УДК 517.944

О единственности решения задачи Коши для некоторых систем уравнений с переменными коэффициентами

Н. Н. Чаус

Рассмотрим задачу Коши (з. К.)

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u,\quad u(x,t)\,|_{t=0}=u_0(x),$$

где элементы матрицы $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — полиномы от $\frac{\partial}{\partial x}$ с коэффициентами, зависящими от x. Имеется ряд работ, в которых получены классы единственности решения такой з. К. при тех или иных ограничениях на $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Случай $2b$-параболических, по И. Г. Петровскому, систем, $x\in E_n$, $t\in$

$\in [0, T]$ и ограниченных коэффициентов полностью разобрал Г. Н. Золотарев [1]; случай одного произвольного уравнения, одномерного x, $t \in [0, \infty)$ и неограниченных коэффициентов исследовал Я. И. Житомирский [2]. Для общих систем уравнений, $x \in E_n$, $t \in [0, T]$, получили определенные классы единственности Т. Яманака [3] (для случая полиномиальных коэффициентов) и Я. И. Житомирский [4] (для более общего случая коэффициентов — специальных целых функций). Имеется также работа Н. Н. Чауса [5] по уравнению второго порядка с неограниченными неаналитическими коэффициентами, $x \in E_n$, $t \in [0, T]$. Результаты в [3—5] относятся лишь к случаю коэффициентов, имеющих ограничения на рост при $|x| \to \infty$, который определяется приведенным порядком системы, и никаких классов единственности для случая более сильно растущих коэффициентов не устанавливается.

В данной заметке с помощью методики, примененной в [5], получены классы единственности решения з. К. для систем вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(L)\, u, \tag{1}$$

где элементы произвольной $m \times m$-матрицы $P(L)$ — полиномы от L с постоянными коэффициентами, а выражение L имеет вид

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_k} + q(x_1, \ldots, x_n) \ (k \leqslant n). \tag{2}$$

Достаточно рассмотреть случай $k = 1$, но нам удобнее будет сразу получить формулировки для $k \geqslant 1$. Обозначим через $q_0(x_1, \ldots, x_n)$ положительную, неубывающую по каждому из переменных $x_i > 0$ функцию с условием

$$|q(x_1, \ldots, x_n)| \leqslant q_0(|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad (-\infty < x_i < \infty).$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $p > 1$ — *приведенный порядок системы* (1), $q(x_1, \ldots, x_n)$ *в* (2) — *дифференцируемая комплекснозначная функция.*

I. *Если в качестве* $q_0(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (*здесь и в дальнейшем точкой с запятой будем разделять* k-*е и* $k+1$-*е места переменных функций* $q_0(x_1, \ldots, x_n)$) *может быть взята такая функция, что* $y q_0(y, \ldots, y; r, \ldots, r)$ *является при каждом фиксированном* $r > 0$ *выпуклой книзу функцией по* y *и выполнено условие*

$$\int_1^{\infty} \frac{dy}{q_0(y, \ldots, y; r, \ldots, r)^{p-1}} = \infty, \tag{3}$$

то всякое решение системы (1), (2) *в полосе* $[0, T] \times E_n$, *удовлетворяющее начальному условию* $u(x, 0) = 0$ *и оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{ \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k,\\ k < i \leqslant n}} |x_j|\, q_0(|x_j|, \ldots, |x_j|; |x_i|, \ldots, |x_i|) \right\}, \tag{4}$$

тождественно равно нулю.

II. *Если функции* $q_0(x_1, \ldots, x_n)$ *с условием* (3) *найти нельзя, то рассматриваемая з. К. будет иметь лишь тривиальное решение, если потребовать для решения выполнение условия*

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{ \lambda_1 \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k,\\ k < i \leqslant n}} |x_j|\, q_0(|x_j|, \ldots, |x_j|; |x_i|, \ldots, |x_i|) - \right.$$

$$\left. - (1 + \lambda K)\, G(x_{m_1}, \ldots, x_{m_{k+1}}) \right\}, \tag{5}$$

где $C > 0$, λ, $\lambda_1 \geqslant 0$ — *произвольные постоянные и* $\lambda_1 < \lambda$, K — *число слагаемых в* Σ; $G(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1})$ — *произвольная функция, для которой выполняется неравенство*

$$G(\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}) > (|\xi_1| + 2r)\, q_0(|\xi_2| + 2r, \ldots, |\xi_{k+1}| + 2r;\ r, \ldots, r)$$

при достаточно большом $|\xi_1| + \ldots + |\xi_{k+1}|$, *зависящем от* r; *каждое из чисел* $m_1, \ldots, m_{k+1}$ *может быть выбрано независимо из множества* $1, \ldots, k$.

Заметим, что в случае одной пространственной переменной условие (5) имеет вид

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\{-C_1 G(|x|, |x|)\}, \quad C_1 > 0.$$

Автору неизвестно, насколько это условие является жестким, но первая часть теоремы в случае $q(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{const}$ дает необходимые и достаточные условия для единственности решения з. К.

Заметим также, что от решения $u(x, t)$ в теореме требуется не достаточно высокая дифференцируемость по x_i, а возможность последовательного применения к нему нужного числа выражений L.

Основную роль при доказательстве теоремы играет множество функций $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ вида

$$\varphi = \varphi_0(x_1 + y, \ldots, x_k + y;\ x_{k+1}, \ldots, x_n)\, e^{-\int\limits_0^y q(x_1+y-\xi, \ldots, x_k+y-\xi;\ x_{k+1}, \ldots, x_n)\, d\xi},$$

где $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ пробегает совокупность финитных дифференцируемых функций.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Определенная выше функция* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -L^+\varphi, \quad L^+ = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_k} + q(x_1, \ldots, x_n)$$

и имеют место оценки:

а) $|\varphi| \leqslant C_2 \exp\{(1 + 2K)(|y| + r)\, q_0(r + |y|, \ldots, r + |y|;\ r, \ldots, r) - 2 \sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k \\ k < i \leqslant n}} |x_j|\, q_0(|x_j|, \ldots, |x_j|;\ |x_i|, \ldots, |x_i|)\}$;

б) $|\varphi| \leqslant C_2 \exp\{(1 + \lambda K)\, G(x_{m_1}, \ldots, x_{m_{k+1}}) + C_3 - \lambda \sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant k, \\ k < i \leqslant n}} |x_j|\, q_0(|x_j|, \ldots, |x_j|;\ |x_i|, \ldots, |x_i|)\}$,

где C_2, C_3 и r *определяются выбором* $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$, *а остальные обозначения здесь те же, что и в формулировке теоремы.*

Доказательство леммы. Благодаря финитности функции $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n)$ можно указать такое $r > 0$, что оценки а) и б) имеют место для тех точек $(x_1, \ldots, x_n, y)$, для которых $|x_1 + y| + \ldots + |x_k + y| + |x_{k+1}| + \ldots + |x_n| \geqslant r$. Поэтому нам остается получить а) и б) в области, где одновременно

$$|x_1 + y| < r, \ldots, |x_k + y| < r,\ |x_{k+1}| < r, \ldots, |x_n| < r.$$

В любом случае для $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$ справедлива оценка

$$|\varphi| \leqslant C_0 \exp\{(r + |y|)\, q_0(r + |y|, \ldots, r + |y|;\ r, \ldots, r)\}.$$

Так как в рассматриваемой области переменных

$$|x_j| < r + |y| \ (j = 1, \ldots, k), \ |x_i| < r \ (i = k + 1, \ldots, n),$$

то

$$(r+|y|)\,q_0(r+|y|,\ldots,r+|y|;\,r,\ldots,r)>|x_j|\,q_0(|x_j|,\ldots$$
$$\ldots,|x_j|;\;|x_i|,\ldots,|x_i|),$$

и справедливость неравенства а) становится очевидной. Если учесть что в, рассматриваемой области также $|y|<|x_j|+r$ $(j=1,\ldots,k)$, то оценку для $|\varphi|$ можно получить другую:

$$|\varphi|\leqslant C_0\exp\{(1+\lambda K)(r+|y|)\,q_0(r+|y|,\ldots,r+|y|;\,r,\ldots,r)-$$
$$-\lambda\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant k,\\ k<i\leqslant n}}|x_j|\,q_0(|x_j|,\ldots,|x_j|;\,|x_i|,\ldots,|x_i|)\}\leqslant$$
$$\leqslant C_0\exp\{(1+\lambda K)(2r+|x_{m_1}|)\,q_0(2r+|x_{m_2}|,\ldots,2r+|x_{m_{k+1}}|;\,r,\ldots,r)-$$
$$-\lambda\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant k,\\ k<i\leqslant n}}|x_j|\,q_0(|x_j|,\ldots,|x_j|;\,|x_i|,\ldots,|x_i|)\},$$

откуда понятна справедливость б). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $u(x,t)=(u_1(x_1,\ldots,x_n,t),\ldots$ $\ldots,u_m(x_1,\ldots,x_n,t))$ — решение з. К.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P(L)\,u,\quad u(x,0)\equiv 0.$$

Возьмем одну из функций $\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)$ из леммы и рассмотрим вектор-функцию $v(y,t)=(v_1(y,t),\ldots,v_m(y,t))$, где

$$v_i(y,t)=(u_i,\varphi)=\int_{E_n}u_i(x_1,\ldots,x_n,t)\,\varphi(x_1,\ldots,x_n,y)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Справедливы равенства

$$\frac{\partial v_i(y,t)}{\partial t}=(P_{i1}(L)\,u_1+\ldots+P_{im}(L)\,u_m,\varphi)=(u_1,P_{i1}(L^+)\,\varphi)+\ldots$$
$$\ldots+(u_m,P_{im}(L^+)\,\varphi)=P_{i1}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)v_1(y,t)+\ldots+P_{im}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)v_m(y,t).$$

Таким образом, $v(y,t)$ оказывается решением следующей системы уравнений с постоянными коэффициентами: $\dfrac{\partial v}{\partial t}=P\left(-\dfrac{\partial}{\partial y}\right)v$.

Кроме того, понятно, $v(y,0)=0$.

Теперь предположим, что рассматриваемые $u_i(x_1,\ldots,x_n;\,t)$ удовлетворяют условиям I теоремы. Тогда мы воспользуемся оценкой а) для φ и получим для функций $v_i(y,t)$:

$$|v_i(y,t)|\leqslant C\exp\{(1+2K)(r+|y|)\,q_0(r+|y|,\ldots,r+|y|;\,r,\ldots,r)\}.$$

Согласно результатам по единственности решения з. К. для систем с постоянными коэффициентами [6] последнее неравенство для $v_i(y,t)$ влечет $v_i(y,t)\equiv 0$. Учитывая, что это справедливо для любой финитной дифференцируемой $\varphi(x_1,\ldots,x_n,0)=\varphi_0(x_1,\ldots,x_n)$, мы получаем $u_i(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n,t)\equiv 0$, что и требовалось доказать.

Если $u(x_1,\ldots,x_n,t)$ таково, что мы находимся в условиях II теоремы, то при исследовании аналогичных функций $v_i(y,t)$ следует воспользоваться оценкой б) для φ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Золотарев, О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского, Изв. вузов, Математика, № 2(3), 1958.
2. Я. И. Житомирский, Классы единственности решения задачи Коши, УМН, т. 21, № 5, 1966.
3. T. Yamanaka, A note on the Cauchy problem for equations with polynomial coefficients, Funkcialaj Ekvacioj, vol. 10, N 1, 1967
4. Я. И. Житомирский, О дифференциальных операторах бесконечного порядка в пространствах типа S, Матем. сб., т. 80(122): 3(11), 1969.
5. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, ДАН СССР, т. 191, № 6, 1970.
6. Н. Н. Чаус, О единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных, УМЖ, т. 17, № 1, 1965.

Поступила 19.III 1970 г.

Институт математики АН УССР