УДК 517.948:513.88:518

Проблема интерполяции между фактор-пространствами

Ю. И. Петунин

§ 1. Интерполяционные конструкции промежуточных пространств и интерполяция между фактор-пространствами

Пусть $\mathfrak{A}$ — отделимое топологическое векторное пространство и E_0, E_1 — два банаховых пространства, которые алгебраически и топологически вложены в $\mathfrak{A}$. Рассмотрим два линейных нормированных пространства:

1) $E_0 \cap E_1$, состоящее из элементов общих для E_0 и E_1 и наделенное нормой

$$\| x \|_{E_0 \cap E_1} = \max \{ \| x \|_{E_0}, \| x \|_{E_1} \} \quad (x \in E_0 \cap E_1);$$

2) $E_0 + E_1$, состоящее из элементов $\mathfrak{A}$ таких, что $x = x_0 + x_1$, где $x_i \in E_i$ $(i = 0, 1)$ с нормой

$$\| x \|_{E_0 + E_1} = \inf_{x = x_0 + x_1} \{ \| x_0 \|_{E_0} + \| x_1 \|_{E_1} \}.$$

$E_0 \cap E_1$ и $E_0 + E_1$ являются банаховыми пространствами [1]; банахово пространство E называется промежуточным между E_0 и E_1, если

$$E_0 \cap E_1 \subset E \subset E_0 + E_1$$

(символ $\subset$ здесь и в дальнейшем означает алгебраическое и топологическое вложение [1]); E_0 и E_1 называются банаховой парой, а $(E_0, E_1; E)$ — банаховой тройкой пространств.

Считают, что банахова тройка пространств $(E_0, E_1; E)$ является интерполяционной типа $\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1; F)$, если всякий линейный оператор T, действующий из $E_0 + E_1$ в $F_0 + F_1$ и отображающий E_i в $F_i (i = 0, 1)$, действует из пространства E в F, причем для нормы $\|T\|_{E \to F}$ выполняется неравенство

$$\| T \|_{E \to F} \leqslant \| T \|_{E_0 \to F_0}^{1-\alpha} \| T \|_{E_1 \to F_1}^{\alpha}.$$

Пусть E_0, E_1 — банахова пара и $\mathfrak{J}$ — отображение, которое каждой банаховой паре E_0, E_1 ставит в соответствие семейство промежуточных пространств $[E_0, E_1]_\alpha$, зависящее от одного параметра $\alpha \in [0, 1]$, причем $[E_0, E_1]_0 = E_0$, $[E_0, E_1]_1 = E_1$. Будем называть отображение $\mathfrak{J}$ интерполяционной конструкцией промежуточных пространств, если банахова тройка $(E_0, E_1, [E_0, E_1]_\alpha)$ является интерполяционной типа α относительно банаховой тройки $(F_0, F_1, [F_0, F_1]_\alpha)$ и пространство $E_0 \cap E_1$ всюду плотно в каждом из пространств $[E_0, E_1]_\alpha$ при $0 < \alpha < 1$.

Проблема интерполяции между фактор-пространствами заключается в следующем: пусть N — подпространство $E_0 \cap E_1$, замкнутое в E_0 и в E_1;

рассмотрим фактор-пространства E_0/N, E_1/N и $[E_0, E_1]_\alpha/N$. Будет ли

$$[E_0, E_1]_\alpha/N = [E_0/N, E_1/N]_\alpha ? \tag{1}$$

Эта проблема была поставлена в 1963 г. на VII конгрессе математиков Италии в докладе Э. Мадженеса [2]. Он сформулировал проблему интерполяции между фактор-пространствами для определенности для метода комплексной интерполяции Кальдерона — Лионса (см. [1, 2]). В докладе Э. Мадженеса указано, что «эта проблема часто возникает в приложениях; она поставлена, например, в случае граничных задач для линейных эллиптических уравнений Лионсом — Мадженесом [3]; в случае подпространств конечной размерности ответ положительный (см. [3, VI, п. 1])».

Рассмотрим прежде всего вопрос о корректности постановки проблемы интерполяции между фактор-пространствами. В силу определения интерполяционной конструкции $\mathfrak{J}$ семейство промежуточных пространств $[E_0/N, E_1/N]_\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ существует лишь в том случае, когда фактор-пространства E_0/N и E_1/N образуют банахову пару.

П р е д л о ж е н и е. Для того чтобы фактор-пространства E_0/N и E_1/N образовывали банахову пару, необходимо и достаточно, чтобы подпространство N было замкнуто в пространстве $E_0 + E_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть A и B — два банаховых пространства, $A \subset B$ и N — подпространство из A, которое замкнуто в A и B. Тогда фактор-пространство A/N вложено в B/N с помощью оператора вложения j, определяемого следующим образом: если $\hat{a} = a \oplus N \in A/N$, то $j(\hat{a}) = a \oplus N \in B/N$, поэтому $A/N \subset B/N$.

Если N замкнуто в $E_0 + E_1$, то $(E_0 + E_1)/N$ — отделимое пространство. Кроме того, $E_i \subset E_0 + E_1$ $(i = 0, 1)$, следовательно, $E_i/N \subset (E_0 + E_1)/N$.

Обратно, пусть E_0/N и E_1/N являются банаховой парой. Обозначим через τ каноническое отображение из E_i в E_i/N $(i = 0, 1)$. Как известно (см. [4, гл. III, п. 13. 11]), τ можно расширить до ограниченного линейного оператора, действующего из пространства $E_0 + E_1$ в $E_0/N + E_1/N$, причем

$$\|\tau\|_{E_0+E_1 \to E_0/N+E_1/N} \leqslant 1.$$

Пусть x — произвольный элемент из $E_0 + E_1$ и $\hat{x} = \tau(x)$. На основании предыдущего

$$\|\hat{x}\|_{E_0/N+E_1/N} = \|\tau(x)\|_{E_0/N+E_1/N} \leqslant \|x\|_{E_0+E_1}$$

или

$$\|\hat{x}\|_{E_0/N+E_1/N} \leqslant \inf_{x \in \hat{x}} \|x\|_{E_0+E_1} = \|\hat{x}\|_{(E_0+E_1)/N}.$$

Из последнего неравенства вытекает отделимость пространства $(E_0 + E_1)/N$, ибо $E_0/N + E_1/N$ — банахово пространство. Следовательно, N — замкнутое подпространство $E_0 + E_1$.

Предложение доказано.

Итак, если N замкнуто в $E_0 + E_1$, то существуют пространства $[E_0/N, E_1/N]_\alpha$ и тем самым мы вправе ставить вопрос об их совпадении с $[E_0, E_1]_\alpha/N$.

Заметим, что в случае вложенных пространств $E_1 \subset E_0$ условия предложения выполняются, так как пространство $E_0 + E_1$ совпадает с E_0 и их нормы эквиваленты. Однако, если E_0 и E_1 — произвольная банахова пара и N — подпространство $E_0 \cap E_1$, замкнутое в E_0 и E_1, то N, вообще говоря, может быть не замкнутым в $E_0 + E_1$.

Действительно, пусть E_0, E_1 — пространства последовательностей $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$, для которых

$$\|x\|_{E_0} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k|\xi_{2k}| + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k+1}| < \infty,$$

$$\| x \|_{E_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k}| + \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) |\xi_{2k-1}| < \infty.$$

Положим

$$N^* = \left\{ x : x = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots),\ \xi_{2k-1} = \xi_{2k};\ k = 1, 2, \ldots,\ \sum_{k=1}^{\infty} k\xi_k = 0 \right\}.$$

Тогда $N^* \subset E_0 \cap E_1$ и N^* замкнуто в E_0 и E_1. Легко видеть, что $E_0 + E_1 = l_1$, в то время как N^* не замкнуто в пространстве l_1.

Описанный выше контрпример был построен Е. М. Семеновым.

Выясним теперь смысл идентификации, о которой говорилось в проблеме интерполяции между фактор-пространствами. Так как $[E_0, E_1]_\alpha$ — промежуточное пространство между E_0 и E_1, то $[E_0, E_1]_\alpha \subset E_0 + E_1$ и $[E_0, E_1]_\alpha/N \subset (E_0 + E_1)/N$. Далее $E_i/N \subset (E_0 + E_1)/N$ $(i = 0, 1)$, а потому $[E_0/N, E_1/N]_\alpha \subset (E_0 + E_1)/N$.

Таким образом, $[E_0, E_1]_\alpha/N$ и $[E_0/N, E_1/N]_\alpha$ можно считать линейными подпространствами пространства $(E_0 + E_1)/N$, поэтому равенство (1) означает совпадение множеств $[E_0, E_1]_\alpha/N \subset (E_0 + E_1)/N$ и $[E_0/N, E_1/N]_\alpha \subset (E_0 + E_1)/N$. Эквивалентность норм банаховых пространств $[E_0, E_1]_\alpha/N$ и $[E_0/N, E_1/N]_\alpha$ в случае выполнения равенства (1) вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть (A, B) — банахова пара. Если A является линейным многообразием B, то A вложено в B.*

Доказательство. Если A — линейное многообразие B, то линейные пространства $A + B$ и B совпадают. В силу определения нормы в пространстве $A + B$

$$\| x \|_{A+B} \leqslant \| x \|_B \quad (x \in B).$$

Отсюда и из теоремы Банаха об обратном операторе следует эквивалентность норм $\| x \|_B$ и $\| x \|_{A+B}$, поэтому

$$\| x \|_B \leqslant C \| x \|_{A+B}.$$

Кроме того, при $x \in A$

$$\| x \|_{A+B} \leqslant \| x \|_A,$$

так что

$$\| x \|_B \leqslant C \| x \|_A.$$

Лемма доказана.

Перейдем к исследованию проблемы интерполяции между фактор-пространствами.

Теорема 1. *Пусть N — подпространство $E_0 \cap E_1$, обладающее в пространстве $E_0 + E_1$ топологическим дополнением. Тогда для произвольной интерполяционной конструкции промежуточных пространств $\mathfrak{J} : (E_0, E_1) \to [E_0, E_1]_\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ справедливо*

$$[E_0, E_1]_\alpha/N = [E_0/N, E_1/N]_\alpha.$$

Доказательство. Легко видеть, что подпространство N, удовлетворяющее условиям теоремы, замкнуто в $E_0 + E_1$, E_0, E_1 и $E_0 \cap E_1$. Проводя аналогичные рассуждения, как и при доказательстве предложения, можно показать, что для всякого замкнутого подпространства $N \subset E_0 + E_1$, принадлежащего $E_0 \cap E_1$, справедливо вложение

$$[E_0, E_1]_\alpha/N \subset [E_0/N, E_1/N]_\alpha. \tag{2}$$

Пусть M_i — замкнутое подпространство E_i и $M = M_0 + M_1$. Обозначим через J отображение вложения M_i в пространство E_i; на основании результатов работы [4] отображение J можно расширить до ограниченного линейного оператора, действующего из M в E_0+E_1, поэтому естественное вложение M в E_0+E_1 непрерывно. По определению интерполяционной конструкции J действует из пространства $[M_0, M_1]_\alpha$ в $[E_0, E_1]_\alpha$; так как $M_0 \cap M_1$ всюду плотно в $[M_0, M_1]_\alpha$, то J индуцирует естественное вложение $[M_0, M_1]_\alpha$ в $[E_0, E_1]_\alpha$, причем

$$\| x \|_{[E_0,E_1]_\alpha} \leqslant \| x \|_{[M_0,M_1]_\alpha} \quad (x \in [M_0, M_1]_\alpha).$$

Положим $M_\alpha = M \cap [E_0, E_1]_\alpha$ и введем на линейном пространстве M норму по формуле

$$\| x \|_{M_\alpha} = \| x \|_{[E_0,E_1]_\alpha} \quad (x \in M_\alpha).$$

Из вложений $[M_0, M_1]_\alpha \subset [E_0, E_1]_\alpha$ и $[M_0, M_1]_\alpha \subset M$ вытекает

$$[M_0, M_1]_\alpha \subset M_\alpha, \tag{3}$$

причем в силу предыдущего это вложение непрерывно.

Пусть P — оператор проектирования E_0+E_1 на подпространство N, $M^* = P^{-1}(\theta)$ — ядро гомоморфизма P и E — произвольное промежуточное пространство между E_0 и E_1. Нетрудно заметить, что сужение P_E оператора P на пространстве E является проектированием E на N и

$$\operatorname{Ker} P_E = P_E^{-1}(\theta) = M^* \cap E,$$

поэтому

$$E/N = M^* \cap E. \tag{4}$$

Пусть $M_i^* = M \cap E_i$ $(i = 0, 1)$, $M_\alpha^* = M^* \cap [E_0, E_1]_\alpha$ и u — любой элемент из M^*. По построению M^*

$$u = u_0 + u_1; \; u_0 \in E_0, \; u_1 \in E_1.$$

Определим оператор Q проектирования на подпространство M формулой $Q = I - P$ (I — единичный оператор) и пусть Q_{E_0} и Q_{E_1} — сужения Q на пространствах E_0 и E_1 соответственно. Тогда $Q_{E_i} = I - P_{E_i}$ $(i = 0, 1)$, следовательно,

$$u = Qu = Qu_0 + Qu_1 = Q_{E_0}(u_0) + Q_{E_1}(u_1) = x_0 + x_1,$$

где $x_0 \in M_0^*$, $x_1 \in M_1^*$.

Таким образом, $M^* = M_0^* + M_1^*$ и на основании леммы 1 нормы этих пространств эквивалентны.

Используя затем соотношения (3) и (4), мы видим, что

$$[E_0/N, E_1/N]_\alpha \subset [E_0, E_1]_\alpha / N. \tag{5}$$

Сравнивая вложения (2) и (5), получаем равенство (1).

Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает такое следствие.

Следствие. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — вложенные банаховы пространства и N — замкнутое подпространство E_1, которое обладает в E_0 топологическим дополнением. Тогда справедливо равенство* (1) *для произвольной интерполяционной конструкции промежуточных пространств.*

Интересно отметить, что с помощью следствия можно получить положительное решение проблемы интерполяции между фактор-пространствами для некоторых конкретных вложенных банаховых пространств. Например, если $E_0 = l_{p_0}$ и $E_1 = l_{p_1}$, когда $p_0 > p_1 > 2$, то всякое подпространство N, замкнутое в l_{p_0} и l_{p_1}, имеет в l_{p_0} топологическое дополнение (см. [5]), поэтому выполнены условия следствия. Однако в случае $2 > p_0 > p_1$ в l_{p_0} и l_{p_1} существует общее замкнутое подпространство N, которое не обладает топологическим дополнением ни в каком пространстве $l_{p_i} (i = 0, 1)$ (см. [6]), так что для таких подпространств вопрос о справедливости равенства (1) нуждается в дополнительном исследовании.

§ 2. Проблема интерполяции между фактор-пространствами для метода средних

Ж. Л. Лионс и Ж. Петре предложили конструкцию промежуточных пространств (см. [2, 7, 8]), которые получили название «пространства средних». Мы опишем эту конструкцию для вложенных пространств $E_1 \subset E_0$, поскольку результаты этого параграфа сформулированы для таких пространств.

Пусть банахово пространство E_1 вложено в E_0. Обозначим через $L_p(E_i)$ $(i = 0, 1)$ банахово пространство сильно измеримых функций $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ со значениями в E_i, для которых

$$\| f \|_{L_p(E_i)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| f(t) \|_{E_i}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Если $p = \infty$, то

$$\| f \|_{L_\infty(E_i)} = \operatorname{vrai\,sup} \| f(t) \|_{E_i}.$$

Символом $W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$ $(0 < \alpha < 1)$ мы обозначим банахово пространство функций $u(t)$ таких, что

$$e^{\alpha t} u(t) \in L_{p_0}(E_0), \quad e^{-(1-\alpha)t} u(t) \in L_{p_1}(E_1)$$

с нормой

$$\| u \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)} = \max \left(\| e^{\alpha t} u(t) \|_{L_{p_0}(E_0)}, \ \| e^{-(1-\alpha)t} u(t) \|_{L_{p_1}(E_1)} \right).$$

Нетрудно проверить, что для каждой функции $u(t) \in W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha$ интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt$ сходится в пространстве E_0.

Рассмотрим совокупность $S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$ элементов

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, dt \in E_0, \tag{6}$$

$S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$ будет линейным пространством, которое становится банаховым пространством, если ввести норму

$$\| x \|_{S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)} = \inf \| u \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)},$$

где infimum берется по всем $u \in W$, удовлетворяющим равенству (6). Пространство $S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$ называется пространством средних.

В работе [7] показано, что банахова тройка пространств $(E_0, E_1; S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha))$ будет интерполяционной типа α по отношению к банаховой тройке $(F_0, F_1; S(p_0, F_0, p_1, F_1, \alpha))$, поэтому при фиксированных p_0 и p_1 мы получаем интерполяционную конструкцию $\mathfrak{J}_{p_0, p_1}$ промежуточных пространств

$$\mathfrak{J}_{p_0, p_1} : (E_0, E_1) \to S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) = [E_0, E_1]_\alpha^{p_0, p_1} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Теорема 2. *Пусть банахово пространство E_1 вложено в E_0 и N — подпространство E_1, замкнутое в E_0 и E_1. Тогда при p_0, $p_1 < \infty$*

$$[E_0/N, E_1/N]_\alpha^{p_0,p_1} = [E_0, E_1]_\alpha^{p_0,p_1}/N.$$

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — вложенные банаховы пространства, N — подпространство E_1, замкнутое в E_0 и E_1 и τ — каноническое отображение E_i в E_i/N $(i = 0, 1)$, ε — произвольное положительное число и x_ε^0 — элемент из класса смежности $\hat{x}$, для которого*

$$\| x_\varepsilon^0 \|_{E_0} \leqslant \| \tau(x_\varepsilon^0) \|_{E_0/N} + \varepsilon.$$

Пусть $\hat{x}$ — произвольный элемент E_1/N. Существует такая константа C, не зависящая от элемента $\hat{x}$, что для всякого элемента $x_\varepsilon^0 \in \hat{x}$ справедливо неравенство

$$\| x_\varepsilon^0 \|_{E_1} \leqslant C \| \hat{x} \|_{E_1/N} + C\varepsilon. \qquad (7)$$

Доказательство. Выберем элемент $x_\varepsilon^1 \in \hat{x}$ так, чтобы

$$\| x_\varepsilon^1 \|_{E_1} \leqslant \| \hat{x} \|_{E_1/N} + \varepsilon.$$

По условию леммы $x_\varepsilon^0 \in \hat{x}$, поэтому $x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \in N$. Так как подпространство N замкнуто в E_0 и E_1, то в силу теоремы Банаха об обратном операторе нормы $\| \ \|_{E_0}$ и $\| \ \|_{E_1}$ на подпространстве N эквивалентны; следовательно, существует такая константа K, что

$$\| x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \|_{E_1} \leqslant K \| x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \|_{E_0}.$$

Далее

$$\| x_\varepsilon^0 \|_{E_1} - \| x_\varepsilon^1 \|_{E_1} \leqslant K \| x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \|_{E_0}$$

и

$$\| x_\varepsilon^0 \|_{E_1} \leqslant K \| x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \|_{E_0} + \| x_\varepsilon^1 \|_{E_1}. \qquad (8)$$

Обозначим через C_1 константу вложения пространства E_1 в E_0:

$$\| x \|_{E_0} \leqslant C_1 \| x \|_{E_1} \ (x \in E_1).$$

По неравенству треугольника

$$\| x_\varepsilon^0 - x_\varepsilon^1 \|_{E_0} \leqslant \| x_\varepsilon^0 \|_{E_0} + \| x_\varepsilon^1 \|_{E_0} \leqslant C_1 \| x_\varepsilon^1 \|_{E_1} + \| \hat{x} \|_{E_0/N} + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \| x_\varepsilon^1 \|_{E_1} + C_1 \| \hat{x} \|_{E_1/N} + \varepsilon \leqslant 2C_1 \| \hat{x} \|_{E_1/N} + (C_1 + 1)\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (8) вытекает

$$\| x_\varepsilon^0 \|_{E_1} \leqslant 2C_1 K \| \hat{x} \|_{E_1/N} + K(C_1 + 1)\varepsilon + \| \hat{x} \|_{E_1/N} + \varepsilon =$$

$$= (2C_1 K + 1) \| \hat{x} \|_{E_1/N} + [K(C_1 + 1) + 1]\varepsilon.$$

Полагая

$$C = \max\{(2C_1 K + 1),\ K(C_1 + 1) + 1\},$$

получим неравенство (7).

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим отображения $\varphi, \Psi, \varphi_1, \Psi_1$, определяемые формулами:

$$\varphi\colon W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \to W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha);\ u(t) \xrightarrow{\varphi} \hat{u}(t) = \tau u(t),\ u(t) \in$$

$\in W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$, $\hat{u}(t) \in W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$, τ — каноническое отображение E_0 в фактор-пространство E_0/N;

$$\Psi\colon W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha) \to S(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha),\ \hat{u}(t) \xrightarrow{\Psi} x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(t)dt,$$

$\hat{u}(t) \in W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$, $x \in S(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$;

$$\varphi_1\colon W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \to S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha),\ u(t) \xrightarrow{\varphi_1} x = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt, u(t) \in W(p_0,$$

$E_0, p_1, E_1, \alpha)$, $x \in S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$;

$$\Psi_1\colon S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \to S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha),\ x \xrightarrow{\Psi_1} \hat{x} = \tau(x),\ x \in S(p_0, E_0, p_1,$$

$E_1, \alpha)$, $\hat{x} \in S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/N$.

Тогда

$$W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \xrightarrow{\varphi} W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha) \xrightarrow{\Psi} S(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha),$$

$$W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \xrightarrow{\varphi_1} S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha) \xrightarrow{\Psi_1} S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/N.$$

Положим $\chi = \Psi \circ \varphi$, $\chi_1 = \Psi_1 \circ \varphi_1$. Отображения Ψ, φ_1 и Ψ_1 являются сюръективными; в силу теоремы Банаха об обратном операторе отсюда следует, что Ψ, φ_1, Ψ будут гомоморфизмами. Если мы покажем, что отображение φ также является гомоморфизмом, то тем самым будет доказано, что отображения χ и χ_1 представляют гомоморфизмы. Отображения χ и χ_1 обладают одинаковыми ядрами, ибо

$$\operatorname{Ker}\chi = \left\{ u(t)\colon u(t) \in W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha),\ \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = a \in N \right\} = \operatorname{Ker}\chi_1;$$

так как χ и χ_1 — гомоморфизмы, то

$$S(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha) = W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/\operatorname{Ker}\chi =$$

$$= W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/\operatorname{Ker}\chi_1 = S(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/N$$

или

$$[E_0/N, E_1/N]_\alpha^{p_0,p_1} = [E_0, E_1]_\alpha^{p_0,p_1}/N.$$

Итак, нам осталось показать, что отображение φ является гомоморфизмом. С этой целью рассмотрим множество $\mathfrak{N}(E_1/N)$ конечнозначных функций с компактным носителем, определенных на прямой со значениями в банаховом пространстве E_1/N. Используя результаты книги [9] (см. гл. III, § 1, следствие 1 из теоремы 3.5.3), нетрудно доказать плотность множества $\mathfrak{N}(E_1/N)$ в пространстве $W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$ (напомним $p_0, p_1 < \infty$!).

Пусть $\hat{x}(t)$ — произвольная функция из $\mathfrak{N}(E_1/N)$, тогда

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{e_k}(t)\,\hat{x}_k,$$

где $\varkappa_{e_k}(t)$ — характеристическая функция множества $e_k \subset R^1$, $\hat{x}_k$ — элементы из фактор-пространства E_1/N и $e_k \cap e_i = \varnothing$, если $i \neq k$. В силу определения функции $\hat{x}(t)$ из $\mathfrak{N}(E_1/N)$ существует конечный интервал (a, b) такой, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} e_k \subset (a, b),$$

поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} e^{\alpha p_0 t} dt < \infty, \quad \sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} e^{-(1-\alpha) p_1 t} dt < \infty.$$

Пусть ε_1 — произвольное фиксированное положительное число. Положим

$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{\varepsilon_1}{\left(\sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} e^{\alpha p_0 t} dt \right)^{\frac{1}{p_0}}}, \frac{\varepsilon_1}{C \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} e^{-(1-\alpha) p_1 t} dt \right)^{\frac{1}{p_1}}} \right\},$$

где C — константа, о которой говорилось в лемме 2.

Выберем на основании леммы 2 элементы $x_{\varepsilon,k} \in \hat{x}_k$ так, чтобы

$$\| x_{\varepsilon,k} \|_{E_0} \leqslant \| \hat{x}_k \|_{E_0/N} + \varepsilon, \quad \| x_{\varepsilon,k} \|_{E_1} \leqslant C \| \hat{x}_k \|_{E_1/N} + \varepsilon.$$

Рассмотрим простую функцию $x_\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_{e_k}(t) x_{\varepsilon,k} \in W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$. С помощью неравенства Гельдера оценим норму элемента $x_\varepsilon(t)$ в пространстве $W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$:

$$\| e^{\alpha t} x_\varepsilon(t) \|_{L_{p_0}(E_0)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \| x_\varepsilon(t) \|_{E_0}^{p_0} e^{\alpha p_0 t} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} = \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} \| x_{\varepsilon,k} \|_{E_0}^{p_0} e^{\alpha p_0 t} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{k=1}^{n} (\| \hat{x}_k \|_{E_0/N} + \varepsilon)^{p_0} \int_{e_k} e^{\alpha p_0 t} dt \right\}^{\frac{1}{p_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} \| \hat{x}_k \|_{E_0/N}^{p_0} \int_{e_k} e^{\alpha p_0 t} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} + \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} e^{\alpha p_0 t} dt \right)^{\frac{1}{p_0}} \leqslant \| e^{\alpha t} \hat{x}(t) \|_{L_{p_0}(E_0/N)} + \varepsilon_1;$$

аналогично показывается, что

$$\| e^{-(1-\alpha)t} x_\varepsilon(t) \|_{L_{p_1}(E_1)} \leqslant C \| e^{-(1-\alpha)t} \hat{x}(t) \|_{L_{p_1}(E_1/N)} + \varepsilon_1.$$

Из полученных соотношений вытекает неравенство

$$\| x_\varepsilon(t) \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)} \leqslant C \| \hat{x}(t) \|_{W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)} + \varepsilon_1. \tag{9}$$

Введем на линейном пространстве $\mathfrak{N}(E_1/N)$ две нормы $\| \hat{x}(t) \|_0$ и $\| \hat{x}(t) \|_1$ с помощью равенства

$$\| \hat{x}(t) \|_0 = \| \hat{x}(t) \|_{W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)},$$

$$\| \hat{x}(t) \|_1 = \inf_{\substack{\hat{x}(t) = \varphi[x(t)], \\ x(t) \in W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)}} \| x(t) \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)} =$$

$$= \inf_{\hat{x}(t) = \varphi[x(t)],\, y(t) \in \operatorname{Ker}\varphi} \| x(t) + y(t) \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)} = \| \tilde{x}(t) \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/\operatorname{Ker}\varphi},$$

где $\tilde{x}(t)$ — класс смежности элемента $x(t)$.

По определению отображения φ

$$\| \widehat{x}(t) \|_0 = \| \varphi [x(t)] \|_{W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)} \leqslant \| x(t) \|_{W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)},$$

поэтому $\| \widehat{x}(t) \|_0 \leqslant \| \widehat{x}(t) \|_1$.

С другой стороны, $\varphi [x_\varepsilon(t)] = \widehat{x}(t)$; отсюда и из неравенства (9) следует

$$\| \widehat{x}(t) \|_1 \leqslant C \| \widehat{x}(t) \|_0 + \varepsilon_1;$$

в силу произвольности ε_1

$$\| \widehat{x}(t) \|_1 \leqslant C \| \widehat{x}(t) \|_0.$$

Итак, на пространстве $\mathfrak{N}(E_1/N)$ нормы $\| \widehat{x}(t) \|_1$ и $\| \widehat{x}(t) \|_0$ эквивалентны. Так как $\mathfrak{N}(E_1/N)$ плотно в пространстве $W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$, то отсюда и из предыдущего вытекает, что пространства $W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$ и $W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)/\mathrm{Ker}\, \varphi$ при естественном вложении совпадают и их нормы эквивалентны, так что φ является гомоморфизмом (см. [10, Сводка результатов, § 2, п. 7]).

Теорема 2 доказана.

Случай, когда одно из чисел p_0 или p_1 равно бесконечности, требует дополнительного исследования. Мы сможем доказать лишь более слабое утверждение, чем теорема 2. Напомним предварительно определение почти родственных банаховых пространств: пусть банахово пространство E_1 нормально вложено в E_0 (см. [8]); E_1 называется почти родственным с E_0, если характеристика подпространства E_0' сопряженного пространства E_1' (см. [11]) отлична от нуля.

Теорема 3. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — почти родственные нормально вложенные сепарабельные банаховы пространства. Если E_0 — рефлексивное банахово пространство, то при всех p_0, p_1*

$$[E_0/N, E_1/N]_\alpha^{p_0, p_1} = [E_0, E_1]_\alpha^{p_0, p_1}/N,$$

где N — подпространство E_1, замкнутое в E_0 и E_1.

Докажем предварительно следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $E_1 \subset E_0$ — почти родственные сепарабельные банаховы пространства и $x(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ — сильно измеримая функция со значениями в пространстве E_0. Если почти при всех $t \in R^1$ $x(t) \in E_1$, то $x(t)$ является сильно измеримой функцией со значениями в пространстве E_1.*

Доказательство. Так как E_1 — сепарабельно, то достаточно показать, что функция $x(t)$ слабо измерима в пространстве E_1 (см. [9, гл. III, § 1, п. 3.5, следствие 2]). Рассмотрим произвольный функционал $f \in E_1'$ и функцию $\varphi(t) = f[x(t)]$. Можно показать, что в условиях леммы 2 существует последовательность функционалов $f_n \in E_0'$, которая слабо сходится к f (в смысле слабой сходимости пространства E_1'). Тогда, полагая

$$\varphi_n(t) = f_n[x(t)], \quad \varphi(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t),$$

кроме того, каждая из функций $\varphi_n(t)$ измерима, поэтому измерима и функция $\varphi(t)$.

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 3. Введем на пространстве E_0 новую эквивалентную норму $\|x\|_{E_0^*}$, относительно которой оно будет строго нормированным и, кроме того, для любой слабо сходящейся последовательности из условий

$$x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x, \quad \| x_n \|_{E_0^*} \to \| x \|_{E_0^*}$$

будет следовать сильная сходимость: $\| x_n - x \|_{E_0^*} \to 0$ (см. [12]). Нетрудно заметить, что при этом $W(p_0, E_0^*, p_1, E_1, \alpha) = W(p_0, E_0, p_1, E_1, \alpha)$ и $W(p_0, E_0^*/N, p_1, E_1/N, \alpha) = W(p_0, E_0/N, p_1, E_1/N, \alpha)$.

Пусть $\hat{x}$ — элемент из E_0/N; выберем элемент $x \in \hat{x}$ так, чтобы

$$\| x \|_{E_0^*} = \inf_{x \in \hat{x}} \| x \|_{E_0^*}$$

(такой элемент единственный, поскольку E_0^* строго нормировано). В работе [12, лемма 1] показано, что отображение Q: $E_0^*/N \to E_0^*$, $Q(\hat{x}) = x$ непрерывно.

Рассмотрим произвольную функцию $\hat{x}(t) \in W(p_0, E_0^*/N, p_1, E_1/N, \alpha)$. Положим $x(t) = Q[\hat{x}(t)]$; из непрерывности Q следует сильная измеримость функции $x(t)$ в пространстве E_0. В силу леммы 3 $x(t)$ будет также сильно измеримой функцией со значениями в пространстве E_1.

Лемма 2 утверждает, что $\| x(t) \|_{E_1} \leqslant C \| x(t) \|_{E_1/N}$, где константа C не зависит от t, поэтому $x(t) \in W(p_0, E_*^0, p_1, E_1, \alpha)$. На основании определения отображения φ функция $\varphi[x(t)] = \hat{x}(t)$; так как $\hat{x}(t)$ — произвольный элемент из $W(p_0, E_0^*/N, p_1, E_1/N, \alpha)$, то φ — гомоморфизм. Для завершения доказательства остается лишь заметить, что из последнего утверждения вытекает равенство (1).

Теорема 3 доказана.

§ 3. Замечания и нерешенные проблемы

1. Автору неизвестно ни одного контрпримера, который давал бы отрицательное решение проблемы интерполяции между фактор-пространствами, хотя кажется, что эта проблема решается отрицательно.

Используя результаты работы [13], можно лишь показать, что если $E_1 \subset E_0$ — нормально вложенные родственные (см. [8]) банаховы пространства, то для всякого $\varepsilon > 0$ справедливы вложения:

$$[E_0/N, E_1/N]_{\alpha+\varepsilon} \supset [E_0, E_1]_\alpha/N \supset [E_0/N, E_1/N]_{\alpha-\varepsilon}.$$

2. Семейство промежуточных пространств $[E_0, E_1]_\alpha^K$, построенных с помощью комплексного метода Кальдерона — Лионса, определяются следующим образом (см. [1, 2]). Обозначим через $U(E_0, E_1)$ линейное пространство функций $z \to f(z)$, определенных в полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$ со значениями в $E_0 + E_1$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $f(z)$ голоморфна в открытой полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$, непрерывна и ограничена в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1$;

2) $f(it)$ является непрерывным отображением в пространство E_0, причем $f(it) \to 0$ при $|t| \to \infty$ в норме E_0;

3) $t \to f(1 + it)$ представляет непрерывное отображение в пространство E_1, причем $f(1 + it) \to 0$ при $|t| \to \infty$ в норме E_1.

Вводя норму $\| f \|_{U(E_0, E_1)} = \max \{ \sup_{t \in R^1} \| f(it) \|_{E_0}, \sup_{t \in R^1} \| f(1 + it) \|_{E_1} \}$, мы получим банахово пространство. Семейство пространств $[E_0, E_1]_\alpha^K$, $0 < \alpha < 1$, состоящих из элементов $u \in E_0 + E_1$ таких, что $u = f(\alpha)$ по крайней мере для одного $f \in U(E_0, E_1)$ с нормой

$$\| u \|_{[E_0, E_1]_\alpha^K} = \inf_{u = f(\alpha)} \| f \|_{U(E_0, E_1)}$$

называется семейством промежуточных пространств Кальдерона — Лионса.

Метод средних и комплексный метод тесно связаны между собой (см. [14, 15]), но не тождественны; поэтому теорема 2 не дает полного решения проблемы интерполяции между фактор-пространствами для комплексного метода.

Используя конформное отображение полосы $\overset{\bullet}{\pi}: 0 < \operatorname{Re} z < 1$ на внутренность круга $|z| < 1$, определяемое формулой

$$\xi(z) = \frac{1}{\pi i} \log \left| \frac{ze^{-i\pi\sigma} - e^{i\pi\sigma}}{z - 1} \right|, \quad 0 < \sigma < 1,$$

где log обозначает главную ветвь логарифма, можно показать, что проблема интерполяции между фактор-пространствами для комплексного метода будет решена положительно, если удасться доказать следующее свойство подъема голоморфной функции. Пусть C — круг $|z| \leqslant 1$ с выколотыми точками $z = 1$ и $z = e^{2\pi i\sigma}$, C_1, C_2— дуги, ограниченные этими точками, $\hat{x}(z)$ — голоморфная функция внутри круга C, принимающая значения в $E_0/N + E_1/N$ и удовлетворяющая условиям:

1) $\hat{x}(z)$ принимает на C_1 значения из E_0/N и непрерывна в E_0/N;

2) $\hat{x}(z)$ принимает значения на дуге C_2 из E_1/N и непрерывна в E_1/N;

3) $\hat{x}(z)$ ограничена в круге C по норме $E_0/N + E_1/N$ и непрерывна вплоть до границы, $x(1) = \theta$, $x(e^{2\pi i\sigma}) = \theta$.

Пусть τ — каноническое отображение E_i/N в E_i; существует ли голоморфная функция $x(z)$, удовлетворяющая условиям 1) — 3) с заменой E_i/N на $E_i (i = 0, 1)$ и такая, что $\tau x(z) = \hat{x}(z)$?

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Кальдерон, Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод, Сб. Математика, 9 : 3, 1965.
2. Э. Мадженес, Интерполяционные пространства и уравнения в частных производных, УМН, т. XXI, № 2 (128), 1966.
3. J. L. Lions, E. Magenes, Problemes aux limites non homogénes, I, Ann. Sci Norm. Sup. Pisa, 14, 1960, 259—308; II, Ann. Inst. Fourier, 11, 1961, 137—178; 111, Ann. Sci Norm. Sup. Pisa, 15, 1961, 39—101; IV, Ann. Sci Norm. Sup. Pisa, 15, 1961, 311—326; V, Ann. Sci. Norm. Sup. Pisa, 16, 1962, 1—44; VI, Journ. d'Analyse Math., 11, 1963, 165—188; VII, Ann. matem. pura appl., 63, 1963, 201—224.
4. N. Aronszajn and E. Gagliardo, Interpolation spaces and interpolation methods, Technical Report, 3, Lawrence, Kansas, 1964.
5. M. I. Kadec and A. Pelczyński, Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p, Stud. Math., XXI, 1962.
6. М. И. Кадец, О линейной размерности пространств L_p, УМН, т. 122, № 13 (6), 1958.
7. J. L. Lions, J. Peetre, Propriétés d'espaces d'interpolations, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 253, 1961, 1747—1749.
8. С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Шкалы банаховых пространств, УМН, т. XXI, № 2, (128), 1966.
9. Э. Хилле, Р. Филипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962.
10. Н. Бурбаки, Топологические векторные пространства, ИЛ, М, 1959.
11. J. Dixmier, Sur un théorème de Banach, Duke Math. Journ., 15, 1948, 1057—1071.
12. М. И. Кадец, О некоторых свойствах потенциальных операторов в рефлективных сепарабельных пространствах, Изв. вузов, № 2(15), 1960.
13. Ю. И. Петунин, Факторизация шкал банаховых пространств, Функциональный анализ и его приложения, т. 4, вып. 4, 1970.
14. J. L. Lions, Une propriété de stabilite par interpolation: applications, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), 256, 1963, 855—857.
15. J. L. Lions, J. Peetre, Sur une classe d'espaces interpolation, Paris, 1963.

Поступила 11.II 1970 г.

Киевский государственный университет