УДК 517.946.82

Об асимптотическом представлении решений для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени

С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Н. А. Сотниченко

Известно, что линейными и квазилинейными уравнениями в частных производных описываются многие колебательные системы с распределенными параметрами. Для построения решений таких уравнений с успехом применяются асимптотические методы, предложенные в работах [1—8].

В данной работе рассматривается смешанная задача для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени и с медленно меняющимися коэффициентами. С помощью асимптотических методов, предложенных в работах [4, 5], строится частное решение этой системы.

Отметим, что вопрос применения асимптотических методов для построения решений дифференциальных уравнений в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами, не содержащих запаздывания, рассматривался в работах [4, 5, 9, 10].

§ 1. Рассмотрим следующую систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием по времени:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = A_1(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau,x,\varepsilon)u(t,x) + \varepsilon A_3(\tau,x,\varepsilon)u(t-\Delta(\tau),x) + \varepsilon A_4(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \varepsilon A_5(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t-\Delta(\tau),x)}{\partial t} + \varepsilon A_6(\tau,x,\varepsilon)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + \varepsilon g(\tau,x,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(t,x) &= \varphi(t,x), \\ u_t(t,x) &= \psi(t,x) \end{aligned}\right\} \text{ для } -t_0 \leqslant t \leqslant 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)|_{x=0} = u(t,x)|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant \Delta(\tau) \leqslant t_0$ при $0 \leqslant \tau \leqslant L$, $\dfrac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt} = \nu(\tau) > 0$, $u(t,x)$, $g(\tau,x,\varepsilon)$ — n-мерные векторы, $A_k(\tau,x,\varepsilon)$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ — квадратные матрицы порядка $n \times n$.

Предполагается, что выполняются следующие условия:

1°. Имеют место асимптотические разложения по степеням малого параметра ε

$$A_1(\tau, x, \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon\widetilde{A}_1(\tau, x, \varepsilon) = A_0(\tau) + \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \widetilde{A}_1^{(s)}(\tau, x), \tag{4}$$

$$A_j(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_j^{(s)}(\tau, x), \ \ j = 2, 3, \ldots, 6, \tag{5}$$

$$g(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s g_s(\tau, x).$$

2°. Матрицы $A_0(\tau)$, $\widetilde{A}_1^{(s)}(\tau, x)$, $A_j^{(s)}(\tau, x)$ $(j = 2, \ldots, 6)$, векторы $g_s(\tau, x)$ $(s = 0, 1, \ldots)$, запаздывание $\Delta(\tau)$ и функция

$$\nu(\tau) = \frac{d\theta(t, \varepsilon)}{dt} \tag{6}$$

— неограниченно дифференцируемые по τ на сегменте $[0, L]$.

3°. На сегменте $[0, L]$ при любом $r, s = 0, 1, \ldots$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^r A_{mk}^{(s)}(\tau)}{d\tau^r} \right\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^r B_{mk}^{(s)}(\tau)}{d\tau^r} \right\|^2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^r C_{mk}^{(s)}}{d\tau^r} \right\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^r D_{mk}^{(s)}(\tau)}{d\tau^r} \right\|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{d^r f_m^{(s)}(\tau)}{d\tau^r} \right|^2. \tag{7}$$

где

$$A_{mk}^{(s)}(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l [A_6^{(s)}(\tau, x)\, \omega_k \cos\omega_k x + A_2^{(s)}(\tau, x) \sin\omega_k x - \omega_k^2 \times$$

$$\times \widetilde{A}_1^{(s)}(\tau, x) \sin\omega_k x] \sin\omega_m x dx,$$

$$B_{mk}^{(s)}(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l A_3^{(s)}(\tau, x) \sin\omega_k x \sin\omega_m x dx,$$

$$C_{mk}^{(s)}(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l A_4^{(s)}(\tau, x) \sin\omega_k x \sin\omega_m x dx, \tag{8}$$

$$D_{mk}^{(s)}(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l A_5^{(s)}(\tau, x) \sin\omega_k x \sin\omega_m x dx,$$

$$f_m^{(s)}(\tau) = \frac{2}{l} \int_0^l g_s(\tau, x) \sin\omega_m x dx,$$

$$\omega_m = \frac{m\pi}{l}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

4°. Собственные числа матрицы $A_0(\tau)$ при любом τ $(\tau \in [0, L])$ положительные и сохраняют постоянную кратность.

Решение задачи (1)—(3) ищется в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\omega_k x z_k(t, \varepsilon), \tag{9}$$

где n-мерные векторы $z_k(t, \varepsilon)$ подлежат определению. Тогда задача (1)—(3) сводится к задаче Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d^2 z_m(t, \varepsilon)}{dt^2} = -\omega_m^2 A_0(\tau) z_m(t, \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{mk}^{(s)}(\tau) z_k(t, \varepsilon) + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{mk}^{(s)}(\tau) z_k(t-\Delta(\tau), \varepsilon) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_{mk}^{(s)}(\tau) \frac{dz_k(t, \varepsilon)}{dt} + \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s D_{mk}^{(s)}(\tau) \frac{dz_k(t-\Delta(\tau), \varepsilon)}{dt} \right] +$$

$$+ \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_m^{(s)}(\tau) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} z_m(t, \varepsilon) &= \varphi_m(t), \\ \frac{dz_m(t, \varepsilon)}{dt} &= \psi_m(t) \end{aligned} \right\} \text{ для } -t_0 \leqslant t \leqslant 0. \tag{11}$$

Полагая

$$z_m(t) = q_{1m}(t), \quad \frac{dz_m(t)}{dt} = q_{2m}(t), \tag{12}$$

приведем систему (10) к виду

$$\frac{dq_m(t)}{dt} = H_m(\tau) q_m(t) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{mk}(\tau, \varepsilon) q_k(t) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}(\tau, \varepsilon) q_k(t - \Delta(\tau)) + \varepsilon P_m(\tau, \varepsilon) e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \; m = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где $q_m(t)$, $P_m(\tau, \varepsilon)$ — векторы размерности $2n$, а $H_m(\tau)$, $H_{mk}(\tau, \varepsilon)$, $G_{mk}(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка $2n$, имеющие вид

$$q_m(t) = \begin{bmatrix} q_{1m}(t) \\ q_{2m}(t) \end{bmatrix}, \quad q_m(t - \Delta(\tau)) = \begin{bmatrix} q_{1m}(t - \Delta(\tau)) \\ q_{2m}(t - \Delta(\tau)) \end{bmatrix},$$

$$P_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s P_m^{(s)}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f_m^{(s)}(\tau) \end{bmatrix},$$

$$H_{mk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H_{mk}^{(s)}(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{mk}^{(s)}(\tau) & \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_{mk}^{(s)}(\tau) \end{Vmatrix}, \tag{14}$$

$$G_{mk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s G_{mk}^{(s)}(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{mk}^{(s)}(\tau) & \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s D_{mk}^{(s)}(\tau) \end{matrix} \right\|,$$

$$H_m(\tau) = \left\| \begin{matrix} 0 & E \\ -\omega_m^2 A_0(\tau) & 0 \end{matrix} \right\|, \quad m, k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть $\lambda_{m1}(\tau), \ldots, \lambda_{m2n}(\tau)$ — корни характеристического уравнения

$$\det \| H_m(\tau) - \lambda_m(\tau) E \| = 0, \ m = 1, 2, \ldots . \tag{15}$$

В этой работе мы строим асимптотическое решение системы (13) в том случае, когда среди корней уравнения (15) появляются корни постоянной кратности с кратными элементарными делителями. Предположим, что корень $\lambda_{m1}(\tau)$ на сегменте $[0, L]$ обладает постоянной кратностью k_{m1}, корень $\lambda_{m2}(\tau)$ — кратностью k_{m2} и т. д., корень $\lambda_{mp_m}(\tau)$—кратностью k_{mp_m} $(\sum\limits_{j=1}^{p_m} k_{mj} = 2n)$ и пусть корню $\lambda_{mj}(\tau)$ $(j = 1, \ldots, p_m)$ соответствует один элементарный делитель также кратности k_{mj}. Тогда существует такая неособая матрица $T_m(\tau)$ для матрицы $H_m(\tau)$, что

$$W_m(\tau) = T_m^{-1}(\tau) H_m(\tau) T_m(\tau) = \left\| \begin{matrix} W_{m1}(\tau) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & W_{m2}(\tau) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & W_{mp_m}(\tau) \end{matrix} \right\|, \tag{16}$$

где

$$W_{mj}(\tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda_{mj}(\tau) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{mj}(\tau) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{mj}(\tau) \end{matrix} \right\|, \quad j = 1, \ldots, p_m; \ m = 1, 2, \ldots . \tag{17}$$

При построении асимптотического решения системы (13) будем различать два случая:

1) «резонанса», когда функция $\nu(\tau) = \frac{d\theta}{dt}$ при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ становится равной одному из корней уравнения (15), например

$$i\nu(\tau) = \lambda_{11}(\tau), \ i = \sqrt{-1},$$

однако для всех τ $(\tau \in [0, L])$

$$i\nu(\tau) \neq \lambda_{mj}(\tau), \ m = 2, 3, \ldots; \ j = 1, \ldots, p_m,$$
$$i\nu(\tau) \neq \lambda_{1k}(\tau), \ k = 2, \ldots, p_1; \tag{18}$$

2) «нерезонанса», когда при любом $\tau \in [0, L]$

$$i\nu(\tau) \neq \lambda_{mj}(\tau), \ j = 1, \ldots, p_m; \ m = 1, 2, \ldots . \tag{19}$$

§ 2. Алгоритм построения указанного решения в «резонансном» случае дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1°—4° *и матрица*

$$M(\tau) = T_1^{-1}(\tau)\,[T_1'(\tau) - \widetilde{H}_{11}^{(0)}(\tau)\, T_1(\tau)] \ \ (\widetilde{H}_{11}^{(0)} = H_{11}^{(0)} + G_{11}^{(0)} e^{-\Delta\lambda_{11}}) \tag{20}$$

такова, что ее элемент $\{M(\tau)\}_{k_{11}1}$ удовлетворяет условию

$$\{M(\tau)\}_{k_{11}1} \neq 0 \tag{21}$$

при любом $\tau \in [0, L]$, то система дифференциальных уравнений (13) *в «резонансном» случае имеет формальное решение вида*

$$q_m(t) = [U_m(\tau, \mu_1)\,\eta(t) + r_m(\tau, \mu_1)]\, e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{22}$$

где скалярная функция $\eta(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = [\lambda_1(\tau, \mu_1) - i\nu(\tau)]\,\eta(t) + z(\tau, \mu_1), \tag{23}$$

причем

$$U_m(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s U_m^{(s)}(\tau), \quad r_m(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s r_m^{(s)}(\tau),$$

$$\lambda_1(\tau, \mu_1) = \sum_{s=1}^{\infty} \mu_1^s \lambda_1^{(s)}(\tau) + \lambda_{11}(\tau), \tag{24}$$

$$z(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s z_s(\tau), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

$$\mu_1 = \sqrt[k_{11}]{\varepsilon}. \tag{25}$$

Доказательство. Для определения членов разложений (24) подставим выражение для вектора $q_m(t)$ (22) в систему (13) и приравняем в полученном тождестве коэффициенты при $\eta(t)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}$ и $e^{i\theta(t,\varepsilon)}$. Получим два соотношения для определения неизвестных коэффициентов формальных разложений (24):

$$\begin{gathered}[H_m(\tau) - \lambda_1(\tau, \mu_1) E]\, U_m(\tau, \mu_1) = \varepsilon U_m'(\tau, \mu_1) - \\ - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[H_{mk}(\tau, \varepsilon)\, U_k(\tau, \mu_1) + \\ + G_{mk}(\tau, \varepsilon)\, U_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \mu_1) \exp\left(\int_t^{t-\Delta(\tau)} \lambda_1(\tau, \mu_1)\, dt \right) \Bigg]\end{gathered} \tag{26}$$

и

$$\begin{gathered}[H_m(\tau) - i\nu(\tau) E]\, r_m(\tau, \mu_1) = \varepsilon r_m'(\tau, \mu_1) + U_m(\tau, \mu_1)\, z(\tau, \mu_1) - \\ - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg\{ H_{mk}(\tau, \varepsilon)\, r_k(\tau, \mu_1) + G_{mk}(\tau, \varepsilon) \Bigg[r_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \mu_1)\, e^{i\int_t^{t-\Delta(\tau)} \nu(\tau) dt} + \\ + U_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \mu_1)\, e^{\int_t^{t-\Delta(\tau)} \lambda_1(\tau, \mu_1)\, dt} \int_t^{t-\Delta(\tau)} z(\tau, \mu_1)\, e^{\int_t^{t_1} [i\nu(\tau) - \lambda_1(\tau, \mu_1)] dt'}\, dt_1 \Bigg] \Bigg\} - \\ - \varepsilon P_m(\tau, \varepsilon) \quad \left(m = 1, 2, \ldots;\ \ ' = \frac{d}{d\tau} \right).\end{gathered} \tag{27}$$

Перейдем к определению неизвестных коэффициентов, входящих в соотношения (26). Для этого нам потребуются формальные разложения по параметру μ_1 вектор-функции $U_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \mu_1)$ и скалярной функции $\exp\left(\int_t^{t-\Delta(t)} \lambda_1(\tau, \mu_1)\, dt \right)$.

Пусть

$$U_k(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\ \mu_1)=b_k(\tau,\mu_1)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_1^s b_k^{(s)}(\tau)=$$

$$=U_k^{(0)}(\tau)+\mu_1 U_k^{(1)}(\tau)+\mu_1^2 U_k^{(2)}(\tau)+\ldots+\mu_1^{k_{11}}\left(U_k^{(k_{11})}-\Delta\frac{dU_k^{(0)}(\tau)}{d\tau}\right)+\ldots, \quad (28)$$

$$\exp\left(\int_t^{t-\Delta(\tau)}\lambda_1(\tau,\mu_1)\,dt\right)=h(\tau,\mu_1)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_1^s h_s(\tau)=\exp\left(-\Delta(\tau)\lambda_{11}(\tau)\right)\Big\{1-$$

$$-\mu_1\Delta(\tau)\lambda_1^{(1)}(\tau)+\mu_1^2\frac{\Delta(\tau)}{2}\left[k_{11}^2\lambda_1^{(1)}(\tau)-\lambda_1^{(2)}(\tau)(k_{11}^2+2)\right]+\ldots\Big\}. \quad (29)$$

Тогда соотношение (26) примет вид

$$\Big[H_m(\tau)-\lambda_1(\tau,\mu_1)E\Big]U_m(\tau,\mu_1)=\varepsilon U'_m(\tau,\mu_1)-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\Big[H_{mk}(\tau,\varepsilon)U_k(\tau,\mu_1)+$$

$$+G_{mk}(\tau,\varepsilon)b_k(\tau,\mu_1)h(\tau,\mu_1)\Big]. \quad (30)$$

Приравнивая в соотношении (30) коэффициенты при $\mu_1^s (s=0,\ 1,\ \ldots)$, получим для определения неизвестных коэффициентов следующую систему уравнений:

$$[H_m(\tau)-\lambda_{11}(\tau)E]U_m^{(s)}(\tau)=\sum_{j=0}^{s-1}U_m^{(j)}(\tau)\lambda_1^{(s-j)}(\tau)+v_m^{(s)}(\tau)\ \ (m=1,2,\ldots;$$

$$s=0,1,\ldots), \quad (31)$$

где

$$v_m^{(s)}(\tau)=\frac{dU_m^{(s-k_{11})}(\tau)}{d\tau}-\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{s}{k_{11}}\right]}H_{mk}^{(j)}(\tau)U_k^{(s-k_{11}j-k_{11})}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j_1=0}^{s}\ \sum_{j_0=0}^{\left[\frac{s}{k_{11}}\right]-j_1}G_{mk}^{(j_0)}(\tau)\,b_k^{(s-k_{11}j_0-k_{11}-j_1)}(\tau)\,h_{j_1}(\tau)\right] \quad (32)$$

$\left(m=1,\ 2,\ldots;\quad s=0,1,2,\ldots;\ \left[\dfrac{s}{k_{11}}\right]\text{— целая часть }\dfrac{s}{k_{11}}\right)$.

Предполагаем, что вектор $v_m^{(s)}(\tau)$ неограниченно дифференцируемый (по этому поводу см. [10]) по τ на сегменте $[0,\ L]$. Далее выражению (31), используя (16), придадим вид

$$[W_m(\tau)-\lambda_{11}(\tau)E]\ q_m^{(s)}(\tau)=\sum_{j=0}^{s-1}q_m^{(j)}(\tau)\lambda_1^{(s-j)}(\tau)+\xi_m^{(s)}(\tau),\ \ s=0,1,\ldots;\ m=1,2,\ldots, \quad (33)$$

где
$$\xi_m^{(s)}(\tau)=T_m^{-1}(\tau)v_m^{(s)}(\tau),\quad q_m^{(s)}(\tau)=T_m^{-1}(\tau)U_m^{(s)}(\tau). \quad (34)$$

Ввиду того, что матрица $W_m(\tau)$ имеет квазидиагональный вид (16), уравнение (33) распадается на p_m уравнений

$$[W_{mi}(\tau)-\lambda_{11}(\tau)E]\,q_{mi}^{(s)}(\tau)=\sum_{j=0}^{s-1}q_{mi}^{(j)}(\tau)\lambda_1^{(s-j)}(\tau)+\xi_{mi}^{(s)}(\tau),\quad s=0,\ 1,\ \ldots; \quad (35)$$

$$m = 1, 2, \ldots; \quad i = 1, 2, \ldots, \quad p_m.$$

Так как

$$\det \| W_{mi}(\tau) - \lambda_{11}(\tau) E \| \neq 0 \tag{36}$$

для всех $m = 2, 3, \ldots, i = 1, \ldots, p_m$ и при $m = 1$ для всех $i = 2, \ldots, p_1$, то, считая известными функции $\lambda_1^{(s)}(\tau)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, находим

$$q_{mi}^{(s)}(\tau) = [W_{mi}(\tau) - \lambda_{11}(\tau) E]^{-1} \left[\sum_{j=0}^{s-1} q_{mi}^{(j)}(\tau) \lambda_1^{(s-j)}(\tau) + \xi_{mi}^{(s)}(\tau) \right], m = 2, \ldots;$$

$$i = 1, \ldots, p_m; \quad i = 2, \ldots, p_1. \tag{37}$$

Теперь для этих значений индексов из (34) находим вектор $U_m^{(s)}(\tau)$. Для того, чтобы определить вектора $q_{11}^{(s)}(\tau)$ и функции $\lambda_1^{(s+1)}(\tau)$ $(s = 0, 1, \ldots)$, положим в (35) $i = m = 1$. Тогда получим

$$I_1 q_{11}^{(s)}(\tau) = \sum_{j=0}^{s-1} q_{11}^{(j)}(\tau) \lambda_1^{(s-j)}(\tau) + \xi_{11}^{(s)}(\tau), \; s = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

где

$$I_1 = \left.\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \end{Vmatrix}\right\} k_{11}. \tag{39}$$

Из (38) при $s = 0$ имеем

$$I_1 q_{11}^{(0)}(\tau) = 0. \tag{40}$$

Отсюда видим, что первая компонента вектора $q_{11}^{(0)}(\tau)$ остается произвольной, а все остальные равны нулю, т. е.

$$\{q_{11}^{(0)}(\tau)\}_j = 0, \quad j = 2, \ldots, k_{11}. \tag{41}$$

Чтобы получить нетривиальное решение, положим

$$\{q_{11}^{(0)}(\tau)\}_1 = 1. \tag{42}$$

Итак, вектор $q_{11}^{(0)}(\tau)$ найден, а теперь из (34) получаем

$$U_1^{(0)}(\tau) = T_1(\tau) q_1^{(0)}(\tau). \tag{43}$$

Далее видим, что уравнение (38) при $s \geqslant 1$ содержит два неизвестных: вектор $q_{11}^{(s)}(\tau)$ и функцию $\lambda_1^{(s)}(\tau)$, которые нам и нужно определить.

Сначала заметим, что из матрицы I_1 следует, что первые компоненты векторов $q_{11}^{(s)}(\tau)$ являются произвольными; положим их равными нулю

$$\{q_{11}^{(s)}(\tau)\}_1 = 0, \quad s = 1, 2, \ldots \tag{44}$$

Умножив обе части уравнения (38) на матрицу $I_1^{k_{11}-1}$, получим скалярное уравнение

$$\sum_{j_{k_{11}-1}=k_{11}-1}^{s-1} \ldots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \lambda_1^{(j_1)}(\tau) \lambda_1^{(j_2-j_1)}(\tau) \ldots \lambda_1^{(s-j_{k_{11}-1})}(\tau) + \{y_{11}^{(s)}(\tau)\}_1 = 0,$$

$$s = k_{11}, \; k_{11}+1, \ldots, \tag{45}$$

где

$$y_{11}^{(s)}(\tau) = I_1^{k_{11}-1} \xi_{11}^{(s)}(\tau) + I_1^{k_{11}-2} \sum_{j_1=k_{11}}^{s-1} \xi_{11}^{(j_1)}(\tau) \lambda_1^{(s-j_1)}(\tau) + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{j_{k_{11}-2}=2k_{11}-2}^{s-1} \ldots \sum_{j_1=k_{11}}^{j_2-1} \xi_{11}^{(j_1)}(\tau)\,\lambda_1^{(j_2-j_1)}(\tau)\ldots\lambda_1^{(s-j_{k_{11}-2})}(\tau),\ s=k_{11},\ k_{11}+1,\ldots \tag{46}$$

Теперь из уравнения (45) можно определить функции $\lambda_1^{(s)}(\tau)$ (более детально см. [10]). Так, положив в нем $s = k_{11}$ (при $1 \leqslant s \leqslant k_{11}-1$ оно обращается в тождество) получим

$$[\lambda_1^{(1)}(\tau)]^{k_{11}} + \{y_{11}^{(k_{11})}(\tau)\}_1 = 0. \tag{47}$$

Отсюда, учитывая (32), (46), получаем

$$\lambda_1^{(1)}(\tau) = \sqrt[k_{11}]{-\{M(\tau)\}_{k_{11},1}}\,. \tag{48}$$

При $s = k_{11}+1$ из уравнения (45) находим

$$\lambda_1^{(2)}(\tau) = \frac{\{y_{11}^{(k_{11}+1)}(\tau)\}_1}{k_{11}[\lambda_1^{(1)}(\tau)]^{k_{11}-1}}\,. \tag{49}$$

Полагая $s = k_{11},\ k_{11}+1,\ \ldots$, из (45) будем находить функции $\lambda_1^{(1)}(\tau)$, $\lambda_1^{(2)}(\tau),\ \ldots$, подставляя которые в систему (38), определим из последней компоненты векторов $q_{11}^{(s)}(\tau)$ $(s = 1, 2\ \ldots)$.

Из построения функций $\lambda_1^{(s)}(\tau)$ $(s = 1, 2\ \ldots)$ видно, что они неограниченно дифференцируемые по τ на сегменте $[0, L]$. Используя метод работы [10], легко показать также неограниченную дифференцируемость по τ на сегменте $[0, L]$ векторов $v_m^{(s)}(\tau)$ $(s = 0, 1, \ldots)$, а заодно с этим и неограниченную дифференцируемость вектор-функций $U_m^{(s)}(\tau)$ $(s = 0, 1\ \ldots;\ m = 1, 2, \ldots)$.

Таким же способом, приравнивая в выражении (27) коэффициенты при $\mu_1^s (s=0, 1, \ldots)$, можно определить неизвестные коэффициенты вектор-функции $r_m(\tau, \mu_1)$ и скалярной функции $z(\tau, \mu_1)$, т. е. соответственно $r_m^{(s)}$ и z_s $(s = 0, 1, \ldots)$.

Итак, указав способ определения неизвестных коэффициентов формальных разложений (24), мы тем самым доказали теорему 1.

§ 3. Для «нерезонансного» случая имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, *то система линейных дифференциальных уравнений* (13) *в «нерезонансном» случае имеет формальное частное решение вида*

$$q_m(t) = U_m(\tau, \mu_1)\,\xi(t) + R_m(\tau, \varepsilon)\,e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{50}$$

а

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \lambda_1(\tau, \mu_1)\,\xi(t), \tag{51}$$

где $U_m(\tau, \mu_1)$, $\lambda_1(\tau, \mu_1)$ — *те же, что и в теореме* 1, *т. е.*

$$U_m(\tau, \mu_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu_1^s U_m^{(s)}(\tau),\quad \lambda_1(\tau, \mu_1) = \lambda_{11}(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu_1^s \lambda_1^{(s)}(\tau), \tag{52}$$

$R_m(\tau, \varepsilon)$ — *2n-мерный вектор, допускающий формальное разложение*

$$R_m(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s R_m^{(s)}(\tau),\quad m = 1, 2, \ldots \tag{53}$$

Доказательство. Для определения членов формальных рядов (52), (53) подставим вектор $q_m(t)$ из (50) в систему (13), учитывая при этом соотношение (51). Приравнивая в полученном таким образом тождестве отдельно коэффициенты при функции $\xi(t)$ и отдельно свободные члены, получаем два соотношения:

$$[H_m(\tau) - \lambda_1(\tau, \mu_1) E] U_m(\tau, \mu_1) = \varepsilon U'_m(\tau, \mu_1) - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [H_{mk}(\tau, \varepsilon) U_k(\tau, \mu_1) +$$

$$+ G_{mk}(\tau, \varepsilon) U_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \mu_1) \exp\left(\int_t^{t-\Delta(\tau)} \lambda_1(\tau, \mu_1)\, dt\right)\Bigg], \tag{54}$$

$$[H_m(\tau) - i\nu(\tau) E] R_m(\tau, \varepsilon) = \varepsilon R'_m(\tau, \varepsilon) - \varepsilon P_m(\tau, \varepsilon) -$$

$$- \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [G_{mk}(\tau, \varepsilon) R_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) \exp\left(i \int_t^{t-\Delta(\tau)} \nu(\tau)\, dt\right) +$$

$$+ H_{mk}(\tau, \varepsilon) R_k(\tau, \varepsilon)], \quad m = 1, 2, \ldots; \quad ' = \frac{d}{d\tau}. \tag{55}$$

Видим, что соотношение (54) такое же, как и (26) из теоремы 1, в которой уже указан метод определения неизвестных коэффициентов формальных разложений. Поэтому мы переходим к соотношению (55). Предполагая, что векторы $R_k^{(s)}(\tau)$ $(s = 0, 1, \ldots)$ неограниченно дифференцируемые по τ $(\tau \in [0, L])$, разложим в формальный ряд по степеням ε вектор $R_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon)$ и функцию $\exp\left(i \int_t^{t-\Delta(\tau)} \nu(\tau)\, dt\right)$.
Получаем

$$R_k(\tau - \varepsilon\Delta(\tau), \varepsilon) = a_k(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s a_k^{(s)}(\tau) =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{j=0}^{s} (-1)^{s-j} \Delta^{s-j}(\tau) \frac{1}{(s-j)!} \frac{d^{s-j} R_k^{(j)}(\tau)}{d\tau^{s-j}}, \tag{56}$$

$$\exp\left(i \int_t^{t-\Delta(\tau)} \nu(\tau)\, dt\right) = \exp(-i\Delta(\tau)\nu(\tau)) \Big\{1 + \varepsilon \frac{i\Delta^2(\tau)\nu'(\tau)}{2} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2!} \Delta^3(\tau) \left[-\frac{\Delta(\tau)\nu'^2(\tau)}{4} - \frac{i\nu''(\tau)}{3}\right] + \ldots\Big\} = n(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s n_s(\tau). \tag{57}$$

Теперь выражение (55) с учетом обозначений, введенных в (56) и (57), запишется так

$$[H_m(\tau) - i\nu(\tau) E] R_m(\tau, \varepsilon) = \varepsilon R'_m(\tau, \varepsilon) - \varepsilon P_m(\tau, \varepsilon) -$$

$$- \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [G_{mk}(\tau, \varepsilon) a_k(\tau, \varepsilon) n(\tau, \varepsilon) + H_{mk}(\tau, \varepsilon) R_k(\tau, \varepsilon)]. \tag{58}$$

Приравнивая в соотношении (58) коэффициенты при ε^s $(s = 0, 1, \ldots)$, получаем

$$[H_m(\tau) - i\nu(\tau) E] R_m^{(s)}(\tau) = \Omega_m^{(s)}(\tau), \tag{59}$$

где

$$\Omega_m^{(s)}(\tau) = R_m^{'(s-1)}(\tau) - P_m^{(s-1)}(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{s-1} H_{mk}^{(j)}(\tau) R_k^{(s-1-j)}(\tau) +\right.$$

$$\left. + \sum_{j_1=0}^{s-1} \sum_{j_0=0}^{s-1-j_1} G_{mk}^{(j_0)}(\tau) a_k^{(s-1-j_1-j_0)}(\tau) n^{(j_1)}(\tau)\right] \quad (m = 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, \ldots). \tag{60}$$

Из выражения (59) находим неизвестные коэффициенты формального разложения (53):

$$R_m^{(s)}(\tau) = [H_m(\tau) - i\nu(\tau) E]^{-1} \Omega_m^{(s)}(\tau), \quad s = 0, 1, \ldots; \quad m = 1, 2, \ldots. \qquad (61)$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Чтобы показать асимптотический характер решения системы (13) в «резонансном» случае, введем понятие p-приближенного решения. Под p-приближенным решением будем понимать следующее выражение:

$$q_m^{(p)}(t) = (U_m^{(p)} \eta^{(p)} + r_m^{(p)}) e^{i\theta}, \qquad (62)$$

а

$$\frac{d\eta^{(p)}}{dt} = (\lambda_1^{(p)} - i\nu) \eta^{(p)} + z^{(p)}, \qquad (63)$$

где

$$U_m^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} \mu_1^s U_m^{(s)}, \quad \lambda_1^{(p)} = \lambda_{11} + \sum_{s=1}^{p} \mu_1^s \lambda_1^{(s)},$$

$$r_m^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} \mu_1^s r_m^{(s)}, \quad z^{(p)} = \sum_{s=0}^{p} \mu_1^s z^{(s)}, \qquad (64)$$

которое рассматриваем при одинаковых начальных условиях для точного решения системы (13) $q_m(t)$ и для приближенного решения $q_m^{(p)}(t)$, т. е.

$$q_m|_{t=0} = q_m^{(p)}|_{t=0}. \qquad (65)$$

Тогда справедлива теорема.

Теорема 3. *Если выполняются условия теоремы* 1 *и при всех* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *и* $0 < \mu_1 \leqslant \mu_{10}$

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=0}^{k_{11}-1} \mu_1^j \lambda_1^{(j)}\right) \leqslant 0, \qquad (66)$$

то для конечного $L > 0$ *и любого* μ_1 *из полуинтервала* $(0, \mu_{10}]$ *можно указать такую постоянную* C_m, *независящую от* μ_1, *что*

$$|q_m - q_m^{(p)}| \leqslant \mu_1^{p+1-2k_{11}} C_m. \qquad (67)$$

Доказательство. Очевидно, что вектор $q_m^{(p)}(t)$, в силу его построения и ограниченности функции $\eta^{(p)}(t)$ на интервале $[0, L/\varepsilon]$, удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{dq_m^{(p)}}{dt} = H_m q_m^{(p)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{mk} q_k^{(p)} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk} q_k^{(p)}(t - \Delta(\tau)) +$$

$$+ \varepsilon P_m e^{i\theta} + \mu_1^{p+1-k_{11}} F_{1m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \qquad (68)$$

где F_{1m} — вектор, ограниченный в окрестности $\mu_1 = 0$. Введем в рассмотрение вектор

$$x_m = q_m^{(p)} - q_m. \qquad (69)$$

Очевидно, что вектор $x_m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx_m}{dt} = H_m x_m + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} [H_{mk} x_k + G_{mk} x_k(t - \Delta(\tau))] + \mu_1^{p+1-k_{11}} F_{1m} \qquad (70)$$

и начальным условиям

$$x_m(0, \varepsilon) = 0. \tag{71}$$

Эта система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с данными начальными условиями эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$x_m(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_0^t Y(t, s, \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} H_{mk}(\sigma, \varepsilon) x_k(s, \varepsilon) \, ds +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t Y(t, s, \varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}(\sigma, \varepsilon) x_k(s - \Delta(\sigma), \varepsilon) \, ds +$$

$$+ \mu_1^{p+1-k_{11}} \int_0^t Y(t, s, \varepsilon) F_{1m}(\sigma, \varepsilon) \, ds, \ \sigma = \varepsilon s; \ m = 1, 2, \ldots, \tag{72}$$

где $Y(t, s, \varepsilon) = Y(t, \varepsilon) Y^{-1}(s, \varepsilon)$, а $Y(t, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dY}{dt} = H_m(\tau) Y, \ Y(0, \varepsilon) = E. \tag{73}$$

Как показано в работах [4 и 13], матрица $Y(t, s, \varepsilon)$ ограничена для всех $t, s \in [0, L/\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, т. е.

$$\| Y(t, s, \varepsilon) \| \leqslant N < \propto. \tag{74}$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получим, в силу (72), (74) оценку

$$\| x_m(t, \varepsilon) \|^2 \leqslant 2\varepsilon N^2 L \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \| H_{mk}(\sigma, \varepsilon) \|^2 \| x_k(s, \varepsilon) \|^2 \, ds +$$

$$+ 4\varepsilon N^2 L \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \| G_{mk}(\tau, \varepsilon) \|^2 \| x_k(s - \Delta(\sigma), \varepsilon) \|^2 \, ds + 4N^2 L \mu_1^{2p+2-3k_{11}} \int_0^t \| F_{1m} \|^2 ds. \tag{75}$$

Так как согласно 3°, (14) равномерно сходятся относительно τ ряды, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| H_{mk}(\tau, \varepsilon) \|^2 \leqslant h, \ \sum_{k=1}^{\infty} \| G_{mk}(\tau, \varepsilon) \|^2 \leqslant \gamma \tag{76}$$

и из (75) получаем

$$\| X(t, \varepsilon) \|^2 \leqslant 2\varepsilon N^2 L h \int_0^t \| X(s, \varepsilon) \|^2 \, ds + 4\varepsilon N^2 L \gamma \int_0^t \| X(s - \Delta(\sigma), \varepsilon) \|^2 \, ds +$$

$$+ 4N^2 L \mu_1^{2p+2-3k_{11}} \int_0^t \| F(\sigma, \varepsilon) \|^2 \, ds, \tag{77}$$

где $X(t, \varepsilon)$ и $F(\tau, \varepsilon)$ — бесконечномерные векторы. Обозначив через

$$P^2(t, \varepsilon) = \max_{0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}} \{ \| X(t, \varepsilon) \|^2, \ \| X(t - \Delta(\tau), \varepsilon) \|^2 \}, \tag{78}$$

получим из (77)

$$P^2(t, \varepsilon) \leqslant 2\varepsilon N^2 L \beta \int_0^t P^2(s, \varepsilon) \, ds + 4N^2 L \mu_1^{2p+2-3k_{11}} \int_0^t \| F \|^2 \, ds, \tag{79}$$

где $\beta = h + 2\gamma$.

Теперь на основании леммы 1.1 (см. [4], стр. 18) имеем

$$P^2(t, \varepsilon) \leqslant 4N^2 L \mu_1^{2p+2-3k_{11}} \int_0^t e^{2\varepsilon N^2 L \beta(t-s)} \| F \|^2 ds$$

или

$$P(t, \varepsilon) \leqslant C \mu_1^{p+1-2k_{11}},$$

где

$$C = \sqrt{4N^2 L^2 e^{2N^2 L^2 \beta} F^*}, \quad F^* = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant L} [\| F(\tau, \varepsilon) \|^2].$$

Итак, окончательно получаем

$$\| x_m(t, \varepsilon) \| \leqslant C_m \mu_1^{p+1-2k_{11}},$$

т. е. показан асимптотический характер построенного решения в «резонансном» случае для системы (13).

В «нерезонансном» случае справедлива оценка

$$| q_m - q_m^{(p)} | \leqslant \widetilde{C}_m \mu_1^{p+1-k_{11}}.$$

Замечание. Наряду с системой (1) можно рассмотреть следующую систему:

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = A_1(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau, x, \varepsilon) u(t, x) +$$

$$+ \varepsilon A_3(\tau, x, \varepsilon) u(t - \Delta(\tau), x) + \varepsilon A_4(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \varepsilon A_5(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} +$$

$$+ \varepsilon A_6(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial u(t - \Delta(\tau), x)}{\partial t} + \varepsilon A_7(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} +$$

$$+ \varepsilon A_8(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial^2 u(t - \Delta(\tau), x)}{\partial t \partial x} + \varepsilon A_9(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial^2 u(t - \Delta(\tau), x)}{\partial x^2} +$$

$$+ \varepsilon A_{10}(\tau, x, \varepsilon) \frac{\partial u(t - \Delta(\tau), x)}{\partial x} + \varepsilon g(\tau, x, \varepsilon) e^{i\theta(t, \varepsilon)},$$

которая методом § 1 сводится к системе вида (13) и для нее уже известен способ построения решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Н. М. Крылов, Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, К., 1937.
2. Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1963.
3. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
4. С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Л. Д. Николенко, Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, «Наукова думка», К., 1966.
5. Н. И. Шкиль, О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами, Автореферат докт. дисс., К., 1968.
6. Ю. Л. Далецкий, С. Г. Крейн, О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. 2, № 4, 1950.
7. Ю. Л. Далецкий, Об асимптотическом решении одного векторного уравнения, ДАН СССР, т. 92, № 5, 1953.
8. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.

9. І. І. Маркуш, Про асимптотичне представлення розв'язків деяких типів лінійних диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь, що мають малий параметр, Автореферат канд. дисс., К., 1960.
10. Н. И. Шкиль, Об асимптотическом решении системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными, УМЖ, т. 18, № 6, 1966.
11. Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк, Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием, Изд. Института математики АН УССР, К., 1969.
12. Я. П. Менько, К теории асимптотического представления интегралов системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, содержащих параметр, Автореферат канд. дисс., К., 1965.
13. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М., 1949.
14. Л. Э. Эльсгольц, Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, «Наука», М., 1964.
15. В. А. Домбровский, В. И. Фодчук, Об асимптотическом представлении решений для дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием, Материалы II Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1968.

Поступила 14.X 1970 г.
Институт математики АН УССР,
Киевский педагогический институт