УДК 518.517.948

Об одном обобщении метода Ньютона—Канторовича

Т. С. Кравчук

1. Пусть дано нелинейное операторное уравнение

$$y = Ay \tag{1}$$

с непрерывным оператором A, действующим в банаховом пространстве E.

Л. В. Канторовичем [1, 2] были предложены и исследованы основной и модифицированный итеративные методы, являющиеся обобщением известного метода касательных Ньютона, которые применительно к уравнению (1) записываются в виде

$$y_{n+1} = Ay_n + A'(y_n)(y_{n+1} - y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \qquad y_0 \in E, \tag{2}$$

$$y_{n+1} = Ay_n + A'(y_0)(y_{n+1} - y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \qquad y_0 \in E, \tag{3}$$

где $A'(y_n)$, $A'(y_0)$ — производная Фреше оператора A в точках y_n, y_0.

В статье [3] Н. С. Курпелем и Ф. М. Миговичем исследуются некоторые обобщения основного и модифицированного метода Ньютона — Канторовича. Последовательные приближения y_n к решению y^* уравнения (1) определяются из уравнений

$$y_{n+1} = Ay_n + PA'(y_n)\ (y_{n+1} - y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4}$$

$$y_{n+1} = Ay_n + PA'(y_0)\ (y_{n+1} - y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{5}$$

Здесь P — линейный проекционный оператор ($P = P^2$), проектирующий пространство E на его подпространство E_p ($PE \to E_p \subseteq E$). Эти методы, с одной стороны, расширяют класс операторов, для которых разрешимо уравнение (1), так как требуется существование производных $PA'(y_n)$ и $PA'(y_0)$, что иногда является менее ограничительным требованием, чем требование существования производных $A'(y_n)$ и $A'(y_0)$. С другой стороны, методы (4), (5) являются более удобными, чем методы (2), (3) с вычислительной точки зрения.

Алгоритм (5) при предположениях, отличных от [3], исследуется также в монографии [4].

2. В данной заметке рассматриваются некоторые обобщения методов (4), (5), при которых проекционный оператор P может меняться от шага к шагу. Последовательные приближения определяются из уравнений

$$y_{n+1}=Ay_n+P_nA'(y_n)(y_{n+1}-y_n) \qquad (n=0,\,1,\,\ldots), \tag{6}$$

$$y_{n+1}=Ay_n+P_nA'(y_0)(y_{n+1}-y_n) \qquad (n=0,\,1,\,\ldots), \tag{7}$$

где $\{P_n\}$ — последовательность (некоторые из них могут повторяться) линейных проекционных операторов ($P_n=P_n^2$), проектирующих пространство E на его подпространства E_n ($E_n\subseteq E$).

При условии $P_0\equiv P_1\equiv\ldots=P_n\equiv\ldots\equiv P$, получаем алгоритмы (4), (5).

Нестационарные итеративные методы (6), (7) обладают всеми преимуществами общих нестационарных методов, одним из которых является то, что они в некоторых случаях позволяют значительно уменьшить объем вычислений.

Применим алгоритмы (6) и (7) к решению систем алгебраических или трансцендентных уравнений (конечных или бесконечных) вида

$$y_i=f_i(y_1,\,\ldots,\,y_k), \qquad i=1,\,\ldots,\,k.$$

В этом случае

$$Ay=\{f_i(y_1,\,\ldots,\,y_k)\}, \qquad i=1,\,\ldots,\,k,$$

$$A'(x)\,y=\left\{\sum_{j=1}^{k}f'_{ij}(x_1,\,\ldots,\,x_k)\,y_j\right\}, \qquad i=1,\,\ldots,\,k.$$

Следуя [5], определим операцию проектирования:

$$P_nA'(x)\,y=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{k}f'_{ij}(x_1,\,\ldots,\,x_k)\,y_j, & i=1,\,\ldots,\,N_n, \qquad n=0,\,1,\,\ldots,\\ 0, & i=N_n+1,\,\ldots,\,k.\end{cases}$$

Через f'_{ij} здесь обозначено $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. Теперь уравнения (6) и (7) записываются в виде

$$\begin{gathered}y_{i,n+1}=f_i(y_{1,n},\,\ldots,\,y_{k,n})+\sum_{j=1}^{k}f'_{ij}(y_{1,n},\,\ldots,\,y_{k,n})(y_{j,n+1}-y_{j,n}),\\ i=1,\,\ldots,\,N_n,\\ y_{i,n+1}=f_i(y_{1,n},\,\ldots,\,y_{k,n}), \qquad i=N_n+1,\,\ldots,\,k\end{gathered} \tag{8}$$

и

$$\begin{gathered}y_{i,n+1}=f_i(y_{1,n},\,\ldots,\,y_{k,n})+\sum_{j=1}^{k}f'_{ij}(y_{1,0},\,\ldots,\,y_{k,0})(y_{j,n+1}-y_{j,n}),\\ i=1,\,\ldots,\,N_n,\\ y_{i,n+1}=f_i(y_{1,n},\,\ldots,\,y_{k,n}), \qquad i=N_n+1,\,\ldots,\,k.\end{gathered} \tag{9}$$

В случае алгоритмов (8) и (9) последовательные приближения $y_n=\{y_{i,n}\}$ определяются из систем линейных алгебраических уравнений порядка N_n.

Как известно, если детерминанты $D(y_n)$ и D_0 систем (8), (9) отличны от нуля, то эти системы однозначно разрешимы. При этом в случае системы (8)

$$y_{i,n+1} = \frac{\sum_{m=1}^{N_n} D_{im}(y_n)\bar{f}_m(y_n)}{D(y_n)}, \quad i = 1, \ldots, N_n,$$

$$y_{i,n+1} = f_i(y_n), \quad i = N_n + 1, \ldots, k,$$

а в случае системы (9)

$$y_{i,n+1} = \frac{\sum_{m=1}^{N_n} D_{im}(y_0)\bar{f}_m(y_0)}{D_0}, \quad i = 1, \ldots, N_n,$$

$$y_{i,n+1} = f_i(y_n), \quad i = N_n + 1, \ldots, k,$$

где

$$\bar{f}_m(y_n) = f_m(y_n) - \sum_{j=1}^{k} f'_{mj}(y_n)\, y_{j,n} + \sum_{j=N_n+1}^{k} f'_{mj}(y_n) f_j(y_n),$$

$$m = 1, \ldots, k,$$

$$\bar{f}_m(y_0) = f_m(y_0) - \sum_{j=1}^{k} f'_{mj}(y_0)\, y_{j,n} + \sum_{j=N_n+1}^{k} f'_{mj}(y_0) f_j(y_0),$$

а $D_{im}(y_n)$, $D_{im}(y_0)$ — алгебраические дополнения элемента, находящегося на пересечении m-й строки и i-го столбца соответственно детерминантов $D(y_n)$ и D_0.

Рассмотрим пример. Система нелинейных алгебраических уравнений

$$y_i = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_j^i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

имеет решение $y_i = \frac{1}{2}$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

В данном случае

$$Ay = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_j^i\right\},$$

$$P_n A'(x)\, y = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} x_j^{i-1} y_j, & i = 1, 2, \ldots, N_n, \\ 0, & i = N_n + 1, \ldots \end{cases}$$

Для определения первого приближения выберем $N_0 = 3$, т. е.

$$P_0 A'(x)\, y = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} x_j^{i-1} y_j, & i = 1, 2, 3, \\ 0, & i = 4, 5, \ldots, \end{cases}$$

а для определения второго приближения выберем $N_0 = 2$, т. е

$$P_1 A'(x)\, y = \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} x_j^{i-1} y_j, & i = 1, 2, \\ 0, & i = 3, 4, \ldots \end{cases}$$

Алгоритм (8) в данном случае имеет вид

$$y_{i,n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_{j,n}^i + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{i}{2^{i+j}} y_{j,n}^{i-1} (y_{j,n+1} - y_{j,n}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N_n,$$

$$y_{i,n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_{j,n}^i, \qquad i = N_n + 1, \ldots$$

Исходя из начального приближения $y_{i,0} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$, получим для нахождения первого приближения систему уравнений:

$$y_{1,1} = \frac{1}{4} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{5} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^j} \left(y_{j,1} - \frac{1}{5}\right),$$

$$y_{2,1} = \frac{7}{16} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{25} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{5} \left(y_{j,1} - \frac{1}{5}\right),$$

$$y_{3,1} = \frac{31}{64} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{125} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{2^3} \cdot \frac{1}{2^j} \cdot \frac{1}{25} \left(y_{j,1} - \frac{1}{5}\right),$$

откуда $y_{1,1} = 0{,}4610$; $y_{2,1} = 0{,}4597$; $y_{3,1} = 0{,}4887$; $y_{i,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} \frac{1}{5^i}$, $i = 4, 5, \ldots$

Для нахождения второго приближения получаем систему:

$$y_{1,2} = 0{,}3143 + \frac{1}{8} y_{2,2} + \frac{1}{4} y_{1,2},$$

$$y_{2,2} = 0{,}4129 + 0{,}1153 y_{1,2} + 0{,}0575 y_{2,2},$$

$$y_{i,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_{j,1}^i, \qquad i = 3, 4, \ldots.$$

Из этой системы находим:

$$y_{1,2} = 0{,}4995, \quad y_{2,2} = 0{,}4995, \quad y_{i,2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4^i} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+j}} y_{j,1}^i, \quad i = 3, 4, \ldots$$

3. Сформулируем некоторые условия монотонности последовательности приближений (6), (7) для уравнений (1) с положительными операторами, дифференцируемыми по Фреше по конусу K [6].

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть оператор A имеет непрерывную производную Фреше по конусу K, причем на всех элементах $u \geqslant v \in K$ производная A' не убывает, тогда имеет место неравенство*

$$Au - Av - A'(v)(u - v) \geqslant \Theta. \qquad (10)$$

Доказательство. Используя формулу [6]

$$Au - Av = \int_0^1 A'[v + t(u - v)](u - v)\,dt \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

получим

$$Au - Av - A'(v)(u - v) = \int_0^1 A'[v + t(u - v)](u - v)dt - A'(v)(u - v) =$$

$$= \int_0^1 \{A'[v + t(u - v)] - A'(v)\}(u - v)\,dt \geqslant \Theta,$$

так как оператор A' не убывает на элементах

$$v + t(u - v) \geqslant v.$$

Таким образом, доказано, что

$$Au \geqslant Av + A'(v)(u - v) \text{ для всех } u \geqslant v \in K. \qquad (11)$$

Пусть теперь линейные положительные операторы P_n $(n = 0, 1, \ldots)$ такие, что

$$P_n A'u \leqslant A'u \text{ для всех } u \in K, \qquad (12)$$

тогда из соотношений (11) и (12) вытекает неравенство

$$Au \geqslant Av + P_n A'(v)(u - v), \qquad u \geqslant v \in K.$$

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *существует элемент $y_0 \geqslant \Theta$ такой, что $Ay_1 \geqslant y_1$, где*

$$y_1 = y_0 - [I - P_0 A'(y_0)]^{-1}(y_0 - Ay_0) \text{ и } y_1 \in K;$$

2) *на конусе K для операторов $I - P_n A'(y)$ существуют положительные обратные операторы*

$$[I - P_n A'(y)]^{-1};$$

3) *непрерывная производная Фреше по конусу оператора A не убывает на элементах $u \geqslant v \geqslant \Theta \in K$;*

4) *операторы P_n $(n = 0, 1, \ldots)$ удовлетворяют условию (12).*

Тогда, по крайней мере, начиная с номера $n = 1$ последовательные приближения (6) образуют монотонную последовательность.

Доказательство. Из уравнения (6) получаем

$$y_{n+1} = y_n + [I - P_n A'(y_n)]^{-1}(Ay_n - y_n), \qquad (13)$$

откуда при $n = 1$ следует

$$y_2 = y_1 + [I - P_1 A'(y_1)]^{-1}(Ay_1 - y_1).$$

Из последнего равенства и условий (1), (2) теоремы вытекает, что $y_2 \geqslant y_1 \in K$. Пусть доказано неравенство $y_{n-1} \geqslant y_{n-2}$.

Отняв от равенства

$$y_n = Ay_{n-1} + P_{n-1}A'(y_{n-1})(y_n - y_{n-1})$$

равенство $y_{n-1} = Ay_{n-2} + P_{n-2}A'(y_{n-2})(y_{n-1} - y_{n-2})$, получим

$$y_n - y_{n-1} = [I - P_{n-1}A'(y_{n-1})]^{-1}(Ay_{n-1} - Ay_{n-2} - P_{n-2}A'(y_{n-2})(y_{n-1} - y_{n-2}).$$

Учитывая утверждение леммы и условие 2) теоремы, можно записать

$$y_n - y_{n-1} \geqslant \Theta, \quad \text{т. е.} \quad y_n - y_{n-1} \in K, \quad y_n \geqslant y_{n-1}.$$

Таким образом, для всех n доказано соотношение

$$y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant \ldots \tag{14}$$

Как видно из теоремы 1, соотношение (14) имеет место при любом выборе последовательности операторов $\{P_n\}$, удовлетворяющих условию 4) теоремы. Этот факт позволяет в некоторых случаях существенно сократить объем вычислений. Так, например, в случае конечномерного банахова пространства при нахождении первых приближений можно выбирать операторы P_n так, чтобы они проектировали пространство E на $E_n \subseteq E$ большей размерности, чем при нахождении последующих приближений. Так было сделано в приведенном примере.

При $P_n = I$ из теоремы 1 получаются условия монотонности последовательности приближений (2). Эти условия являются менее ограничительными, чем соответствующие условия Л. Коллатца [7].

Используя утверждение теоремы 1, можно сформулировать следующий достаточный признак сходимости последовательных приближений (6).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1), 2), 4) *теоремы* 1 *и* $y_1 \leqslant y_0$. *Пусть конус K правилен, оператор A монотонен на K. Тогда уравнение* (1) *имеет решение* y^*, *которое может быть найдено методом последовательных приближений* (6).

Доказательство. Ввиду монотонности оператора A, производная Фреше по конусу оператора A является положительным, а значит, и монотонным оператором [6].

Из нормальности конуса K и результатов [8] следует непрерывность оператора A'. Следовательно, выполняется условие 3) теоремы 1.

Далее, из соотношения (13) при $n = 0$, положительности обратного оператора $[I - P_0A'(y_0)]^{-1}$ и неравенства $y_1 \leqslant y_0$ следует, что

$$y_0 - Ay_0 \geqslant \Theta, \quad Ay_0 \leqslant y_0.$$

По индукции доказывается, что

$$y_n - Ay_n \leqslant \Theta, \quad \text{т. е.} \quad Ay_n \geqslant y_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Так как монотонный оператор A преобразует отрезок $\langle y_1, y_0 \rangle$ в себя, то согласно теореме 4.1 [6] уравнение (1) имеет решение $y^* \geqslant \Theta$.

В силу правильности конуса K ограниченная снизу элементом y_1, а сверху элементом y_0 последовательность $\{y_n\}$ сходится к своему пределу $y^* \in \langle y_1, y_0 \rangle$, который является решением уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, т. 3, вып. 6, 1948.
2. Л. В. Канторович, П. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
3. Н. С. Курпель, Д. М. Мигович, О некоторых обобщениях метода Ньютона — Канторовича, УМЖ, т. 21, № 5, 1969.

4. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, Приближенное решение операторных уравнений, Физматгиз, М., 1969.
5. Н. С. Курпель, Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений, «Наукова думка», К., 1968.
6. М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1963.
7. Л. Коллатц, Функциональный анализ и вычислительная математика, «Мир», М., 1969.
8. В. Я. Стеценко, А. Р. Есаян, Теоремы о положительных решениях уравнений второго рода с нелинейными операторами, Матем. сб., т. 68 (110), № 4, 1965.

Поступила 2.IX 1970 г.
Институт математики АН УССР