

## К вопросу возмущения устойчивого инвариантного тора динамической системы

В. Л. Г о л е ц

Выяснение условий сохранения инвариантного многообразия динамической системы при малых ее возмущениях приводит к исследованию системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(\varphi, y)y + c(\varphi), \quad (1)$$

где  $\varphi (= \varphi_1, \dots, \varphi_m)$  — угловые координаты,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  — нормальные координаты.

Достаточные условия существования инвариантного тордиального многообразия

$$\Gamma : y = u(\varphi) \quad (2)$$

такой системы при малых значениях  $c(\varphi)$  даны в [1—8].

Доказано, в частности в [6, 7], что система (1) с непрерывными дифференцируемыми функциями  $a, b, c$  имеет инвариантный тор, лишь только

$$\beta(\varphi) + \alpha(\varphi) > 0, \quad \min_{\varphi} \beta(\varphi) > 0, \quad (3)$$

где  $\beta, \alpha$  — величины, определяемые неравенствами

$$\min_{\|\eta\|=1} (-b(\varphi, 0)\eta, \eta) \geq \beta(\varphi), \quad \min_{\|\xi\|=1} \left( \frac{\partial a(\varphi, 0)}{\partial \varphi} \xi, \xi \right) > \alpha(\varphi), \quad (4)$$

в которых  $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$  — обычное скалярное произведение в  $E_n$ ,  $\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ .

При выполнении условий (3) тор  $\Gamma: y = u(\varphi)$  системы (1) является непрерывным. Если считать функции  $a, b, c, r$  раз ( $r \geq 2$ ) непрерывно дифференцируемыми и предположить выполнимость условий

$$\beta(\varphi) + r\alpha(\varphi) > 0, \quad \min_{\varphi} \beta(\varphi) > 0, \quad (5)$$

то инвариантный тор системы (1) будет  $r-1$  раз непрерывно дифференцируемым [4—5].

В этой работе, следуя [1], рассмотрим системы (1), в которых  $a, b, c$  — липшицевые функции. Наша задача состоит в том, чтобы получить для таких систем условия существования инвариантного многообразия (2), аналогичные условиям (3), (5).

Эту задачу будем решать, используя принцип сжатых отображений по общей системе метода интегральных многообразий [1].

1°. Итак, рассматриваем систему (1), где  $a(\varphi, y), b(\varphi, y), c(\varphi)$  — периодические по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  функции, заданные в полосе

$$\|y\| \leq \varrho \quad (6)$$

и удовлетворяющие определенным условиям малости.

Предположим, что правая часть системы (1) удовлетворяет условиям:

1. Матрица  $b(\varphi, y)$  удовлетворяет неравенству

$$\langle b(\varphi, y)\eta, \eta \rangle \leq -\lambda \langle \eta, \eta \rangle, \quad (7)$$

$\lambda > 0$  для всех  $\eta$  и всех  $\varphi, y$  из полосы (6),  $\langle x, \eta \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \eta_i$  — обычное скалярное произведение евклидова пространства  $E_n$ .

2. Функции  $a(\varphi, y), c(\varphi)$  и матрица  $b(\varphi, y)$  удовлетворяют условиям Липшица по переменным

$$\begin{aligned} \|a(\varphi, y) - a(\bar{\varphi}, \bar{y})\| &\leq \bar{\alpha} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \alpha_1 \|y - \bar{y}\|, \\ \|b(\varphi, y) - b(\bar{\varphi}, \bar{y})\| &\leq \beta \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \beta_1 \|y - \bar{y}\|, \\ \|c(\varphi) - c(\bar{\varphi})\| &\leq \delta_1 \|\varphi - \bar{\varphi}\| \end{aligned} \quad (8)$$

для всех  $\varphi, y, \bar{\varphi}, \bar{y}$  из области  $\|y\| \leq \varrho$ .

Положим

$$\max_{\varphi} \|c(\varphi)\| = \delta \quad (9)$$

и перейдем к выяснению условий существования инвариантного тора системы (1). Такой тор будем искать в виде (2), где  $u(\varphi)$  — периодическая

или, учитывая, что  $z_\tau^\tau = 0$ ,

$$z_\tau^t = \Omega_\tau^t(\varphi, F) \int_\tau^t \Omega_{t_1}^\tau(\varphi, F) [b(\varphi_{t_1}^F(\varphi), F(\varphi_{t_1}^F(\varphi))) - b(\varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi}), \bar{F}(\varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi})))] \Omega_{t_1}^t(\bar{\varphi}, \bar{F}) dt_1. \quad (21)$$

Но

$$\begin{aligned} & \|b(\varphi_{t_1}^F(\varphi), F(\varphi_{t_1}^F(\varphi))) - b(\varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi}), \bar{F}(\varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi})))\| \leq \beta \|\varphi_{t_1}^F(\varphi) - \varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi})\| + \\ & + \beta_1 \|F(\varphi_{t_1}^F(\varphi)) - \bar{F}(\varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi}))\| \leq (\beta + \beta_1 \Delta) \|\varphi_{t_1}^F(\varphi) - \varphi_{t_1}^{\bar{F}}(\bar{\varphi})\| + \\ & + \beta_1 \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0 \leq \\ & \leq (\beta + \beta_1 \Delta) e^{\mu t_1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \left[ (\beta + \beta_1 \Delta) \frac{\alpha_1}{\mu} (e^{\mu t_1} - 1) + \beta_1 \right] \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0, \end{aligned} \quad (22)$$

поэтому, учитывая (20) — (22), для  $z_\tau^0$  получаем оценку

$$\begin{aligned} \|z_\tau^0\| & \leq \int_\tau^0 \|\Omega_{t_1}^0(\varphi, F)\| \left\{ (\beta + \beta_1 \Delta) e^{-\mu t_1} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \right. \\ & \left. + \left[ (\beta + \beta_1 \Delta) \frac{\alpha_1}{\mu} (e^{-\mu t_1} - 1) + \beta_1 \right] \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0 \right\} \|\Omega_{t_1}^t(\bar{\varphi}, \bar{F})\| dt_1 \leq \\ & \leq n^2 \frac{(\beta + \beta_1 \Delta)}{\mu} e^{\lambda \tau} (e^{-\mu \tau} - 1) \|\varphi - \bar{\varphi}\| + n^2 \left\{ \frac{(\beta + \beta_1 \Delta) \alpha_1}{\mu^2} e^{\lambda \tau} (e^{-\mu \tau} - 1) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{(\beta + \beta_1 \Delta) \alpha_1}{\mu} - \beta_1 \right] e^{\lambda \tau} \right\} \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0. \end{aligned} \quad (23)$$

4°. Определим на  $C(D, \Delta)$  оператор  $S_\varphi$ , положив

$$S_\varphi(F) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\varphi, F) C(\varphi_\tau^F(\varphi)) d\tau.$$

Неподвижная точка этого оператора и даст нам искомое выражение  $u(\varphi)$  для инвариантного тора системы (1). Для существования такой точки помимо сделанных раньше предположений придется наложить некоторые ограничения на постоянные  $D, \Delta$ , а также на параметры  $\lambda, \alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \delta$  и  $\delta_1$ , характеризующие рассматриваемую систему дифференциальных уравнений. Сущность этих ограничений связана с определенной характеристикой потока траекторий системы (1) при  $c=0$  и с малостью функции  $c(\varphi)$ . Перейдем к выяснению этих ограничений. Для этого оценим  $S_\varphi(F)$  и  $S_\varphi(F) - S_\varphi(\bar{F})$ . Имеем

$$\begin{aligned} \|S_\varphi(F)\| & \leq \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\varphi, F)\| \cdot \|c(\varphi)\|_0 d\tau \leq \frac{n\delta}{\lambda}, \\ \|S_\varphi(F) - S_\varphi(\bar{F})\| & \leq \int_{-\infty}^0 \|z_\tau^0\| \cdot \|c(\varphi)\|_0 d\tau + \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\bar{\varphi}, \bar{F})\| \cdot \|c(\varphi_\tau^F(\varphi)) - \\ & - c(\varphi_\tau^{\bar{F}}(\bar{\varphi}))\| d\tau \leq \int_{-\infty}^0 \|z_\tau^0\| d\tau \delta + \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0\| \cdot \|\varphi_\tau^F(\varphi) - \varphi_\tau^{\bar{F}}(\bar{\varphi})\| d\tau \cdot \delta_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda > \mu. \quad (25)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^0 \|z_{\tau}^0\| d\tau \leq \frac{n^2(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda(\lambda - \mu)} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \frac{n^2}{\lambda^2} \left[ \frac{(\beta + \beta_1\Delta)\alpha_1}{(\lambda - \mu)} + \beta_1 \right] \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0, \quad (26)$$

$$\int_{-\infty}^0 \|\Omega_{\tau}^0\| \cdot \|\varphi_{\tau}^F(\varphi) - \varphi_{\tau}^F(\bar{\varphi})\| d\tau \leq \frac{n}{\lambda - \mu} \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \frac{n\alpha_1}{\lambda(\lambda - \mu)} \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|S_{\varphi}(F) - S_{\bar{\varphi}}(\bar{F})\| &\leq \frac{n}{\lambda - \mu} \left[ \delta \frac{n(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda} + \delta_1 \right] \|\varphi - \bar{\varphi}\| + \\ &+ \frac{n}{\lambda(\lambda - \mu)} \left[ \frac{(\lambda - \alpha)\beta_1 + \beta\alpha_1}{\lambda} n\delta + \alpha_1\delta_1 \right] \|F(\varphi) - \bar{F}(\varphi)\|_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Функция  $S_{\varphi}(F)$  является, очевидно, периодической по  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому, если потребовать выполнения неравенств

$$\begin{aligned} \frac{n\delta}{\lambda} \leq D, \quad \frac{n}{\lambda - \mu} \left[ \delta \frac{n(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda} + \delta_1 \right] \leq \Delta, \\ \frac{n}{\lambda(\lambda - \mu)} \left[ \frac{(\lambda - \alpha)\beta_1 + \beta\alpha_1}{\lambda} n\delta + \alpha_1\delta_1 \right] < 1, \end{aligned} \quad (28)$$

то оператор  $S_{\varphi}$  будет переводить класс функций  $C(D, \Delta)$  в себя и будет сжимающим в  $C(D, \Delta)$ .

В силу принципа сжатых отображений в  $C(D, \Delta)$  будет существовать единственная неподвижная точка  $F(\varphi) = u(\varphi)$  оператора  $S_{\varphi}$ :

$$u(\varphi) = S_{\varphi}(u) \equiv \int_{-\infty}^0 \Omega_{\tau}^0(\varphi, u) c(\varphi_{\tau}(\varphi)) d\tau, \quad (29)$$

следовательно, будет существовать инвариантный тор системы (1). Таким образом, ограничения на параметры  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta$  и  $\delta_1$ , обеспечивающие существование инвариантного тора системы (1), выражаются неравенствами (25), (28).

5°. Обозначим

$$\gamma = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad \mu_0 = \lambda + \alpha \quad (30)$$

и перепишем неравенства (25), (28) в виде

$$\frac{n\delta}{\lambda} \leq D, \quad \mu_0 > \alpha_1\Delta, \quad \frac{n\delta}{\lambda} \leq \frac{\Delta(\mu_0 - \alpha_1\Delta)}{n(\beta + \beta_1\Delta) + \lambda\gamma} = f(\Delta), \quad (31)$$

$$\frac{n\delta}{\lambda} < \frac{\lambda(\mu_0 - \alpha_1\Delta)}{n(\mu_0\beta_1 + \beta\alpha_1) + \lambda\gamma\alpha_1}.$$

Поскольку  $f(0) = f\left(\frac{\mu_0}{\alpha_1}\right) = 0$ , то  $f(\Delta)$  принимает в интервале  $0 < \Delta < \frac{\mu_0}{\alpha_1}$

свое наибольшее значение. Несложные вычисления показывают, что это значение достигается в точке

$$\Delta_0 = \left( d^2 + \frac{\mu_0}{\alpha_1} d \right)^{1/2} - d, \quad d = \frac{n\beta + \lambda\gamma}{n\beta_1}, \quad (32)$$

являющейся корнем уравнения

$$\Delta^2 + 2d\Delta - \frac{\mu_0}{\alpha_1} d = 0, \quad (33)$$

и равняется значению

$$f(\Delta_0) = \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)n\beta_1}. \quad (34)$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\lambda(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{n(\mu_0\beta_1 + \beta\alpha_1) + \lambda\gamma\alpha_1} \geq \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)n\beta_1}. \quad (35)$$

Для этого, учитывая (32) и (33), преобразуем левый знаменатель неравенства (35) к виду

$$\begin{aligned} n\beta_1\mu_0 + n\beta\alpha_1 + \lambda\gamma\alpha_1 &= n\beta_1\mu_0 + \alpha_1n\beta_1d \\ &= n\beta_1(\mu_0 + \alpha_1d) = \frac{n\beta_1\alpha_1}{d}(\Delta_0 + d)^2 \end{aligned}$$

и перейдем от (35) к эквивалентному ему неравенству

$$\frac{\lambda d}{\alpha_1(\Delta_0 + d)} \geq \Delta_0.$$

Решая последнее неравенство, находим

$$\Delta_0 \leq -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \lambda \frac{d}{\alpha_1}}$$

и, учитывая выражение (32) для  $\Delta_0$ , получаем

$$\left( 1 + \frac{\mu_0}{\alpha_1 d} \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\alpha_1 d} \right)^{1/2},$$

что всегда верно, лишь только  $\lambda > \mu_0 > 0$ ,  $\alpha_1 d \geq 0$ .

Таким образом, для выполнения неравенств (31) достаточно потребовать, чтобы  $\lambda$  было больше  $\alpha$ , а  $\delta$  было меньше, чем

$$\delta_0 = \min \left[ D, \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)n\beta_1} \right] \frac{\lambda}{n}. \quad (36)$$

Анализируя зависимость  $f(\Delta_0)$  от параметров  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ , получаем, что

$$\begin{aligned} f(\Delta_0) &\rightarrow \frac{\mu_0}{n\beta_1} \text{ при } \alpha_1 \rightarrow 0, \quad f(\Delta_0) \rightarrow \frac{\mu_0^2}{4\alpha_1(n\beta + \lambda\gamma)} \text{ при } \beta_1 \rightarrow 0, \\ f(\Delta_0) &\rightarrow \infty \text{ при } \alpha_1 \rightarrow 0, \beta_1 \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, для частных видов системы (1) выражение для  $\delta_0$  упрощается, принимая вид

$$\begin{aligned}\delta_0 &= \min \left[ D, \frac{\mu_0}{n\beta_1} \right] \frac{\lambda}{n} \text{ при } \alpha_1 = 0, \\ \delta_0 &= \min \left[ D, \frac{\mu_0^2}{4\alpha_1(n\beta + \lambda\gamma)} \right] \text{ при } \beta_1 = 0, \\ \delta_0 &= \frac{D\lambda}{n} \text{ при } \alpha_1 = \beta_1 = 0.\end{aligned}\tag{38}$$

6°. Резюмируя сказанное, приходим к утверждению.

**Теорема.** Пусть для системы уравнений (1) выполняются условия 1 и 2. Тогда, если

$$\lambda > \alpha, \quad \delta < \delta_0,\tag{39}$$

то система (1) имеет инвариантный тор  $y = u(\varphi)$ , для которого

$$\|u(\varphi)\| \leq D, \quad \|u(\varphi') - u(\varphi'')\| \leq \Delta_0 \|\varphi' - \varphi''\|,\tag{40}$$

где  $D \leq g$ ,  $\delta_0$  и  $\Delta_0$  — постоянные, определяемые согласно (30), (32), (36) или (38).

Учитывая выражение для  $\delta_0$ , когда  $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ , убеждаемся, что второе из неравенств (39) для линейных по  $y$  систем

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = b(\varphi)y + c(\varphi)\tag{41}$$

всегда выполняется, т. е. для линейных систем малость  $\epsilon$  не предполагается.

Автор глубоко благодарит А. М. Самойленко за постановку задачи и ценные советы при ее выполнении.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Метод интегральных многообразий в нелинейной механике, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1963.
2. Я. Курцвейль, Инвариантные многообразия дифференциальных систем, Дифференциальные уравнения, т. 4, № 5, 1968.
3. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, «Наукова думка», К., 1968.
4. Ю. Мозер, Быстросходящийся метод итерации и нелинейные дифференциальные уравнения, УМН, т. XXIII, вып. 4(142), 1968.
5. Р. Саккер, A New Approach to the Perturbation Theory of Invariant Surfaces, Comm. Pure Appl. math., 18, N 4, 1965.
6. А. М. Самойленко, К теории возмущения инвариантных многообразий динамической системы, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1969.
7. А. М. Самойленко, О сохранении инвариантного тора при возмущении, Изв. АН СССР, серия матем., т. 34, № 6, 1970.
8. Д. ж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, «Мир», М., 1966.

Поступила 21.IV 1970 г.

Институт математики АН УССР