant 1$ на дополнение CG множества G, можно представить в окрестности каждой из точек $w_j = \varphi(z_j)$ в виде

$$\psi(w) = \lambda(w)(w - w_j)^{2-\alpha_j} + \psi(w_j), \tag{1}$$

где функция $\lambda(w)$ непрерывна в окрестности точки w_j вместе со своими производными первого и второго порядков и $\lambda(w_j) \neq 0$, а $w = \varphi(z)$ — обратная к функции $z = \psi(w)$ и такая, что $0 < \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(t)}{z} < \infty$.

Обозначим через C_R $(R \geqslant 1)$ линию уровня $|\varphi(z)| = R$, тогда $\varrho_R(z) = \min\limits_{z' \in C_R} |z' - z|$, $z \in C$ назовем расстоянием от точки $z \in C$ до линии уровня C_R.

Лемма 1 ([4], стр. 721, теорема 2.4). *Для всех точек z границы C области G типа $A_{(0,2)}$ и при всех $1 < R \leqslant \overline{R}$ выполняются неравенства*

а) $\varrho_R(z) \leqslant |\psi[R\varphi(z)] - z| \leqslant A_1 \varrho_R(z)$, $\quad$ (2)

где A_1 — постоянная, не зависящая от z и R, а только от границы области G; $A_1 = A_1(G)$;

б) *длина $s(z_1, z_2)$ частичной дуги границы C между произвольными точками z_1 и z_2 не превышает расстояния между этими точками, умноженного на некоторое постоянное число $A_2 = A_2(G)$:*

$$s(z_1, z_2) \leqslant A_2 |z_1 - z_2|; \tag{3}$$

в) *если z_0 — произвольная точка кривой C, то при каждом $L \geqslant 1$ ($L = \mathrm{const}$) и для всех $1 < R \leqslant \overline{R}$ во всех точках z, принадлежащих той же части C_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$, что и точка z_0, и находящихся в круге радиуса $L\varrho_R(z_0)$ с центром в точке z_0, имеем*

$$A_4 \varrho_R(z_0) \leqslant \varrho_R(z) \leqslant A_3 \varrho_R(z_0), \tag{4}$$

где A_3, A_4 — постоянные, зависящие только от вида кривой C и от числа L, однако очевидно, что $A_4 \leqslant 1$; $A_3 \geqslant 1$.

Лемма 2 (см. [4], стр. 722, теорема 2.5). *Если G — множество типа $A_{(0,2)}$, то расстояние от точек z границы C до линии уровня C_R этого множества удовлетворяет неравенствам*

$$A_5 (R-1) [|z - z_j| + (R-1)^{2-\alpha_j}]^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}} < \varrho_R(z) < A_6 (R-1) [|z - z_j| + (R-1)^{2-\alpha_j}]^{\frac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}}, \tag{5}$$

где z_j — ближайшая к точке z точка стыка, $R > 1$, а положительные константы A_5 и A_6 зависят только от вида границы C.

Лемма 3 (см. [5], стр. 804, лемма 2.3). *В областях G типа $A_{(0,2)}$ для всех $z \in C$ и $s \in (0, \pi)$ найдутся две положительные постоянные A_7 и A_7' такие, что имеют место неравенства*

$$A_7' \varrho_{1+s}(z) \leqslant |z_{[s]} - z| \leqslant A_7 \varrho_{1+s}(z). \tag{6}$$

Лемма 4 (см. [6], стр. 447, теорема 2'). *Пусть G — область типа $A_{(0,1)}$. Тогда каковы бы ни были $\alpha \in [0, \infty)$ и натуральное $k = 1, 2, \ldots$ для любого многочлена $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ и $p \geqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\left\| \frac{P_n^{(k)}(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-k}(z)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant A_8' \left\| \frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha}(z)} \right\|_{L_p(C)}, \tag{7'}$$

где A_8' — положительная константа, не зависящая от n.

Следствие. *Проследив за доказательством леммы 4, убеждаемся, что константа A_8', которая, вообще говоря, зависит от p, при $p \to \infty$ остается ограниченной сверху: $A_8' < A_8$. А так как, кроме того, $\lim\limits_{p \to \infty} \times$ $\left\| \frac{P_n^{(k)}(z)}{\varrho_{1+1/n}^{\alpha-k}(z)} \right\|_{L_p}$ и $\lim\limits_{p \to \infty} \left\| \frac{P_n(z)}{\varrho_{1+1/n}^{\alpha}(z)} \right\|_{L_p}$ существуют при $p \to \infty$*, то это позволяет утверждать, что при $p = \infty$ *имеем неравенство*

$$\left\| \frac{P_n^{(k)}(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-k}(z)} \right\|_{C} \leqslant A_8 \left\| \frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha}(z)} \right\|_{C},$$

т. е.

$$\max_{z \in C} \left| \frac{P_n^{(k)}(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-k}} \right| \leqslant A_8 \max_{z \in C} \left| \frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha}(z)} \right|. \tag{7}$$

Лемма 5 (основная). *Если G — область типа $A_{(0,1)}$, то на ее границе C имеет место неравенство:*

$$\left\| \frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha - \frac{1}{p}}(z) \prod\limits_{j=1}^{k} |z - z_j|^{\beta_j/p}} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M^* \left\| \frac{P_n(z)}{n^{1/p} \varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha}(z)} \right\|_{L_p(C)}, \tag{8}$$

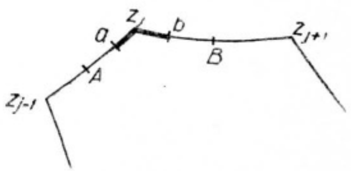
где $\alpha \in [0, \infty)$; $p \geqslant 1$; $\beta_j = \dfrac{1-\alpha_j}{2-\alpha_j}$, постоянная M не зависит ни от многочлена $P_n(z)$, ни от его степени n.

---

* Здесь и в дальнейшем постоянные, вообще говоря, разные, не зависящие ни от n, ни от $P_n(z)$, будем обозначать через M.

Доказательство. По условию леммы граница $C = \bigcup_{j=1}^{k} C_j$, где C_j — гладкие дуги с концами в точках z_j и z_{j+1}. Обозначим через $\gamma_j (j = 1, 2, \ldots, k)$ ту односвязную часть кривой C, которая содержится в круге радиуса $\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z_j)$ с центром в точке z_j; а через Γ_j — связную дугу, состоящую из $\smile Az_j \bigcup \smile z_jB$ и содержащую точку z_j, т. е. $\smile Az_j B = \Gamma_j$; $\smile az_jb = \gamma_j$ (см. рисунок).

Пользуясь введенными обозначениями, представим интеграл I в левой части (8) в виде



$$I \leq \sum_{j=1}^{k} \left\{ \int_{\Gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p |dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p-1}(z) \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\beta_i}} \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} I_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left[\left\{ \int_{\gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p |dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p-1}(z) \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\beta_i}} \right\}^{\frac{1}{p}} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \int_{\Gamma_j \setminus \gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p |dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p-1}(z) \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\beta_i}} \right\}^{\frac{1}{p}} \right] = \sum_{j=1}^{k} [I_{j1} + I_{j2}]. \tag{9}$$

Оценим каждый из интегралов I_{j2} $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Так как при $z \in \Gamma_j \setminus \gamma_j$ $|z - z_j| > \varrho_{1+\frac{1}{n}}(z_j)$, а в силу (5)

$$\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z_j) > A_5 \frac{1}{n^{2-\alpha_j}}, \text{ то } |z - z_j| > A_5 \frac{1}{n^{2-\alpha_j}};$$

кроме того,

$$\prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\beta_i} > A_j |z - z_j|^{\beta_j}, \qquad A_j = \min_{z \in \Gamma_j \setminus \gamma_j} \prod_{j \neq m}^{k} |z - z_m|,$$

поэтому, учитывая лемму 2 и последнее неравенство, имеем

$$I_{j2} = \left\{ \int_{\Gamma_j \setminus \gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p |dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p-1}(z) \prod_{i=1}^{k} |z - z_i|^{\beta_i}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{\Gamma_j \setminus \gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p A_6 \frac{1}{n} \left[|z - z_j| + \frac{1}{n^{2-\alpha_j}} \right]^{\beta_j} |dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p}(z) A_j |z - z_j|^{\beta_j}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant M \left\{ \int_{\Gamma_j \setminus \gamma_j} \frac{|P_n(z)|^p |z - z_j|^{\beta_j} |dz|}{n \varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p}(z) |z - z_j|^{\beta_j}} \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{M}{n^{\frac{1}{p}}} \left\{ \int_C \frac{|P_n(z)|^p}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha p}(z)} |dz| \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

где M не зависит ни от $P_n(z)$, ни от n.

Оценим интегралы I_{j1} $(j=1, 2, \ldots, k)$. Учитывая неравенство (3), лемму 2 и тот факт, что функция $\dfrac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-\frac{1}{p}}(z)}$ непрерывна на C, а значит и на γ_j, потому имеет на γ_j максимум, получим

$$I_{j1} \leqslant \max_{z\in\gamma_j}\left|\frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-\frac{1}{p}}(z)}\right|\left\{\int\limits_{\gamma_j}\frac{|dz|}{\prod\limits_{i=1}^{k}|z-z_i|^{\beta_i}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M\max_{z\in C}\left|\frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-\frac{1}{p}}(z)}\right| \times$$

$$\times\left\{\int\limits_0^{\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z_j)}\frac{d\sigma}{\sigma^{\beta_j}}\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M\max_{z\in C}\left|\frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-\frac{1}{p}}(z)}\right|\frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}. \tag{11}$$

Остается показать, что

$$\max_{z\in C}\left|\frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha-\frac{1}{p}}(z)}\right| \leqslant M\left\|\frac{P_n(z)}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}^{\alpha}(z)}\right\|_{L_p(C)}. \tag{12}$$

С этой целью вводим вспомогательную функцию

$$\Phi(z)=\frac{P_n(z)}{[z_1-z]^{\delta}}, \quad \delta=\alpha-\frac{1}{p}, \quad z_1=\psi\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\varphi(z)\right]$$

и убеждаемся, что при всех $z\in\Gamma_m$ $(z\neq z_m)$

$$|\Phi'(z)| \leqslant M\mu\frac{1}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)}\left[1+\frac{1}{n^{1-\alpha_m}|z-z_m|^{\beta_m}}\right],$$

где $\mu=\max\limits_{z\in C}|\Phi(z)|=|\Phi(z_0)|$.

Оценим разность $|\Phi(z)-\Phi(z_0)|$, где z_0 — точка, в которой функция $|\Phi(z)|$ достигает максимум, а z — пока произвольная точка дуги Γ_m.

Так как точка z_0 — фиксированная при данном n, то возможны только 2 случая: либо $z_0\in\gamma_m$, либо $z_0\in\Gamma_m\setminus\gamma_m$.

Рассматривая каждый случай в отдельности, обнаружим, что

$$|\Phi(z)-\Phi(z_0)| \leqslant \frac{\mu}{2} \tag{13}$$

при всех z, принадлежащих односвязному множеству Δ тех точек дуги Γ_m, для которых выполняется условие

$$|z-z_0| < A\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z_0), \tag{14}$$

где A — константа, подобранная определенным образом.

Из неравенства (13) следует, что при всех $z\in\Delta$

$$|\Phi(z)| \geqslant \frac{\mu}{2}. \tag{15}$$

Используя неравенство (15), (14) и лемму 1, оценим снизу интеграл I_Δ:

$$I_\Delta = \left\{ \int\limits_\Delta \frac{|P_n(z)|^p}{\varrho^{\alpha p}_{1+\frac{1}{n}}(z)} |dz| \right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant \left\{ \int\limits_\Delta |\Phi(z)|^p \frac{|dz|}{\varrho_{1+\frac{1}{n}}(z)} \right\}^{\frac{1}{p}} \geqslant M\mu,$$

откуда

$$\mu \leqslant \frac{1}{M} \left\{ \int\limits_\Delta \frac{|P_n(z)|^p}{\varrho^{\alpha p}_{1+\frac{1}{n}}(z)} |dz| \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M \left\| \frac{P_n(z)}{\varrho^{\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(z)} \right\|_{L_p(C)}. \tag{16}$$

Но так как, в силу леммы 1, $\max\limits_{z\in C} \left| \frac{P_n(z)}{\varrho^{\alpha-\frac{1}{p}}_{1+\frac{1}{n}}(z)} \right| \leqslant A_1\mu$, то из (16) получаем (12).

Таким образом, лемма 5 доказана.

Теорема 1. *Пусть задана конечная односвязная область G типа $A_{(0,1)}$. Если $f(\zeta) \in L_p$ $(p \geqslant 1)$ на границе C области G и для каждого натурального n существует многочлен $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ такой, что*

$$\left\| \frac{f(\zeta) - P_n(\zeta)}{\varrho^{\alpha+r}_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M, \qquad \alpha p > 1 - \alpha_0, \tag{17}$$

где $0 < \alpha < 1$, $\alpha_0 = \min\limits_j \{\alpha_j\}$, и M — постоянная, не зависящая от n, то существует аналитическая в G функция $f(z)$, угловые предельные значения которой на границе C равны почти всюду $f(\zeta)$, а ее производная $f^{(r)}(z)$ r-го порядка ($r \geqslant 0$, r — целое) имеет угловые граничные значения $f^{(r)}(\zeta)$, удовлетворяющие при всех $s > 0$ условию

$$\left\| \frac{f^{(r)}(\zeta) - f^{(r)}(\zeta_{[\pm s]})}{\varrho^{\alpha}_{1+s}(\zeta)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M, \tag{18}$$

где постоянная M не зависит от s.

Доказательство. Полагая $\max\limits_{\zeta\in C} \varrho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta) = \varepsilon_n$, из (17) имеем

$$\| f(\zeta) - P_n(\zeta) \|_{L_p(C)} \leqslant M\varepsilon_n^{\alpha+r} \to 0, \tag{19}$$

т. е. последовательность $\{P_n(\zeta)\}$ сходится к $f(\zeta)$ на C в метрике L_p $(p \geqslant 1)$, а значит, сходится по мере. Кроме того, из (19) следует, что последовательность $\{P_n(\zeta)\}$ ограничена в L_p. Поэтому, применяя здесь теорему Г. Ц. Тумаркина [7, стр. 268], заключаем, что последовательность $\{P_n(\zeta)\}$ сходится равномерно внутри G к некоторой аналитической функции $f(z) \in E_p$, угловые предельные значения которой совпадают почти всюду с $f(\zeta)$ на границе C области G.

Определим последовательность многочленов ($k = 1, 2, \ldots$)

$$U_0(z) = P_1(z), \quad U_1(z) = P_2(z) - P_1(z), \; \ldots, \; U_k(z) = P_{2^k}(z) - P_{2^{k-1}}(z).$$

Пользуясь известными рассуждениями (см., например, [2]), можно показать, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} U_k^{(r)}(\zeta)$ сходится в среднем на границе C к угловым граничным значениям $f^{(r)}(\zeta)$ функции $f^{(r)}(z) \in E_p$.

Для доказательства неравенства (18) представим интеграл левой части (18) следующим образом:

$$I=\left\{\int\limits_C \frac{|f^{(r)}(\zeta)-f^{(r)}(\zeta_{[s]})|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p} \leqslant \sum_{n=0}^{N}\left\{\int\limits_C \frac{|U_n^{(r)}(\zeta)-U_n^{(r)}(\zeta_{[s]})|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\int\limits_C \frac{|f^{(r)}(\zeta)-\sum\limits_{n=0}^{N}U_n^{(r)}(\zeta)|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p}+\left\{\int\limits_C \frac{|f^{(r)}(\zeta_{[s]})-\sum\limits_{n=0}^{N}U_n^{(r)}(\zeta_{[s]})|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p}=$$

$$=I_1+I_2+I_3, \tag{20}$$

где N удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{2^{N+1}}\leqslant s<\frac{1}{2^N}. \tag{21}$$

Учитывая последовательно (21), (5) и неравенство

$$\left\{\int\limits_C \left|\frac{U_k^{(r)}(\zeta)}{\varrho^{\alpha}_{1+\frac{1}{2^k}}(\zeta)}\right|^p|d\zeta|\right\}^{1/p}\leqslant M, \tag{22}$$

вытекающее из условия (17), оценим I_2:

$$I_2=\left\{\int\limits_C \frac{|f^{(r)}(\zeta)-P_{2^N}^{(r)}(\zeta)|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p}\leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\int\limits_C \frac{|U_n^{(r)}(\zeta)|^p}{\varrho^{\alpha p}_{1+2^{\frac{1}{n}}}(\zeta)}\cdot\frac{\varrho^{\alpha p}_{1+2^{\frac{1}{n}}}(\zeta)}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\zeta)}|d\zeta|\right\}^{1/p}\leqslant M. \tag{23}$$

Введя замену $\zeta_{[s]}=\eta$ в интеграле I_3, получим

$$I_3=\left\{\int\limits_C \frac{|f^{(r)}(\eta)-\sum\limits_{n=0}^{N}U_n^{(r)}(\eta)|^p}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\eta_{[-s]})}\,\frac{|\varphi'(\eta)|}{|\varphi'(\eta_{[-s]})|}|d\eta|\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\int\limits_C \frac{|U_n^{(r)}(\eta)|^p}{\varrho^{\alpha p-1}_{1+\frac{1}{n}}(\eta)\prod\limits_{j=1}^{k}|\eta-z_j|^{\beta_j}}|\gamma(\eta)||d\eta|\right\}^{1/p}, \tag{24}$$

где

$$|\gamma(\eta)|=\frac{\varrho^{\alpha p-1}_{1+\frac{1}{n}}(\eta)\prod\limits_{j=1}^{k}|\eta-z_j|^{\beta_j}|\varphi'(\eta)|}{\varrho_{1+s}^{\alpha p}(\eta_{[-s]})|\varphi'(\eta_{[-s]})|}.$$

Оценим $|\gamma(\eta)|$, $\eta\in\Gamma_m$ $(m=1, 2, \ldots, k)$. Учитывая при этом (5), порядковое равенство $|\varphi'(\eta)|\asymp|\eta-z_m|^{-\beta_m}$, вытекающее из (1), и лемму 1, имеем

$$|\gamma(\eta)|\leqslant M2^n(s2^n)^{1-\alpha_0-\alpha p}, \tag{25}$$

где $\alpha_0=\min\limits_m\{\alpha_m\}$.

Используя лемму, условие $\alpha p > 1 - \alpha_0$ и неравенства (22), (25), окончательно получим

$$I_3 \leqslant Ms^{\frac{1-\alpha_0-\alpha p}{p}} \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{\frac{n}{p}} 2^{\frac{n(1-\alpha_0-\alpha p)}{p}} 2^{-\frac{n}{p}} \left\{ \int_C \frac{|U_n^{(r)}(\eta)|^p |d\eta|}{\varrho^{\alpha p}_{1+\frac{1}{2^n}}(\eta)} \right\}^{1/p} \leqslant M. \quad (26)$$

При оценке I_1 воспользуемся обобщенным неравенством Минковского, после чего во внутреннем интеграле введем замену переменных $\zeta_{[t]} = z$. В результате получим

$$I_1 \leqslant \sum_{n=0}^{N} \int_0^s dt \left\{ \int_C \left| \frac{U_n^{(r+1)}(z)}{\varrho^{\alpha-1}_{1+\frac{1}{2^n}}(z)} \right|^p |\delta(z)| \, |dz| \right\}^{1/p}, \quad (27)$$

где

$$|\delta(z)| = \frac{\varrho^{\alpha p-p}_{1+\frac{1}{2^n}}(z)}{\varrho^{\alpha p}_{1+s}(z_{[-t]}) \, |\varphi'(z)|^{p-1} \, |\varphi'(z_{[-t]})|}.$$

Применяя последовательно лемму 3, условие (1), лемму 2 и условие (21), при $n \leqslant N$ имеем

$$|\delta(z)| \leqslant Ms^{-p}(s2^n)^{(1-\alpha)p}.$$

Учитывая последнее неравенство, лемму 4 и условие (22), имеем

$$I_1 \leqslant M \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{s}(s2^n)^{1-\alpha} t \Big|_0^s \left\| \frac{U_n^{(r)}(z)}{\varrho^{\alpha}_{1+\frac{1}{2^n}}(z)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M.$$

Теорема доказана.

Следует отметить, что условие $\alpha p > 1 - \alpha_0$ неустранимо, в чем убеждает соответствующим образом построенный пример.

Из доказанных нами теоремы 1 и прямой теоремы [3] вытекает следующее предложение, дающее конструктивную характеристику функций некоторого обобщенного интегрального класса Гельдера.

Теорема 2. *Пусть G — область типа $A_{(0,1)}$. Тогда для того, чтобы граничные значения функции $f(z)$ класса E_p $(p > 1)$ удовлетворяли условию*

$$\left\| \frac{f(\zeta) - f(\zeta_{[\pm s]})}{\varrho^{\alpha}_{1+s}(\zeta)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M \qquad (p > 1)$$

при всех $s > 0$, $0 < \alpha < 1$, и таких, что $1 - \alpha_0 < \alpha p < \dfrac{2-\alpha_0}{1-\alpha_0}$, *необходимо и достаточно, чтобы для функции $f(\zeta) \in L_p(C)$ при каждом натуральном n нашелся алгебраический многочлен $P_n(z)$ степени $\leqslant n$ такой, для которого выполняется неравенство*

$$\left\| \frac{f(\zeta) - P_n(\zeta)}{\varrho^{\alpha}_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)} \right\|_{L_p(C)} \leqslant M, \quad (28)$$

где постоянная M не зависит ни от $P_n(z)$, ни от n.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Z. Walsh, H. G. Russell, Integrated Continuity Conditions and Degree of Approximation by Polynomials or by Bounded Analytic Functions, Trans. Amer. Math. Soc., 92, № 2, 1959.

2. С. Я. Альпер, О приближении в среднем аналитических функций класса F_p, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз, М., 1960.
3. М. И. Андрашко, Л. И. Колесник, Приближение в среднем аналитических функций в областях с углами, сб. Математические свойства функций и отображений, вып. 2, Донецк, 1970.
4. В. К. Дзядык, О проблеме С. М. Никольского в комплексной области, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 23, № 5, 1959.
5. В. К. Дзядык, К вопросу о приближении непрерывных функций в замкнутых областях с углами и о проблеме С. М. Никольского, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 26, № 6, 1962.
6. М. И. Андрашко, Неравенства для производной от алгебраического многочлена в метрике L_p $(p \geqslant 1)$ в областях с углами, УМЖ, т. XVI, № 4, 1964.
7. И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, ГИТТЛ, М., 1950.

Поступила 24.III 1970 г.
Нежинский педагогический институт