УДК 539.3

К расчету толстых упругих плит, боковая поверхность которых неортогональна к плоским граням

В. Г. Юрьев

До настоящего времени точное решение уравнений Ляме для толстой плиты

$$\Delta\overline{U} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla^2\overline{U} = 0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, ν — коэффициент Пуассона, ∇ — оператор Гамильтона, $\nabla^2 = \nabla\nabla$ (операторы Гамильтона, перемноженные диадно), $\overline{U}$ — вектор смещения, удовлетворяющий граничным условиям загружения плоских граней и геометрическим условиям закрепления боковых граней плиты, никому не удалось получить. Поэтому развитие теории упругости для толстых плит было направлено на использование приближенных методов. В некоторых из этих методов используется приближенное уравнение равновесия, полученное на базе гипотез относительно напряженно-деформированного состояния плиты [1—3]. В иных используется точное решение системы уравнений Ляме при приближенном удовлетворении граничных условий на плоских гранях и боковой поверхности плиты [4—6]. Однако число дискретных граничных условий на боковой поверхности плиты ограничивалось свойствами функций, используемых в представлении решения, и количество этих условий обычно не превышало двух.

В данной работе описан метод, позволяющий при точном удовлетворении уравнений Ляме выполнить произвольное количество дискретных граничных условий на боковой поверхности плиты и при этом точно выполнить некоторые условия загружения плоских граней.

Рассмотрим плиту, боковая поверхность которой неортогональна к плоским граням. Представим решение уравнения (1) в виде конечной суммы [7]

$$\overline{U} = \sum_{j=1}^{s} \overline{u}_j = \sum_{j=1}^{s} [\varphi_j(z)\Phi_j\overline{k} + \psi_j(z)\nabla\Phi_j], \tag{2}$$

где s — произвольное целое число, $\overline{k}$ — орт оси z, функции $\Phi_j = \Phi_j(x, y)$ произвольной системы координат, плоскость которых перпендикулярна оси z и совпадает со срединной плоскостью плиты толщиной $2\,h$, определяются уравнениями:

$$\Delta\Phi_j \pm \lambda_j^2\Phi_j = 0. \tag{3}$$

Подставляя решение (2) в уравнение (1), получаем

$$2(1-\nu)\sum_{j=1}^{s}\left[\varphi_j''\Phi_j\overline{k}+\psi_j(\nabla\Delta\Phi_j)\right]+\sum_{j=1}^{s}\left[(1-2\nu)(\psi_j''\nabla\Phi_j+\right.$$
$$\left.+\varphi_j\Delta\Phi_j\overline{k})+\varphi_j'\nabla\Phi_j+\psi_j'\overline{k}\Delta\Phi_j\right]=0, \tag{4}$$

а затем в (4) равенство (3) —

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{2(1-\nu)\varphi_j''\mp\lambda_j^2\left[(1-2\nu)\varphi_j+\psi_j'\right]\right\}\Phi_j\overline{k}+$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\left[\varphi_j'\mp 2(1-\nu)\lambda_j^2\psi_j+(1-2\nu)\psi_j''\right]\nabla\Phi_j=0. \tag{5}$$

Таким образом, для того, чтобы найти уравнения, которым удовлетворяют функции $\psi_j(z)$, $\varphi_j(z)$, получаем следующую систему дифференциальных уравнений для каждого j:

$$2(1-\nu)\varphi_j''\mp\lambda_j^2\left[(1-2\nu)\varphi_j+\psi_j'\right]=0,$$
$$\varphi_j'\mp 2\lambda_j^2(1-\nu)\psi_j+(1-2\nu)\varphi_j''=0. \tag{6}$$

Решая систему (6), находим, что функции $\psi_j(z)$ и $\varphi_j(z)$, соответственно, удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\psi_j^{[4]}\mp 2\lambda_j^2\psi_j^{[2]}+\lambda_j^4\psi_j=0, \tag{7}$$

$$\lambda_j^2\varphi_j=(3-2\nu)\lambda_j^2\psi_j^{[1]}\mp 2(1-\nu)\psi_j^{[3]}, \tag{8}$$

где обозначения, стоящие в квадратных скобках, указывают на порядок производной по z, а верхний (нижний) знак в выражениях, имеющих двойной знак, соответствует верхнему (нижнему) знаку в уравнениях (3).

Исходя из уравнений (7), (8), получаем, что функции $\psi_j(z)$ и $\varphi_j(z)$ имеют вид:

$$\psi_j(z)=A_{1j}S(\lambda_j z)+A_{2j}C(\lambda_j z)+A_{3j}zS(\lambda_j z)+A_{4j}zC(\lambda_j z), \tag{9}$$

$$\varphi_j(z)=\left[\lambda_j A_{1j}-(3-4\nu)A_{4j}+A_{3j}\lambda_j z\right]C(\lambda_j z)\pm\left[\lambda_j A_{2j}\mp(3-4\nu)A_{3j}+\right.$$
$$\left.+A_{4j}\lambda_j z\right]S(\lambda_j z), \tag{10}$$

где функции $S(\lambda_j z)$ и $C(\lambda_j z)$ являются гиперболическими (тригонометрическими) функциями в случае верхнего (нижнего) знака в уравнении (3), а A_{pj} — произвольные постоянные.

Таким образом, представление вектора смещений $\overline{U}$ в виде (2) позволило вместо интегрирования системы уравнений Ляме (1) перейти к задаче о собственных функциях плоского гармонического оператора $\Delta\Phi_j$.

Для определения произвольных постоянных A_{pj} в (9) и (10) необходимо рассмотреть условия загружения плоских граней плиты $z=\pm h$. Рассмотрим условия нагружения плоских граней плиты для выбранной структуры вектора смещений (2) нормальной нагрузкой при $z=+h$

$$\sigma_{zz}=P_1(x,y)=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{1j}\Phi_j,\quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0, \tag{11}$$

при $z=-h$

$$\sigma_{zz}=P_2(x,y)=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{2j}\Phi_j,\quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=0. \tag{12}$$

Тензор напряжений для представления (2) имеет вид

$$\sigma = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{j=1}^{s} \{[(1-\nu)\varphi_j' \mp \lambda_j^2 \nu \psi_j] \Phi_j \overline{k}\overline{k} + \psi_j \nabla^2 \Phi_j\} +$$

$$+ \nu(\varphi_j' \mp \lambda_j^2 \psi_j) \Phi_j (I - \overline{k}\overline{k}) + \frac{1-2\nu}{2} (\varphi_j + \psi_j')(\nabla \Phi_j \overline{k} + \overline{k} \nabla \Phi_j), \tag{13}$$

где E — модуль упругости первого рода, а I — единичный тензор.

Постоянные A_{pj} имеют следующий вид:

$$A_{1j} = B_{1j}(\gamma_{1j} - \gamma_{2j}), \quad A_{2j} = B_{2j}(\gamma_{1j} + \gamma_{2j}),$$

$$A_{3j} = B_{3j}(\gamma_{1j} + \gamma_{2j}), \quad A_{4j} = B_{4j}(\gamma_{1j} - \gamma_{2j}), \tag{14}$$

где

$$B_{1j} = \frac{(1+\nu)[-\eta_j S(\eta_j) \pm (1-2\nu) C(\eta_j)]}{2E\lambda_j^2 [\eta_j - S(\eta_j) C(\eta_j)]}, \quad B_{3j} = \frac{-(1+\nu) S(\eta_j)}{2E\lambda_j [\eta_j + S(\eta_j) C(\eta_j)]},$$

$$B_{2j} = \frac{(1+\nu)[\pm \eta_j C(\eta_j) \mp (1-2\nu) S(\eta_j)]}{2E\lambda_j^2 [\eta_j + S(\eta_j) C(\eta_j)]}, \quad B_{4j} = \frac{\pm (1+\nu) C(\eta_j)}{2E\lambda_j [\eta_j - S(\eta_j) C(\eta_j)]}. \tag{15}$$

Принимая во внимание обозначение $\eta_j = \lambda_j h$ и обозначая через $\widetilde{z} = \frac{z}{h}$, запишем выражения (9) и (10) в следующем виде:

$$\psi_j(\widetilde{z}) = \gamma_{1j} \{[B_{1j} + h\widetilde{z} B_{3j}] S(\eta_j \widetilde{z}) + [B_{2j} + h\widetilde{z} B_{4j}] C(\eta_j \widetilde{z})\} +$$

$$+ \gamma_{2j} \{[-B_{1j} + h\widetilde{z} B_{3j}] S(\eta_j \widetilde{z}) + [B_{2j} - h\widetilde{z} B_{4j}] C(\eta_j \widetilde{z})\}, \tag{16}$$

$$\varphi_j(\widetilde{z}) = \gamma_{1j} \{[\lambda_j B_{1j} - (3-4\nu) B_{4j} + \eta_j \widetilde{z} B_{3j}] C(\eta_j \widetilde{z}) \pm$$

$$\pm [\lambda_j B_{2j} \mp (3-4\nu) B_{3j} + \eta_j \widetilde{z} B_{4j}] S(\eta_j \widetilde{z})\} + \gamma_{2j} \{[-\lambda_j B_{1j} +$$

$$+ (3-4\nu) B_{4j} + \eta_j \widetilde{z} B_{3j}] C(\eta_j \widetilde{z}) \pm [\lambda_j B_{2j} \pm (3-4\nu) B_{3j} - \eta_j \widetilde{z} B_{4j}] S(\eta_j \widetilde{z})\}, \tag{17}$$

а тензор напряжений (13) в виде

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \sum_{j=1}^{s} \langle \pm \{[[\lambda_j^2 B_{1j} - 2(1-\nu)\lambda_j B_{4j} + \lambda_j \eta_j B_{3j} \widetilde{z}] S(\eta_j \widetilde{z}) +$$

$$+ [\lambda_j^2 B_{2j} \mp 2(1-\nu)\lambda_j B_{3j} + \lambda_j \eta_j B_{4j} \widetilde{z}] C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{1j} +$$

$$+ [[-\lambda_j^2 B_{1j} - 2(1-\nu)\lambda_j B_{4j} + \lambda_j \eta_j B_{3j} \widetilde{z}] S(\eta_j \widetilde{z}) + [\lambda_j^2 B_{2j} \mp 2(1-\nu)\lambda_j B_{3j} -$$

$$- \eta_j \lambda_j B_{4j} \widetilde{z}] C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{2j}\} \Phi_j \overline{k}\overline{k} \pm 2\nu \{[-\lambda_j B_{1j} S(\eta_j \widetilde{z}) \mp \lambda_j \eta_j B_{3j} \widetilde{z} C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{1j} +$$

$$+ [\lambda_j B_{4j} S(\eta_j \widetilde{z}) \mp \lambda_j \widetilde{z} \eta_j B_{3j} C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{2j}\} \Phi_j (I - \overline{k}\overline{k}) +$$

$$+ \{[(B_{1j} + h\widetilde{z} B_{3j}) S(\eta_j \widetilde{z}) + (B_{2j} + h\widetilde{z} B_{4j}) C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{1j} +$$

$$+ [(-B_{1j} + h\widetilde{z} B_{3j}) S(\eta_j \widetilde{z}) + (B_{2j} - h\widetilde{z} B_{4j}) C(\eta_j \widetilde{z})] \gamma_{2j}\} \nabla^2 \Phi_j +$$

$$+ \{[\pm [\lambda_j B_{2j} \mp (1-2\nu) B_{3j} + \eta_j B_{4j} \widetilde{z}] S(\eta_j \widetilde{z}) +$$

$$+ [\lambda_j B_{1j} - (1-2\nu) B_{4j} + \eta_j B_{3j}\tilde{z}] C(\eta_j \tilde{z})] \gamma_{1j} + [\pm [\lambda_j B_{2j} \mp (1-2)\nu B_{3j} -$$

$$- \eta_j B_{4j}\tilde{z}] S(\eta_j \tilde{z}) - [\lambda_j B_{1j} - (1-2\nu) B_{4j} - \eta_j B_{3j}\tilde{z}] C(\eta_j \tilde{z})] \gamma_{2j}\} (\nabla \Phi_j \bar{k} + \bar{k} \nabla \Phi_j)\rangle. \tag{18}$$

Для того, чтобы иметь возможность удовлетворить любому количеству дискретных граничных условий на боковой поверхности плиты, установим связь между параметрами λ_j в следующем виде:

$$\lambda_j = f(j, \omega), \tag{19}$$

где ω — общий параметр для всех λ_j, а вид функции f до некоторой степени произвольный, однако должен соответствовать виду области занятой плитой в плане и свойствам решения уравнений (3) для этой области.

Если только установлен вид функции f, то в выражениях (2) и (13) остается лишь один неизвестный параметр ω, для нахождения которого достаточно рассмотреть, например, однородные граничные условия, заданные на неортогональной боковой поверхности плиты, которые имеют вид:

$$u_x = \sum_{j=1}^{s} \psi_{j\text{г}}(\tilde{z}) \frac{\partial \Phi_{j\text{г}}}{\partial x} = 0, \quad u_y = \sum_{j=1}^{s} \psi_{j\text{г}}(\tilde{z}) \frac{\partial \Phi_{j\text{г}}}{\partial y} = 0, \tag{20}$$

$$u_z = \sum_{j=1}^{s} \varphi_{j\text{г}}(\tilde{z}) \Phi_{j\text{г}} = 0.$$

Граничные условия (2) выполним в двух точках с соответствующими координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{z}_1)$, $(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{z}_2)$. Тогда при $s = 4$ получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \beta_{pj}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{j\text{г}}^{(1)}}{\partial x} = -[\beta_{14}^{(1)} + \varepsilon \beta_{24}^{(1)}] \frac{\partial \Phi_{4\text{г}}^{(1)}}{\partial x},$$

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \beta_{pj}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{j\text{г}}^{(1)}}{\partial y} = -[\beta_{14}^{(1)} + \varepsilon \beta_{24}^{(1)} \frac{\partial \Phi_{4\text{г}}^{(1)}}{\partial y},$$

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \alpha_{pj}^{(1)} \Phi_{j\text{г}}^{(1)} = -[\alpha_{14}^{(1)} + \varepsilon \alpha_{24}^{(1)}] \Phi_{4\text{г}}^{(1)},$$

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \beta_{pj}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{j\text{е}}^{(2)}}{\partial x} = -[\beta_{14}^{(2)} + \varepsilon \beta_{24}^{(2)}] \frac{\partial \Phi_{4\text{г}}^{(2)}}{\partial x},$$

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \beta_{pj}^{(2)} \frac{\partial \Phi_{j\text{г}}^{(2)}}{\partial y} = -[\beta_{14}^{(2)} + \varepsilon \beta_{24}^{(2)}] \frac{\partial \Phi_{4\text{г}}^{(2)}}{\partial y}, \tag{21}$$

$$\sum_{p=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} \xi_{pj} \alpha_{pj}^{(2)} \Phi_{j\text{г}}^{(2)} = -[\alpha_{14}^{(2)} + \varepsilon \alpha_{24}^{(2)}] \Phi_{4\text{г}}^{(2)},$$

где

$$\xi_{pj} = \frac{\gamma_{pj}}{\gamma_{14}}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma_{24}}{\gamma_{14}},$$

$$\beta_{1j}(\widetilde{z}) = [B_{1j} + h\widetilde{z}B_{3j}]\,S(\eta_j\widetilde{z}) + [B_{2j} + \widetilde{h}zB_{4j}]\,C(\eta_j\widetilde{z}),$$

$$\beta_{2j}(\widetilde{z}) = [-B_{1j} + h\widetilde{z}B_{3j}]\,S(\eta_j\widetilde{z}) + [B_{2j} - h\widetilde{z}B_{4j}]\,C(\eta_j\widetilde{z}),$$

$$\alpha_{1j}(\widetilde{z}) = [\lambda_j B_{1j} - (3-4\nu)\,B_{4j} + \eta_j\widetilde{z}B_{3j}]\,C(\eta_j\widetilde{z}) \pm$$

$$\pm\,[\lambda_j B_{2j} \mp (3-4\nu)\,B_{3j} + \eta_j\widetilde{z}B_{4j}]\,S(\eta_j\widetilde{z}), \tag{22}$$

$$\alpha_{2j}(\widetilde{z}) = [-\lambda_j B_{1j} + (3-4\nu)\,B_{4j} + \eta_j\widetilde{z}B_{3j}]\,C(\eta_j\widetilde{z}) \pm$$

$$\pm\,[\lambda_j B_{2j} \pm (3-4\nu)\,B_{3j} + \eta_j\widetilde{z}B_{4j}]\,S(\eta_j\widetilde{z}),$$

которые входят в состав функций $\psi_j(\widetilde{z})$ и $\varphi_j(\widetilde{z})$, приведенных в (16), (17), следующим образом:

$$\psi_j(\widetilde{z}) = \gamma_{1j}\beta_{1j}(\widetilde{z}) + \gamma_{2j}\beta_{2j}(\widetilde{z}), \quad \varphi_j(\widetilde{z}) = \gamma_{1j}\alpha_{1j}(\widetilde{z}) + \gamma_{2j}\alpha_{2j}(\widetilde{z}), \tag{23}$$

кроме того, значение функций $\Phi_{j\Gamma}$, α_{1j}, α_{2j}, β_{1j}, β_{2j} взяты в точках на контурах боковой поверхности плиты с соответствующими координатами.

Решение системы (21) (при заданном отношении ε) относительно ξ_{pj} позволяет нам построить класс допустимых нагрузок, а также определить напряженно-деформированное состояние плиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Г. Галеркин, Собрание сочинений, т. I, Изд-во АН СССР, 1952.
2. В. З. Власов, Метод начальных функций в задачах теории упругости, Изв. АН СССР, № 7, 1955.
3. А. И. Лурье, Пространственные задачи теории упругости, ГИТТЛ, 1955.
4. В. И. Блох, К общей теории толстых упругих плит, Инженерный сборник, т. XVIII, 1954.
5. С. А. Алексеев, Изгиб толстых плит, Тр. ВВИА, вып. 312, 1949.
6. П. Ф. Папкович, Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы, ДАН СССР, нов. сер., т. 27, № 4, 1940.
7. В. М. Дєєв, До розрахунку товстих пружних плит, ДАН УРСР, № 3, 1959.

Поступила 27.II 1970 г.
Харьков, УЗПИ