УДК 517.5

К теории однолистных конформных отображений, осуществляемых некоторыми классами неванлинновских аналитических функций

П. Г. Тодоров

Изученные в работе [1, § 1, 2] мероморфные функции, взятые с обратным знаком, принадлежат к общему классу N аналитических функций Р. Неванлинны, отображающих полуплоскость $\{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$ в полуплоскость $\{w;\ \operatorname{Im} w \geqslant 0\}$ и соответственно $\{z;\ \operatorname{Im} z < 0\}$ в $\{w;\ \operatorname{Im} w \leqslant 0\}$. Для этого класса имеет место интегральное представление (см., например, [2, стр. 117—120])

$$N \ni w = f(z) = \mu z + \nu + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\tau z}{\tau - z}\, d\sigma(\tau) \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{1}$$

где $\mu \geqslant 0$ и ν — действительные постоянные, а $\sigma(\tau)$ — действительная монотонно возрастающая функция с ограниченной вариацией, поэтому

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}, \ \frac{\operatorname{Im} f(z)}{\operatorname{Im} z} \geqslant 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0). \tag{2}$$

Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+\tau^2)\ d\sigma(\tau) < +\infty$, формулу (1) можно преобразовать так, чтобы подынтегральная функция зависела только от ядра $(\tau - z)^{-1}$, каноническое представление которого удобнее при поисках однолистных областей функций $w \in N$.

В данной работе изучаются однолистные отображения в разрезанной z-плоскости, осуществляемые некоторыми другими подклассами класса N, а именно подклассами с каноническим интегральным представлением:

$$w = f_1(z) = \int\limits_{a}^{b} \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z}\ , \ z \overline{\in} \{z;\ a \leqslant z \leqslant b\}, \tag{3}$$

$$w = f_2(z) = \int\limits_{a}^{+b} \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z}\ , \ z \overline{\in} \{z;\ z \geqslant a\}, \tag{4}$$

$$w = f_3(z) = \int\limits_{-\infty}^{b} \frac{d\sigma(\tau)}{\tau - z}\ , \ z \overline{\in} \{z;\ z \leqslant b\}, \tag{5}$$

где $-\infty < a < b < +\infty$ и $\sigma(\tau)$ — действительная строго монотонно возрастающая функция с ограниченной вариацией (не обязательно непрерывная). Эти подклассы назовем неполными классами Неванлинны первого, второго и третьего рода и обозначим соответственно $N(a, b)$, $N(a, +\infty)$ и $N(-\infty, b)$.

В исследовании однолистных областей введенных классов важную роль выполняют соотношения (2). Для уточнения этих соотношений установим следующую лемму.

Лемма. *В соответственно разрезанной конечной z-плоскости каждая неванлинновская функция $w = f_j(z)$ $(j = 1, 2, 3)$ первого, второго и третьего рода удовлетворяет соотношениям:*

$$f_j(z) = \overline{f_j(\bar{z})}, \quad \frac{\operatorname{Im} f_j(z)}{\operatorname{Im} z} > 0 \quad (\operatorname{Im} z \neq 0), \tag{6}$$

$$\operatorname{Im} f_j(z) = 0 \quad (\operatorname{Im} z = 0), \tag{7}$$

причем действительная функция $w = f_j(x)$ реализует взаимно однозначное отображение каждого сегмента действительной оси, на котором она определена.

Доказательство. Так как рассуждения для всех трех классов одни и те же, рассмотрим лишь класс $N(a, +\infty)$. Пусть $z \overline{\in} \{z;\, z \geqslant a\}$ — произвольно фиксированная конечная точка. Тогда первое соотношение в (6) следует из первого соотношения в (2), поскольку $N(a, +\infty) \subset N$. Чтобы доказать второе точное соотношение в (6), отделим в (4) мнимую часть:

$$\operatorname{Im} f_2(z) = \operatorname{Im} z \int_a^{+\infty} \frac{d\sigma(\tau)}{|\tau - z|^2}. \tag{8}$$

На сегменте $a \leqslant \tau \leqslant +\infty$ функция $|\tau - z|^{-2}$ непрерывна и ограничена (в точках a и $+\infty$ она конечна), а $\sigma(\tau)$ строго монотонна, поэтому по теореме о среднем (см., например, [3, стр. 116]) существует число τ_0, $a < \tau_0 < +\infty$, такое, что

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\sigma(\tau)}{|\tau - z|^2} = \frac{\sigma(+\infty) - \sigma(a)}{|\tau_0 - z|^2} > 0 \quad (0 < \sigma(+\infty) - \sigma(a) < +\infty), \tag{9}$$

откуда с учетом (8), если $\operatorname{Im} z \neq 0$, получаем точное неравенство (6).

Если $\operatorname{Im} z = 0$, то из (8) следует (7). Для действительной функции $w = f_2(x)$, $x \in (-\infty, a)$, интеграл в правой части (8) (при $z = x$) равняется производной $w' = f_2'(x)$, так что из (9) получаем $f_2'(x) > 0$, т. е. отображение сегмента $(-\infty, a)$ взаимно однозначно. Лемма доказана.

Рассмотрим сначала однолистное отображение, осуществляемое функциями класса $N(a, b)$. Из (3) при $\left|z - \frac{a+b}{2}\right| > \frac{b-a}{2}$ легко получаем разложение

$$w = f_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{\left(z - \frac{a+b}{2}\right)^n}, \tag{10}$$

где коэффициенты

$$c_n = -\int_a^b \left(\tau - \frac{a+b}{2}\right)^{n-1} d\sigma(\tau) \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{11}$$

являются моментами функции $\sigma(\tau)$ относительно интервала $[a, b]$. Из (10) видно, что точка $z = \infty$ правильна (простой нуль). Так как

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f_1(z) = -c_1 = \int_a^b d\sigma(\tau) = \sigma(b) - \sigma(a) > 0, \tag{12}$$

то сумма ряда (10) — однолистная функция в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки с центром $z = \frac{a+b}{2}$. Следовательно, продолжая аналитично степенной ряд (10) интегралом (3) в соответственно разрезанной z-плоскости, можно утверждать, что однолистное отображение некоторой окрестности точки $z=\infty$ с центром $z = \frac{a+b}{2}$ осуществляет и каждая функция $w = f_1(z) \in N(a, b)$.

Теорема 1. *В расширенной z-плоскости каждая неванлинновская функция первого рода реализует однолистное конформное отображение круговой области $G \setminus \{z;\ z = a,\ b\}$, где*

$$\overline{G} = \left\{z; \left| z - \frac{a+b}{2} \right| \geqslant \frac{b-a}{2} \right\}. \tag{13}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можем принять $a = -1$, $b = 1$ (преобразования $\tau = \frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}$, $w(t) = \sigma\left(\frac{b-a}{2} t + \frac{a+b}{2}\right)$, $z = \frac{b-a}{2}\zeta + \frac{a+b}{2}\Big)$. Итак, пусть функция $f_1(z) \in N(-1, 1)$, а D обозначает полукруг $D = \overline{G} \cap \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ $(\overline{G} = \{z, |z| \geqslant 1\})$. Если допустить, что в D есть две конечные w-точки $z_{1,2}$, соответствующие точке $w = f_1(z_1) \in \{w;\ \operatorname{Im} w > 0\}$, то

$$\Delta f_1(z_1 z_2) = \frac{f_1(z_1) - f_1(z_2)}{z_1 - z_2} \int_{-1}^{1} \frac{\tau^2 - (\overline{z}_1 + \overline{z}_2)\tau + \overline{z}_1\overline{z}_2}{|\tau - z_1|^2 |\tau - z_2|^2}\, d\sigma(\tau) = 0, \tag{14}$$

в частности $\Delta f_1(z_1, z_1) = f_1'(z_1) = 0$ при $z_2 = z_1$. Если теперь по методу, изложенному в работе [1, §1], вместе с (14) удовлетворить уравнению

$$(z_1 + z_2)\, \Delta f_1(z_1, z_2) = 0 \tag{15}$$

и отделить мнимую часть, то получим

$$\int_{-1}^{1} g(\tau)\, d\sigma(\tau) = 0, \tag{16}$$

где $g(\tau)$ — действительная функция:

$$g(\tau) = \frac{(\tau^2 - |z_2|^2 \operatorname{Im} z_1 + (\tau^2 - |z_1|^2) \operatorname{Im} z_2}{|\tau - z_1|^2 |\tau - z_2|^2}. \tag{17}$$

Легко убедиться, что при сделанных предположениях относительно $z_{1,2}$ функция (17) непрерывна и ограничена при $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$ и удовлетворяет неравенству $g(\tau) < 0$ при $-1 < \tau < 1$. Следовательно (напомним, что $\sigma(\tau)$ строго монотонна), к интегралу в левой части (16) применима теорема о среднем [3, стр. 116], т. е. существует число τ_0, $-1 < \tau_0 < 1$, такое, что

$$\int_{-1}^{1} g(\tau)\, d\sigma(\tau) = g(\tau_0)\,[\sigma(1) - \sigma(-1)] < 0 \quad (0 < [\sigma(1) - \sigma(-1)] < \infty). \tag{18}$$

Из полученного противоречия между (16) и (18) заключаем, что полукруг D не может содержать другой w-точки, отличной от z_1, и, в частности, что z_1 не может быть кратной w-точкой, т. е. $f_1'(z_1) \neq 0$. Этим доказано, что D отображается однолистно конформно в некоторую область $D \in \{w;\ \operatorname{Im} w > 0\}$. Согласно лемме, так будет отображаться и симметричный относительно оси $\{z;\ \operatorname{Im} z = 0\}$ полукруг $D' = \overline{G} \cap \{z;\ \operatorname{Im} z < 0\}$ в область $D' \in \{w;\ \operatorname{Im} w < 0\}$, симметричную с D относительно оси $\{w;\ \operatorname{Im} w = 0\}$. Далее, из леммы следует, что действительная функция $w = f_1(x)$ отображает взаимно однозначно сегменты $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ соответственно в сегменты $(0, +\infty)$ и $(-\infty, 0)$, к которым, согласно принципу сохранения области, должны примыкать области D и D'. Наконец, замечая, что точка $z = \infty$ — единственный простой нуль функции $f_1(z)$, получаем доказательство теоремы 1 полностью.

В работе [4] Л. Чакалов рассмотрел класс $N(-1,1)$, когда $\sigma(\tau) \neq \mathrm{const}$ — монотонно возрастающая (не обязательно строго) функция с ограниченной вариацией и установил, что в конечной z-плоскости однолистное отображение имеет место в открытом круге $G = \{z;\ |z| > 1\}$. Ясно, что, требуя чтобы $\sigma(\tau)$ была строго монотонно возрастающей (не обязательно непрерывной) функцией с ограниченной вариацией, из теоремы 1 получаем лучшую информацию об однолистном отображении в сравнении с указанным результатом Л. Чакалова.

Отметим, что результат Л. Чакалова (имеющий место и в расширенной z-плоскости) можно получить очень просто нашим методом, воспроизведя доказательство теоремы 1. Действительно, если в классе $N(-1,1)$ предположить, что $\sigma(\tau) \neq \mathrm{const}$ — вообще монотонно возрастающая функция с ограниченной вариацией, то сохраняют свою силу утверждения леммы, так как в соответствующем равенстве (8) для функций $f_1(z)$ промежутком интегрирования является $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$, для которого точно $|\tau - z|^{-2} > 0$ при конечных $z \overline{\in} \{z;\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$, т. е. снова можно воспользоваться упоминавшейся теоремой о среднем. Далее, применение теоремы о среднем к интегралу в (16) тоже законно, поскольку функция $g(\tau)$, заданная равенствам (17), в замкнутом интервале $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$ удовлетворяет точному неравенству $g(\tau) < 0$, при условии, что w-точки $z_{1,2}$ принадлежат открытому кругу $G = \{z;\ >|z| > 1\}$.

Рассмотрим теперь однолистные отображения, осуществляемые функциями классов $N(a, +\infty)$ и $N(-\infty, b)$. Из-за разрезов, которые идут до бесконечности, тут будем рассматривать конечную z-плоскость.

Докажем следующее основное предложение.

Т е о р е м а 2. *Каждая неванлинновская функция второго (третьего) рода реализует однолистное конформное отображение конечной полуплоскости* $\overline{M}_{-\infty} \setminus \{z;\ z = a\}$ *(соответственно конечной полуплоскости* $\overline{M}_{+\infty} \setminus \{z;\ z = b\}$*), где*

$$\overline{M}_{-\infty} = \{z; \operatorname{Re} z \leqslant a\}, \tag{19}$$

$$\overline{M}_{+\infty} = \{z, \operatorname{Re} z \geqslant b\}. \tag{20}$$

З а м е ч а н и е. Полуплоскости (19) и (20) можно рассматривать как круги с центрами соответственно $z = +\infty$ и $z = -\infty$, в которые круг (13) вырождается соответственно при $b = +\infty$, $a = -\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся классом $N(a, +\infty)$, так как рассуждения для класса $N(-\infty, b)$ такие же. Итак, пусть $f_2(z) \in N(a, +\infty)$, а D будет квадрантом $D = \overline{M}_{-\infty} \cap \{z;\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Если предположить, что $z_{1,2} \in D$ — две w-точки, соответствующие точке $w = f_2(z_1) \in \{w;\ \operatorname{Im} w > 0\}$, то

$$\Delta f_2(z_1, z_2) = \frac{f_2(z_1) - f_2(z_2)}{z_1 - z_2} = \int_a^\infty \frac{\tau^2 - |\overline{z}_1 + \overline{z}_2|\tau + \overline{z}_1\overline{z}_2}{|\tau - z_1|^2 |\tau - z_2|^2}\, d\sigma(\tau) = 0, \tag{21}$$

причем $\Delta_{f_2}(z_1, z_1) = f_2'(z_1) = 0$, если z_1 — кратная точка. Если отделить мнимую часть в указанном интервале, то получим, что

$$\int_a^\infty h(\tau)\, d\sigma(\tau) = 0, \tag{22}$$

где

$$h(\tau) = \frac{(\tau - \operatorname{Re} z_2) \operatorname{Im} z_1 + (\tau - \operatorname{Re} z_1) \operatorname{Im} z_2}{|\tau - z_1|^2 |\tau - z_2|^2}. \tag{23}$$

Из предположений относительно z_1, z_2 видно, что функция (23) непрерывна и ограничена на сегменте $a \leqslant \tau \leqslant \infty$ (ограничена, потому что на концах этого отрезка она конечна) и удовлетворяет неравенству $h(\tau) > 0$, если $a < \tau < \infty$. А так как $\sigma(\tau)$ строго монотонна, то согласно упоминавшейся теореме о среднем существует число τ_0, $a < \tau_0 < \infty$, такое, что

$$\int_a^\infty h(\tau)\, d\sigma(\tau) = h(\tau_0)[\sigma(\infty) - \sigma(a)] > 0 \quad (0 < [\sigma(\infty) - \sigma(a)] < \infty). \tag{24}$$

Из противоречия между (22) и (24) заключаем, что D не может содержать другой w-точки, отличной от z_1 и, в частности, что z_1 — простая w-точка. Этим мы установили, что D отображается однолистно конформно, откуда, применяя лемму, получаем, что так же отображается и полуплоскость $\overline{M}_{-\infty} \setminus \{z;\ \ z = a\}$.

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Тодоров, К теории однолистных конформных отображений, осуществляемых мероморфными функциями с простыми полюсами и положительными вычетами. УМЖ, т. 22, № 3, 1970.
2. Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, Физматгиз, М., 1961.
3. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, «Наука», М., 1966.
4. Л. Чакалов, Максимальные области однолистности некоторых классов аналитических функций, УМЖ, т. XI, № 4, 1959.

Поступила 12.VIII 1970 г.

Пловдив, Болгария