1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9

О принципе усреднения для гиперболических уравнений второго порядка с функционально-возмущенным аргументом

Д. Г. Кореневский

§ 1. Введение

Как известно из теории обыкновенных квазилинейных неавтономных дифференциальных уравнений [1, 2], многие очень важные свойства решений этих уравнений удается исследовать, если предварительно обнаружена применимость к таким уравнениям метода усреднения (принципа усреднения), по явно входящему времени. Тогда применяя принцип усреднения, неавтономную систему дифференциальных уравнений приближенно редуцируют к более простой, автономной «усредненной» системе уравнений. При этом, находя решения более простой, приближенной, «усредненной» системы уравнений, получают вместе с тем достаточно полную информацию и о решениях точной, исходной, неавтономной системы уравнений.

Вопрос о том, к каким классам дифференциальных уравнений применим принцип усреднения Н. Н. Боголюбова, положительно решен для уравнения в обыкновенных производных без возмущения аргумента [1—5], для дифференциально-функциональных уравнений в обыкновенных производных в случае постоянного возмущения аргумента [6—8] и переменного возмущения аргумента [9], для линейных параболических уравнений без возмущения аргумента [10], для гиперболических уравнений с постоянным возмущением аргумента [11] (смешанная задача).

В данной работе устанавливаются условия применимости принципа усреднения к задаче Коши — Гурса (задаче Коши с данными на характеристиках) для дифференциально-функциональных уравнений гиперболического типа с возмущением аргумента, зависящим как от независимых переменных t, x, так и от искомого решения $U(t, x)$ и частных производных $U'_t(t, x)$, $U'_x(t, x)$.

Более конкретно: рассматривается задача Коши — Гурса для случая уравнения запаздывающего типа, т. е.

$$\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t \partial x} = \varepsilon f\left(t, x, U(t,x), \frac{\partial U(t,x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t,x)}{\partial x}, U(t-\tau, x), \frac{\partial U(t-\tau,x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t-\tau,x)}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$\tau = \tau(t, x, U(t,x), U'_t(t,x), U'_x(t,x)) \geqslant 0, \quad U(t,x)|_{t \in E_{t_0}} = U(t, x_0) = 0.$$

Здесь E_{t_0} — начальное множество, включающее характеристику $t = t_0$; $\varepsilon = \mathrm{const}$ — малый параметр, удовлетворяющий условию $\varepsilon < 1$. Ставится задача: определить условия, при которых справедлив принцип усреднения для задачи Коши — Гурса (1).

Как уже упоминалось, обоснование принципа усреднения для уравнений в частных производных с функционально-возмущенным аргументом, сводящихся к типу (1), в случае $\tau = \text{const}$ впервые было предметом обсуждения (применительно к смешанной задаче) в работе [11]. При этом процесс обоснования осуществлялся в два этапа.

1. Ввиду пропорциональности нелинейностей малому параметру ε представилось возможным путем применения метода разделения переменных перейти от смешанной задачи для уравнения в частных производных к задаче Коши для счетной системы дифференциально-разностных уравнений в обыкновенных производных и таким образом исследование смешанной задачи для уравнений в частных производных заменить исследованием задачи Коши для счетной системы дифференциально-разностных уравнений в обыкновенных производных.

2. Основываясь на достижениях в области обоснования принципа усреднения для счетных систем дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, авторы доказывают справедливость принципа усреднения и для счетных систем дифференциально-разностных уравнений.

В случае же задачи Коши для дифференциально-функциональных уравнений в частных производных такой путь доказательства принципа усреднения не всегда приемлем, поскольку задача Коши (1) в некоторых случаях не допускает для себя редукции к задаче Коши для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, поэтому обоснование принципа усреднения в этих случаях нельзя осуществить по описанной выше схеме.

Ниже приводится доказательство принципа усреднения для задачи Коши с начальными данными на характеристиках (1), основанное на непосредственном рассмотрении уравнения в частных производных и использующее лемму Вендроффа — Беллмана. Между прочим, этот подход является новым и для уравнения в частных производных без возмущения аргумента. При этом следует обратить внимание, что применимость принципа усреднения нами установлена не для области, сравнимой с $\frac{L}{\varepsilon}$, как это имело место в [1], а для несколько меньшей области, сравнимой с $\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$ $\left(t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}},\ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right)$, и обусловлено это обстоятельство используемым методом доказательства.

§ 2. Основная теорема

Рассмотрим уравнение (1).

Процедура усреднения: усредним функцию $f(\cdot)$ по явно входящим аргументам t, x, т. е. найдем предел

$$\lim_{\substack{T\to\infty,\\ X\to\infty}} \frac{1}{TX} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{x_0}^{x_0+X} f(t, x, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6)\, dt dx = f_0(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6), \quad (2)$$

и задаче Коши — Гурса (1) поставим в соответствие следующую задачу Коши — Гурса:

$$\frac{\partial V(t, x)}{\partial t \partial x} = \varepsilon f_0\left(V(t, x),\ \frac{\partial V(t, x)}{\partial t},\ \frac{\partial V(t, x)}{\partial x},\ V(t, x), \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right),$$
$$V(t_0, x) = V(t, x_0) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) будем называть усредненным* по отношению к уравнению (1).

Относительно близости решений задач (1) и (3) может быть доказана следующая теорема.

Теорема (принцип усреднения). *Пусть функции* $f(t, x, Z_1, \ldots)$, $\tau(t, x, Z_1, Z_2, Z_3)$ *определены для* $t > t_0$, $x > x_0$ *и* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_6$, *принадлежащих некоторой ограниченной области* D *евклидова пространства* E_6 *и пусть выполняются следующие условия:*

а) *функции* f *и* τ *непрерывны по совокупности всех аргументов, удовлетворяют условиям Липшица по аргументам, начиная с третьего, с постоянными Липшица* L_f *и* L_τ *соответственно и, кроме того, существуют положительные числа* B *и* B_1 *такие, что*

$$|f(t, x, Z_1, \ldots, Z_6)| < B,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial t} f(t, x, Z_1, \ldots, Z_6)\right| < B_1,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t, x, Z_1, \ldots, Z_6)\right| < B_1;$$

б) *для задачи* (1) *выполнены все условия теоремы существования классических решений* [13];

в) *для каждого* $Z_1, \ldots, Z_6$ *в области* D *существует предел* (2);

г) *функция* f_0 *непрерывная и удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица* L_{f_0};

д) *задача Коши — Гурса* (3) *имеет решение* $V(t, x)$, *для которого точка* $\left(V(t, x), \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}. V(t, x), \frac{\partial V(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial V(t, x)}{\partial x}\right)$ *евклидова пространства* E_6 *лежит в области* D *вместе со своей окрестностью.*

Тогда любому сколь угодно малому числу $\delta > 0$ *и сколь угодно большому числу* L *можно поставить в соответствие такое число* ε_0, *что если* $V = V(t, x)$ *есть решение усредненной системы* (3), *определенное при* $t_0 < t < \infty$, $x_0 < x < \infty$ *и лежащее в области* D *вместе со своей окрестностью, то для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в области* $t_0 < t < t_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$, $x_0 < x < x_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$ *справедливо неравенство*

$$|U(t, x) - V(t, x)| < \delta, \tag{4}$$

в котором $U(t, x)$ — *решение задачи* (1), *совпадающее с* $V(t,x)$ *при* $t = t_0$ *и* $x = x_0$.

Доказательство. Будем непосредственно оценивать уклонение решения $U(t, x)$ исходной системы от решения $V(t, x)$ усредненной системы в области $t_0 < t < t_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$, $x_0 < x < x_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$. Заменим исход-

---

* Характерным для принятой схемы усреднения является то, что за усредненное уравнение принимается не дифференциально-функциональное уравнение, к примеру, вида

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t\, \partial x} = \varepsilon f_0\left(V(t, x), V'_t(t, x), V'_x(t, x), V(t-\tau, x), V'_t(t-\tau, x), V'_x(t-\tau, x)\right)$$

(такая схема усреднения тоже возможна, хотя и менее предпочтительна ввиду более сложной структуры усредненного уравнения по сравнению с уравнением (3)), а уравнение в частных производных без возмущения аргумента. Для уравнений в обыкновенных производных на такую схему усреднения обратил внимание В. И. Фодчук [8], затем она была предметом обсуждения в статье Ю. И. Неймарка и Л. З. Фишмана [12].

ную и усредненную системы эквивалентными в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций интегральными уравнениями

$$U(t,x)=\begin{cases} 0 \quad \forall (t)\in E_{t_0}, \\ \varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x} f\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\dfrac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\dfrac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta},U(\xi-\tau,\eta),\ldots\right. \\ \left.\ldots,\dfrac{\partial U(\xi-\tau,\eta)}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta, \end{cases} \tag{5}$$

$$V(t,x)=\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x} f_0\left(V(\xi,\eta),\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\eta},V(\xi,\eta),\right.$$
$$\left.\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)d\xi d\eta. \tag{6}$$

Вычтем из (5) соотношение (6) и справа добавим и вычтем

$$f_0\left(U(\xi,\eta),\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta},U(\xi,\eta),\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right):$$

$$U-V=\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[f_0\left(U(\xi,\eta),\ldots,\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)-f_0\left(V(\xi,\eta),\ldots,\frac{\partial V(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\right]\times$$
$$\times\, d\xi d\eta+\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[f\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots,\frac{\partial U(\xi-\tau,\eta)}{\partial\eta}\right)-f_0\left(U(\xi,\eta),\ldots\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\right]d\xi d\eta, \tag{7}$$

откуда, используя условие г) теоремы, получим

$$|U-V|<\varepsilon L_{f_0}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}|U-V|\,d\xi d\eta+\varepsilon\left|\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[f\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\ldots,\frac{\partial U(\xi-\tau,\eta)}{\partial\eta}\right)-f_0\left(U(\xi,\eta),\ldots,\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right)\right]d\xi d\eta\right|. \tag{8}$$

Полученное интегральное неравенство весьма естественно оценивает разность $U-V$, так как ее величина определяется уклонением правой части f от своего среднего f_0 вдоль интегральной поверхности $U(t,x)$. Оценим в прямоугольнике $\left\{t_0\leqslant t\leqslant t_0+\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}},\ x_0\leqslant x\leqslant x_0+\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}\right\}$ второе слагаемое в выражении (8). Для этого распространим интегрирование по t и x на весь прямоугольник со сторонами $\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$, $\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$, разбивая его на k^2 равных прямоугольников с длинами сторон $\frac{1}{k}\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$. При этом имеем:

$$\left|\varepsilon\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{x_0}^{x}\left[f\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots,\frac{\partial U(\xi-\tau,\eta)}{\partial\eta}\right)-f_0\left(U(\xi,\eta),\ldots\right.\right.\right.$$

$$\ldots, \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big)\Big]\, d\xi d\eta \Bigg| \leqslant \Bigg| \sum_{i,j=0}^{k-1} \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Big\{ f\Big(\xi, \eta, U(\xi,\eta), \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta},$$

$$U\Big(\xi - \tau\Big(\xi, \eta, U(\xi,\eta), \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big), \eta\Big), \ldots, \frac{\partial}{\partial \eta} U\Big(\xi -$$

$$- \tau\Big(\xi, \eta, U(\zeta,\eta), \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi}, \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big), \eta\Big)\Big) - f\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta},$$

$$U\Big(t_i - \tau\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_j\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U\Big(t_i - \tau\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_j\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} U\Big(t_i - \tau\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_i\Big)\Big)\Big] - \Big[f_0\Big(U(\xi,\eta), \ldots, \frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big) - \tag{9}$$

$$- f_0\Big(U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \ldots, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big)\Big]\Big\}\, d\xi d\eta \Bigg| +$$

$$+ \Bigg| \sum_{i,j=0}^{k-1} \varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \Big[f\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{dU_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}, U\Big(t_{ij} - \tau(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_j\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} U\Big(t_i - \tau\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_j\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} U\Big(t_i - \tau\Big(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big), x_j\Big)\Big) - f_0\Big(U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\Big)\Big]\, d\xi d\eta \Bigg|.$$

Здесь справа прибавили и вычли

$$f(t_i, x_j, U_{ij}, \ldots) - f_0(U_{ij}, \ldots),$$

где U_{ij}, $\frac{\partial}{\partial \xi} U_{ij}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} U_{ij}$ — значения, которые принимает непрерывное вместе со своими частными производными решение $U(t, x)$ в узловых точках разбиения (t_i, x_j) $(i, j = 0, 1, \ldots, k-1)$.

Условия теоремы позволяют оценить первую сумму в выражении (9). Обозначим эту сумму через Σ_1. На каждом прямоугольнике $[t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}, x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}]$ имеем:

$$|U(t,x) - U_{ij}| \leqslant 2\varepsilon \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} B\, d\xi d\eta \leqslant 2\varepsilon B \frac{L^2}{k^2 \sqrt{\varepsilon}} \leqslant 2B \frac{L^2}{k^2};$$

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-\frac{\partial U_{ij}}{\partial t}\right|\leqslant 2\varepsilon\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}Bd\eta\leqslant 2\varepsilon B\frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}\leqslant 2B\frac{L}{k};$$

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}-\frac{\partial U_{ij}}{\partial x}\right|\leqslant 2\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}B\,d\xi\leqslant 2\varepsilon B\quad\frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}\leqslant 2B\frac{L}{k};$$

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}\right|\leqslant B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3};$$

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial x}\right|\leqslant B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3};$$

$$\left|\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t^2}\right|\leqslant\varepsilon\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}B_1d\eta\leqslant\varepsilon B_1\frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}=B_1\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3};$$

$$\left|\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial t\partial x}\right|\leqslant\varepsilon B;$$

$$\left|\frac{\partial^2 U(t,x)}{\partial x^2}\right|\leqslant\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}B_1d\xi\leqslant\varepsilon B_1\frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}\leqslant B_1\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}.$$

Далее, учитывая теорему Лагранжа о конечных приращениях, получаем, что интеграл

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{xj}^{x_{j+1}}\left\{L_f\left[|U(\xi,\eta)-U_{ij}|+\left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial u_{ij}}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right|+\right.\right.$$

$$+\left|U\left(\xi-\tau\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right),\eta\right)-\right.\tag{10}$$

$$-U\left(t_i-\tau\left(t_i,x_j,U_{ij},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right),x_j\right)\Bigg|+\left|\frac{\partial}{\partial\xi}U\left(\xi-\tau\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right),\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}U\left(t_i-\tau\left(t_i,x_j,U_{ij},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right),x_j\right)\right|+$$

$$+\left|\frac{\partial}{\partial\eta}U\left(\xi-\tau\left(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi},\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}\right),\eta\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial}{\partial\eta}U\left(t_i-\tau\left(t_i,x_j,U_{ij},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi},\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right),x_j\right)\right|\right]+2L_{f_0}\Big[|U(\xi,\eta)-U_{ij}|+$$

$$\left.\left.+\left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\xi}-\frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi}\right|+\left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial\eta}-\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right|\right]\right\}d\xi d\eta\,\Bigg|\leqslant\Bigg|\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big\{L_f\Big[\;|U(\xi,\eta)-$$

$$- U_{ij}| + \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\right| + B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\,(|\xi - t_i| +$$

$$+ |\tau(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots) - \tau(t_i,x_j,U_{ij},\ldots)|) + B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\,|\eta - x_j| +$$

$$+ B_1\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\,(|\xi - t_i| + |\tau(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots) - \tau(t_i,x_j,U_{ij},\ldots)|) +$$

$$+ \varepsilon B|\eta - x_j| + \varepsilon B(|\xi - t_i| + |\tau(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots) - \tau(t_i,x_j,U_{ij},\ldots)|) +$$

$$+ B_1\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\,|\eta - x_j|\Big] + 2L_{f_0}\Big[\,|U(\xi,\eta) - U_{ij}| + \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}\right| +$$

$$+ \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\right|\Big]\Big\}\, d\xi d\eta\Bigg| \leqslant \Bigg|\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big\{\Big(L_f + 2L_{f_0} + L_\tau\Big[\varepsilon B +$$

$$+ (B + B_1)\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\,\Big]\Big)\Big(\,|U(\xi,\eta) - U_{ij}| + \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \xi} - \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial U(\xi,\eta)}{\partial \eta} -\right.$$

$$\left.- \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta}\right|\Big) + 2\,\frac{L^2}{k^2}(B + B_1)\sqrt{\varepsilon} + 2B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big\}\, d\xi d\eta\Bigg| \leqslant \Bigg|\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\Big\{\Big(L_f +$$

$$+ 2L_{f_0} + L_\tau\Big[\varepsilon B + (B + B_1)\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big]\Big)\Big(2B\,\frac{L^2}{k^2}\sqrt{\varepsilon} + 4B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big) +$$

$$+ 2\frac{L^2}{k^2}(B + B_1)\sqrt{\varepsilon} + 2B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big\}\, d\xi d\eta\Bigg| \leqslant \Bigg|\frac{L^2}{k^2}\sqrt{\varepsilon}\Big\{\Big(L_f + 2L_{f_0} +$$

$$+ L_\tau\Big[\varepsilon B + (B + B_1)\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big]\Big)\Big(2B\,\frac{L^2}{k^2}\sqrt{\varepsilon} + 4B\,\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big) +$$

$$+ 2\,\frac{L^2}{k^2}(B + B_1)\sqrt{\varepsilon} + 2B\frac{L}{k}\sqrt[4]{\varepsilon^3}\Big\}\, d\xi d\eta\Bigg| \leqslant$$

(учитывая тот факт, что $\varepsilon < 1$, цепочку неравенств (10) можем продолжить следующим образом:)

$$\leqslant \left|\frac{L^2}{k^2}\Big\{\Big(L_f + 2L_{f_0} + L_\tau\Big[B + (B + B_1)\,\frac{L}{k}\Big]\Big)\Big(2B\,\frac{L^2}{k^2} + 4B\frac{L}{k}\Big) +\right.$$

$$\left.+ 2\frac{L^2}{k^2}(B + B_1) + 2B\frac{L}{k}\Big\}\right|.$$

Сумма Σ_1 содержит k^2 интегралов (10); таким образом, для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ можно указать такое число k, что равномерно относительно ε $(0 < \varepsilon < \varepsilon_1 < 1)$ имеем

$$\Sigma_1 = \Bigg|\sum_{i,j=0}^{k-1}\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}}\{[f(\xi,\eta,U(\xi,\eta),\ldots) - f(t_i,x_j,U_{ij},\ldots)] -$$

$$-[f_0(U(\xi,\eta),\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\}\,d\xi d\eta\Bigg|<\frac{\delta}{2}\exp(-L_{f_0}L). \qquad (11)$$

Зафиксируем k и оценим вторую сумму в (9). В силу условия в) те-теоремы можно построить такую монотонно убывающую функцию $\varkappa(t,x)$, стремящуюся к 0 при $t\to\infty$, $x\to\infty$, что во всей области $[t>t_0, x>x_0]\times D$

$$\Bigg|\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\Bigg[f\left(t_i, x_j, U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}, U(t_i-\tau(t_i,x_j,U_{ij},\dots),x_j),\dots\right)-$$

$$-f_0\left(U_{ij}, \frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi},\dots,\frac{\partial U_{ij}}{\partial\eta}\right)\Bigg]d\xi d\eta\Bigg|\leqslant xt\varkappa(t,x). \qquad (12)$$

Очевидно, если t и x лежат на каком-либо прямоугольнике, кроме первого ($i=1$, $j=1$), можно написать:

$$\left|\varepsilon\int_{t_0}^{t_i}\int_{x_0}^{x_j}[f(t_i,x_j,U_{ij},\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\,d\xi d\eta\right|<$$

$$<\varepsilon\frac{L^2}{\sqrt{\varepsilon}}\,\varkappa\left(\frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}+t_0, \frac{L}{k\sqrt[4]{\varepsilon}}+x_0\right)=\varkappa_1(\varepsilon). \qquad (13)$$

Для первого отдельно

$$\left|\varepsilon\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}[f(t_i,x_j,U_{ij},\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\,d\xi d\eta\right|<\varepsilon tx\varkappa(t,x)\leqslant\varkappa_2(\varepsilon), \qquad (14)$$

где

$$\varkappa_2(\varepsilon)=\varepsilon\frac{L^2}{\sqrt{\varepsilon}}2B.$$

Тогда

$$\left|\varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f(t_i,x_j,U_{ij},\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\,d\xi d\eta\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\varepsilon\int_{t_0}^{t_{i+1}}\int_{x_0}^{x_{j+1}}\right|[\cdot]\,|\,d\xi d\eta\,|+\left|\varepsilon\int_{t_0}^{t_i}\int_{x_0}^{x_j}\right|[\cdot]\,|\,d\xi d\eta\,|\leqslant 2\varkappa_1(\varepsilon)+\varkappa_2(\varepsilon). \qquad (15)$$

Следовательно,

$$\left|\sum_{i,j=0}^{k-1}\varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f(t_i,x_j,U_{ij},\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\,d\xi d\eta\right|\leqslant 2k^2\varkappa_1(\varepsilon)+k^2\varkappa_2(\varepsilon). \qquad (16)$$

При фиксированном k функции $\varkappa_1(\varepsilon)$ и $\varkappa_2(\varepsilon)$ стремятся к нулю при $\varepsilon\to 0$. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое ε_0, что для всех $\varepsilon<\varepsilon_0$ получим

$$\left|\sum_{i,j=0}^{k-1}\varepsilon\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{x_j}^{x_{j+1}}[f(t_i,x_j,U_{ij},\dots)-f_0(U_{ij},\dots)]\,d\xi d\eta\right|<$$

$$<\frac{\delta}{2}\exp(-L_{f_0}L). \qquad (17)$$

Из (11) и (17) следует для всех $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \frac{L'}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$, $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$ оценка:

$$\left| \varepsilon \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \eta, U(\xi, \eta), \ldots) - f_0(U(\xi, \eta), \ldots)] \, d\xi d\eta \right| < \delta \exp(-L_{f_0} L). \quad (18)$$

Таким образом,

$$|U - V| \leqslant \varepsilon L_{f_0} \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} |U - V| \, d\xi d\eta + \delta \exp(-L L_{f_0}). \quad (19)$$

Оценить $|U - V|$ теперь можно, если воспользоваться следующей леммой Вендроффа — Беллмана (аналог леммы Гронуолла для функций двух независимых переменных).

Лемма Вендроффа — Беллмана [14, стр. 214]. Если $\varphi(t, x) \leqslant C + \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} N(\xi, \eta) \, \varphi(\xi, \eta) \, d\xi d\eta$, где $C \geqslant 0$, $N(\xi, \eta)$, $\varphi(\xi, \eta) \geqslant 0$, то $\varphi(t, x) \leqslant C \exp\left(\int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} N(\xi, \eta) \, d\xi d\eta \right)$. Тогда из (19) и леммы Вендроффа — Беллмана немедленно следует утверждение теоремы $|U(t, x) - V(t, x)| < \delta$

§ 3. Следствие и обобщение

Из доказанной теоремы вытекает, как частный случай, принцип усреднения для задачи Коши — Гурса гиперболических дифференциальных уравнений без возмущения аргумента

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t \partial x} = \varepsilon f\left(t, x, U(t, x), \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial U(t, x)}{\partial x}\right), \; U(t_0, x) = U(t, x_0) = 0. \quad (20)$$

Поскольку обоснование принципа усреднения для уравнений (20), насколько нам известно, не было предметом обсуждения в научной литературе*, то мы приведем формулировку принципа усреднения для задачи (20) в виде такого следствия. При этом область применимости принципа усреднения в отличие от теоремы можно расширить от $\frac{L}{\sqrt[4]{\varepsilon}}$ до $\frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Следствие теоремы. *Пусть $f(t, x, Z_1, Z_2, Z_3)$ определена для $t > t_0$, $x > x_0$ и Z_1, Z_2, Z_3, принадлежащих некоторой ограниченной области D евклидова пространства E_3 и пусть выполняются следующие условия:*

а) *функция f непрерывна по совокупности всех аргументов, удовлетворяет условиям Липшица по аргументам, начиная с третьего, и, кроме того, существует положительное число B такое, что $|f| < B$;*

б) *для задачи (20) выполнены все условия теоремы существования классических решений;*

в) *для каждого Z_1, Z_2, Z_3 в области D существует предел*

$$\lim_{\substack{T \to \infty, \\ X \to \infty}} \frac{1}{TX} \int_{t_0}^{t_0+T} \int_{x_0}^{x_0+X} f(t, x, Z_1, Z_2, Z_3) \, dt dx = f_0(Z_1, Z_2, Z_3); \quad (21)$$

* После того, как рукопись статьи была подготовлена, в печати появилась статья М. Киселевич [15], также посвященная обоснованию принципа усреднения для задачи Коши — Гурса для частного вида уравнений (20) и использующая при доказательстве теорему о непрерывной зависимости от параметра.

г) *функция* f_0 *удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам;*
д) *задача Коши — Гурса*

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t \partial x} = \varepsilon f_0\left(V(t,x),\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t},\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right), \tag{22}$$

$$V(t_0, x) = V(t, x_0) = 0$$

имеет классическое решение $V(t, x)$, *для которого точка* $\left(V(t,x),\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial t},\ \frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right)$ *евклидова пространства* E_3 *лежит в области* D *вместе со своей окрестностью.*

Тогда любому сколь угодно малому $\delta > 0$ *и сколь угодно большому* L *можно поставить в соответствие такое* ε_0, *что для всех* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *в области* $t_0 < t < t_0 + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}$, $x_0 < x < x_0 + \frac{L}{\sqrt{\varepsilon}}$ *справедливо неравенство*

$$|U(t,x) - V(t,x)| < \delta,$$

в котором $U(t, x)$ — *решение задачи* (20), *совпадающее с* $V(t, x)$ *при* $t = t_0$, $x = x_0$.

Все приведенные выше положения без существенных затруднений обобщаются на векторно-матричные уравнения (1) и (20), а также на случай ненулевых начальных данных (достаточно предварительно сделать замену зависимой переменной).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, «Наука», М., 1963.
2. Ю. А. Митропольский, Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1966.
3. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
4. В. М. Волосов, Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений, УМН, т. 17, № 6, 1962.
5. М. М. Хапаев, О методе усреднения в некоторых задачах, связанных с усреднением, Дифференциальные уравнения, т. 2, № 5, 1966.
6. В. П. Рубаник, Колебания в квазилинейных системах с запаздыванием, «Наука», М., 1969.
7. В. И. Фодчук, Метод усреднения для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, УМЖ, т. 20, № 2, 1968.
8. В. И. Фодчук, О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом от параметра, УМЖ, т. 16, № 2, 1964.
9. В. М. Волосов, Г. Н. Медведев, Б. И. Моргунов, О применении метода усреднения к некоторым системам с отклоняющимся аргументом, Вестник МГУ, 1969.
10. Р. З. Хасьминский, О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией, Теория вероятностей и ее применения, № 1, 1963.
11. Ю. А. Митропольский, В. И. Фодчук, Асимптотические методы нелинейной механики применительно к нелинейным дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом, УМЖ, т. 18, № 3, 1966.
12. Ю. И. Неймарк, Л. З. Фишман, О поведении в целом фазовых траекторий квазилинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, Изв. вузов, Радиофизика, № 6, 1966.
13. Д. Г. Кореневский, С. Ф. Фещенко, Теорема существования и единственности задачи Коши для гиперболического уравнения с авторегулируемым запаздыванием, Дифференциальные уравнения, т. 3, № 8, 1967.
14. Э. Беккенбах, Р. Беллман, Неравенства, «Мир», М., 1965.
15. М. Киселевич, Теорема типа Н. Н. Боголюбова для гиперболических уравнений, УМЖ, т. 22, № 3, 1970.

Поступила 9.XII 1970 г.

Институт математики АН УССР