УДК 517.944

О дважды разветвленном решении задачи Коши для одного класса параболических систем

М. П. Ленюк, А. Ф. Шестопал

При изучении некоторых смешанных задач для параболических систем с негладкой границей возникает необходимость в построении фундаментальных решений задачи Коши для параболических операторов в специальном римановом пространстве $\mathfrak{R}_n = \mathfrak{R}_2 \times E_{n-2}$, где $\mathfrak{R}_2$ — двулистная риманова поверхность с одной точкой ветвления, а E_k — k-мерное эвклидово пространство. В работах [1, 2] построены такие решения для параболических уравнений в случае, когда параболический оператор инвариантный относительно группы вращений, которая действует в пространстве $E_n = E_2 \times E_{n-2}$. В данной работе эти результаты переносятся на один класс параболических систем. Основным орудием для построения такого решения есть одно интегральное представление в $\mathfrak{R}_n$ обобщенной функции Дирака.

В эвклидовом пространстве E_n обозначим через $R^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$ квадрат расстояния между точками x и ξ, а через ω_n — величину площади единичной сферы в E_n. Пусть далее $j_\mu(s)$ обозначает «нормированную» функцию Бесселя

$$j_\mu(s) = 2^\mu \Gamma(\mu + 1) s^{-\mu} J_\mu(s), \tag{1}$$

$j_\mu(0) = 1$. При этих обозначениях имеет место такая теорема.

Теорема 1. *Пусть функция $f(t, \lambda)$ — непрерывная по совокупности переменных и такая, что при любом $\varepsilon > 0$*

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty f(t, \lambda) \lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda \tag{2}$$

равномерно сходится при $t > \varepsilon$ к обычной функции $G(t, x, \xi)$, причем $f(0, \lambda) = 1$. Тогда

$$\lim_{t \to +0} G(t, x, \xi) = \delta_\xi. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть f — инвариантная относительно вращений вокруг начала координат функция, для которой существует преобразование Фурье

$$\widetilde{f}(x - \xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{E_n} f(|\omega|)\, e^{i(\xi - x, \omega)} d\omega, \tag{4}$$

и ϱ — элемент ортогональной группы $O(n)$. Тогда $(\xi - x, \omega) = (\varrho^{-1}(\xi - x), \varrho^{-1}\omega)$ и

$$\widetilde{f}(\varrho(x-\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} f(|\omega|)\, e^{i(\xi - x, \varrho^{-1}\omega)} d\omega. \tag{5}$$

Сделаем в интеграле (5) замену переменных по формуле $\omega = \varrho\widetilde{\omega}$. Получим, учитывая инвариантность функции $f(|\omega|)$, что

$$\widetilde{f}(\varrho(x-\xi)) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} f(|\widetilde{\omega}|)\, e^{i(\xi - x, \widetilde{\omega})} d\widetilde{\omega} = \widetilde{f}(x-\xi),$$

т. е. функция $\widetilde{f}$ — инвариантная относительно вращений, а значит $\widetilde{f}$ является функцией эвклидового расстояния R: $\widetilde{f}(x-\xi) = \widetilde{f}(R)$. Полагая в (4) $x_1 - \xi_1 = p$, $x_2 = \xi_2, \ldots, x_n = \xi_n$ и переходя к сферическим координатам, имеем [3]:

$$\widetilde{f}(p) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} f(|\omega|)\, e^{ip\omega_1} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty f(\lambda)\,\lambda^{n-1} \times$$

$$\times \int\limits_0^\pi e^{ip\lambda\cos\varphi_1}\sin^{n-2}\varphi_1 d\varphi_1 d\lambda = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty f(\lambda)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda.$$

Следовательно, при $t > \varepsilon$

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n} f(t, |\omega|)\, e^{i(\xi - x, \omega)} d\omega \quad ,$$

причем из сходимости одного интеграла вытекает сходимость другого. Теперь формула (3) вытекает из того факта, что преобразование Фурье функции δ_ξ равно $e^{i(\xi,\omega)}$.

Рассмотрим теперь случай риманового пространства $\Re_n = \Re_2 \times E_{n-2}$. В $\Re_2$ будем пользоваться полярными координатами $(r, \varphi) : 0 < r < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 4\pi$, причем $\varphi \equiv \varphi \pmod{4\pi}$. Положение любой точки в $\Re_n$ будет определяться униформизирующими параметрами $(r, \varphi, x_3, \ldots, x_n)$, а координаты фиксированной точки ξ будут обозначаться через $(\rho, \varphi_0, \xi_3, \ldots, \xi_n)$. Через $\Re_2^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ обозначим k-й листок римановой поверхности, а точку, лежащую в k-м экземпляре риманового пространства, обозначим через x^k. Таким образом, $x^k \in \Re_2^{(k)} \times E_{n-2}$, причем первый экземпляр риманового пространства будем отождествлять с пространством E_n. Мы еще будем требовать, чтобы сумма $\delta_{\xi^1} + \delta_{\xi^2}$ при $x \in \Re_2^{(1)} \times E_{n-2}$ давала меру Дирака в E_n, сосредоточенную в точке $\xi \in E_n$.

Определение 1. Считаем, что в $\Re_n$ имеем интегральное представление δ-функции, соответствующее (2), если сумма δ_{ξ^1} и δ_{ξ^2} дает интегральное представление (2).

Теорема 2. *Интегральному представлению*

$$\delta_\xi = \lim_{t \to +0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda \tag{6}$$

в $\mathfrak{R}_n$ соответствует интегральное представление

$$\widetilde{\delta}_\xi = \lim_{t\to+0} \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^n \int_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2+s^2})\,ds\,d\lambda, \tag{7}$$

если непрерывная функция $f(t, \lambda)$ при $t > 0$ обеспечивает равномерную сходимость интегралов (6) *и* (7), *причем* $f(0, \lambda) = 1$.

Доказательство. Пусть точка ξ^1 лежит в первом экземпляре риманового пространства $\mathfrak{B}_n$ и имеет координаты $(\rho, \varphi_0, \xi_3, \ldots, \xi_n)$. Тогда точка ξ^2 имеет координаты $(\rho, \varphi_0 + 2\pi, \xi_3, \ldots, \xi_n)$. Поменяв в выражении для интегрального представления $\widetilde{\delta}_{\xi^2}$ переменную интегрирования s на $-s$, получим [3]

$$\widetilde{\delta}_{\xi^1} + \widetilde{\delta}_{\xi^2} = \lim_{t\to+0} \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^n \int_{-\infty}^{\infty} j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2+s^2})\,ds\,d\lambda =$$

$$= \lim_{t\to+0} \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}} \int_0^\infty f(t,\lambda)\,\lambda^n \frac{2\pi\omega_n}{\lambda\omega_{n+1}} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda = \delta_\xi.$$

Так как δ-образной последовательности непрерывных функций

$$\delta_\xi^\varepsilon = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int_0^\infty f(\varepsilon,\lambda)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda$$

в E_n в пространстве $\mathfrak{R}_n$ соответствует $\widetilde{\delta}$-образная последовательность

$$\widetilde{\delta}_\xi^\varepsilon = \int_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \delta^\varepsilon(\xi, x, s)\,ds,$$

то отсюда следует, что $\widetilde{\delta}_\xi$ — мера Дирака в $\mathfrak{R}_n$.

Применим представление (7) для нахождения в $\mathfrak{R}_n$ фундаментальной матрицы решений (ф. м. р.) задачи Коши параболической, по И. Г. Петровскому, системы

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) u = \sum_{k=0}^{m} A^{(k)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \tag{8}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_l)$, $A^{(k)} = \{A_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{l}$, причем $A^{(m)} = E$ — единичная матрица размерности $l \times l$.

Определение 2. Система (8) называется инвариантной относительно вращений вокруг начала координат, если характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\Phi(\lambda, z) = \det A(-i\lambda, z) = \det\left[\sum_{k=0}^{m} A^{(k)}(-i\lambda_1, \ldots, -i\lambda_n)\, z^k\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{ml} B_k(-\lambda^2)\, z^k \equiv \Phi(-\lambda^2, z), \tag{9}$$

$\lambda^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$, $B_{ml}(-\lambda^2) = 1$.

Рассмотрим сначала случай эвклидового пространства. Положим $u = Tv$ и подберем, пользуясь правилами Крамера [4], матрицу T так, чтобы

$$Au = ATv = \Phi\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) Ev = \Phi\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) Ev, \tag{10}$$

где E — единичная матрица размерности $l \times l$ $(v = v_1, v_2, \ldots, v_l)$. Матрица T имеет вид

$$T = \sum_{k=0}^{m(l-1)} T_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k},$$

$T_{m(l-1)} = E$ — единичная матрица размерности $(l-1)\times(l-1)$.

Теорема 3. *Инвариантная по $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ относительно вращений вокруг начала координат ф. м. р. задачи Коши для системы* (8) *имеет вид*

$$G(t, R) = TG_0(t, R) = \sum_{k=0}^{m(l-1)} T_k\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_0(t, R), \tag{11}$$

где

$$G_0(t, R) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \varphi(t, \lambda^2)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}dz}{\Phi(-\lambda^2, z)}\right)\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\, d\lambda$$

— ф. р. задачи Коши для уравнения (10), *через γ обозначен контур в комплексной z-плоскости, охватывающий все нули характеристического полинома* (9).

Доказательство. Дифференцируя при $t > 0$ по x и t под знаком интегралов и учитывая (10) и тождество

$$\Delta j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R) = -\lambda^2 j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R),$$

получим

$$AG(t, R) = ATG_0(t, R) = \Phi\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) EG_0(t, R) =$$

$$= E\sum_{k=0}^{ml} B_k(\Delta)\frac{\partial^k}{\partial t^k} G_0(t, R) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} E\int_0^\infty \psi(t, \lambda^2) j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\lambda^{n-1} d\lambda,$$

где

$$\psi(t, \lambda^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{zt}dz \equiv 0.$$

Выполнение условий

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial^k G_0}{\partial t^k} = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots, ml-2, \\ \delta_\xi \text{ при } k = ml-1 \end{cases}$$

следует из тождеств

$$\int\limits_{\gamma} \frac{z^k dz}{\Phi(-\lambda^2, z)} = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots, ml - 2, \\ 1 \text{ при } k = ml - 1 \end{cases}$$

и интегрального представления (2). Поэтому при $t \to +0$ имеем

$$\lim_{t \to +0} \frac{\partial^k G(t, R)}{\partial t^k} = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, 1, \ldots, m - 2, \\ \delta_{\xi} \text{ при } k = m - 1. \end{cases}$$

В случае риманового пространства $\mathfrak{R}_n$ справедлива такая теорема.

Теорема 4. *Дважды разветвленная ф. м. р. задачи Коши для системы* (8) *дается формулой*

$$G_2(t, R) = T \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\varrho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} G_0(t, R, s)\, ds,$$

где $G_0(t, R, s)$ — *неразветвленное ф. р. задачи Коши с особенностью в точке* $(\xi, 0)$ *для уравнения*

$$\sum_{k=0}^{ml} B(\Delta_s) \frac{\partial^k v}{\partial t^k} = 0, \quad \Delta_s = \Delta + \frac{\partial^2}{\partial s^2}.$$

Доказательство теоремы следует из интегрального представления (7), формулы (11) и тождества

$$\Delta \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\varrho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2 + s^2})\, ds = -\lambda^2 \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\varrho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2 + s^2})\, ds,$$

которое легко проверяется, если учесть, что

$$\Delta_s j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2 + s^2}) = -\lambda^2 j_{\frac{n-1}{2}}(\lambda\sqrt{R^2 + s^2}).$$

Пример 1. Для системы уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_{11}\Delta u_1 + a_{12}\Delta u_2, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_{21}\Delta u_1 + a_{22}\Delta u_2 \end{aligned} \tag{12}$$

характеристический полином

$$\Phi(-\lambda^2, z) = z^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda^2 z + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\lambda^4, \tag{13}$$

матрица

$$T = \frac{\partial}{\partial t} E - \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \Delta,$$

где a_{ik} $(i,\ k=1,\ 2)$ — действительные числа, Δ — n-мерный оператор Лапласа, E — единичная матрица размерности 2×2. Ф. р. задачи Коши для уравнения

$$\Phi\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right)v = \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (a_{11}+a_{22})\,\Delta\frac{\partial}{\partial t} + (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\,\Delta^2\right]v = 0,$$

$$G_0(t, R) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty \varphi(t, \lambda^2)\,\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda,$$

где

$$\varphi(t, \lambda^2) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2a_2\lambda^2}\left(e^{-b_1t\lambda^2} - e^{-b_2t\lambda^2}\right) & \text{при } z_1 \neq z_2, \\ -a_1\lambda^2 e^{-a_1\lambda^2 t} & \text{при } z_1 = z_2, \end{cases}$$

$z_1,\ z_2$ — корни характеристического полинома (13), $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_1 - a_2$, $a_1 = \frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})$, $a_2 = \frac{1}{2}\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}$. Ф. м. р. задачи Коши для системы (12)

$$G(t, R) = TG_0(t, R) =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\begin{cases} \int\limits_0^\infty \left(A_1e^{-b_1\lambda^2 t} - A_2e^{-b_2\lambda^2 t}\right)\lambda^{n-1} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda & \text{при } z_1 \neq z_2, \\ \int\limits_0^\infty Aa_1e^{-a_1\lambda^2 t}\lambda^{n+3} j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda R)\,d\lambda & z_1 = z_2, \end{cases}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_1 - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} b_i - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & b_i - a_{11} \end{pmatrix} \quad (i = 1,\ 2).$$

Дважды разветвленная ф. м. р. задачи Коши для системы (12) имеет вид

$$G_2(t, R) = \frac{\omega_{n+1}}{(2\pi)^{n+1}}\int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\varrho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} \begin{cases} \int\limits_0^\infty \left(A_1e^{-b_1\lambda^2 t} - A_2e^{-b_2\lambda^2 t}\right)\lambda^n j_{\frac{n-1}{2}}\left(\lambda\sqrt{R^2+s^2}\right)d\lambda ds \\ \qquad \text{при } z_1 \neq z_2, \\ \int\limits_0^\infty Aa_1e^{-a_1\lambda^2 t}\lambda^{n+4} j_{\frac{n-1}{2}}\left(\lambda\sqrt{R^2+s^2}\right)d\lambda ds \\ \qquad \text{при } z_1 = z_2. \end{cases}$$

Пример 2. Для системы уравнений [6]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \Delta u_i + a\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{13'}$$

характеристический полином

$$\Phi(-\lambda^2, z) = (z+\lambda^2)^2\,[z + (a+1)\,\lambda^2],$$

матрица

$$T = \Delta B - (B + \Delta E)\frac{\partial}{\partial t} + E\frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

где $\Delta = \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, E — единичная матрица размерности 3×3,

$$B = \begin{pmatrix} (a+1)\Delta - a\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & -a\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & -a\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -a\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & (a+1)\Delta - a\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & -a\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -a\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} & -a\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} & (a+1)\Delta - a\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Ф. р. задачи Коши для уравнения

$$\Phi\left(\Delta, \frac{\partial}{\partial t}\right) v = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)^2 \left[\frac{\partial}{\partial t} - (a+1)\Delta\right] v = 0,$$

$$G_0(t, R) = \frac{\omega_3}{(2\pi)^3} \int\limits_0^\infty \left[\frac{te^{-\lambda^2 t}}{a\lambda^4} + \frac{e^{-(a+1)\lambda^2 t} - e^{-\lambda^2 t}}{a\lambda^4}\right] \lambda^2 j_{\frac{1}{2}}(\lambda R)\, d\lambda.$$

ф. м. р. задачи Коши для системы (13′)

$$G(t, R) = TG_0(t, R),$$

которая была построена другим путем С. Д. Ейдельманом [6]. Дважды разветвленная ф. м. р. задачи Коши для системы (13′) имеет вид

$$G_2(t, R) = \frac{\omega_4}{(2\pi)^4} T \int\limits_0^\infty \left[\frac{te^{-\lambda^2 t}}{a\lambda^2} + \frac{e^{-(a+1)\lambda^2 t} - e^{-\lambda^2 t}}{a\lambda^4}\right] \lambda^3 \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi - \varphi_0}{2}} j_1\left(\lambda\sqrt{R^2 + s^2}\right) d\lambda\, ds.$$

Пример 3. Рассмотрим систему уравнений, описывающую распространение возмущений в вязко-упругой среде [7]:

$$\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} P_1 \vec{u} + P_2 \vec{u}, \tag{14}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$, $P_k = c_k\Delta + (c_k + a_k)\,\mathrm{grad\,div}$ $(k = 1, 2)$ — операторы теории упругости, a_k, c_k — положительные постоянные. Характеристический полином

$$\Phi(-\lambda^2, z) = [z^2 + c_1\lambda^2 z + c_2\lambda^2]^2 [z^2 + (c_1 + a_1)\lambda^2 z + (c_2 + a_2)\lambda^2].$$

Матрица

$$T = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_1\Delta\frac{\partial}{\partial t} - c_2\Delta\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} E + T_1\frac{\partial}{\partial t} + T_2\right),$$

где E — единичная матрица размерности 3×3, а

$$T_k=\begin{pmatrix} -(c_k+a_k)\Delta+a_k\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & a_k\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & a_k\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} \\ a_k\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & -(c_k+a_k)\Delta+a_k\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & a_k\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} \\ a_k\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & a_k\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & -(c_k+a_k)\Delta+a_k\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{pmatrix},$$

$k=1,\ 2;\ \Delta=\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

Ф. р. задачи Коши для уравнения

$$\Phi\left(\Delta,\frac{\partial}{\partial t}\right)v=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-c_1\Delta\frac{\partial}{\partial t}-c_2\Delta\right)^2\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}-(c_1+a_1)\Delta\frac{\partial}{\partial t}-\right.$$

$$\left.-(c_2+a_2)\Delta\right]v=0,$$

$$G_0(t,R)=\frac{\omega_3}{(2\pi)^3}\int_0^\infty\varphi(t,\lambda^2)\lambda^2 j_{\frac{1}{2}}(\lambda R)\,d\lambda,$$

где

$$\varphi(t,\lambda^2)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{e^{zt}dz}{\Phi(-\lambda^2,z)}.$$

Ф. м. р. задачи Коши для системы (14) $G(t,R)=TG_0(t,R)$, а дважды разветвленная ф. м. р. задачи Коши для системы (14) имеет вид

$$G_2(t,R)=\frac{\omega_4}{(2\pi)^4}T\int_0^\infty\varphi(t,\lambda^2)\lambda^3\int_{-\infty}^{2\sqrt{r\varrho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}} j_1(\lambda\sqrt{R^2+s^2})\,d\lambda ds.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Шестопал, Метод разложений по фундаментальным решениям в применении к задачам математической физики, Автореф. докт. дисс., К., 1969.
2. В. В. Федорчук, Разложение решений параболических уравнений по фундаментальным решениям задачи Коши, Автореф. канд. дисс., К., 1968.
3. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
4. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, ч. I, Физматгиз, М., 1958.
5. Е. И. Ким, Л. П. Иванова, Об условиях разрешимости некоторой граничной задачи для одной параболической системы, ДАН СССР, т. 139, № 4, 1961.
6. С. Д. Эйдельман, О связи между фундаментальными матрицами решений параболических и эллиптических систем, Матем. сб., т. 35, № 1, 1954.
7. Е. М. Шемякин, Распространение нестационарных возмущений в вязко-упругой среде, ДАН СССР, т. 104, № 1, 1955.

Поступила 26.VI 1970 г.

Институт математики АН УССР