1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.1:513.83

Свойства φ-преобразований графов и 2-многообразий

Н. П. Хоменко, Э. Б. Яворский

§ 1.1. Вопросам вложения графов в 2-многообразия посвящено много работ. Основополагающими в этой области являются работы [1—3]. Главные результаты, полученные в этом направлении, изложены в монографиях [4, 5] и в работах [6—8]. Однако принципиальные вопросы теории вложения графов до сих пор остаются нерешенными. Это объясняется, в первую очередь, сложностью проблематики (к этому кругу вопросов относится, как частная задача, и известная проблема четырех красок), а также недостаточностью, по всей вероятности, применяемых методов.

В этой статье авторы предлагают метод преобразований 2-многообразий и графов, названный методом φ-преобразований.

Грубо говоря, φ-преобразование состоит в склеивании некоторых наборов гомеоморфных подполиэдров полиэдра P; причем в качестве подполиэдров в основном будут браться графы, а в качестве полиэдров — графы или 2-многообразия. При этом, в частности, выясняются соотношения между числами α_r r-клеток симплициальных разбиений полиэдров P и $\varphi(P)$, их эйлеровыми характеристиками и группами H_0, H_1.

В дальнейших публикациях авторы применят этот метод к исследованию вложений графов в 2-многообразия, в частности, к нахождению зависимостей между родом и связностью графов и 2-многообразий и т. д.

2. Мы будем пользоваться следующими обозначениями: α_r^j — число симплексов размерности r в комплексе K_j; $p_i(K)$ — i-е число Бетти комплекса K; c — простая цепь графа; c_i — i-я простая цепь графа; c_i^n — i-я простая цепь длины n*; z — простой цикл графа или граница 2-многообразия; z_i — i-й простой цикл; z_i^n — i-й простой цикл длины n*; ∂X — граница множества X; s — 2-клетка; σ — замкнутое ориентируемое 2-многообразие; σ_ν — замкнутое ориентируемое 2-многообразие рода ν; $\varrho(x)$ — степень вершины x графа; $|X|$ — число элементов в множестве X; K — комплекс фиксированного разбиения (триангуляции) полиэдра $P = |K|$; $\chi(K)$ — эйлерова характеристика комплекса K; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$ — объединение n множеств X_i; $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ — сумма n попарно непересекающихся множеств Y_i; G^0 — множество вершин графа G; G^1 — множество ребер графа G; $\mathfrak{K}_n$ — полный граф порядка n (на n вершинах); П — граф с $p_i(\text{П}) = 1$; $i = 0,1$; $\gamma(G)$ — род графа G; $G \subset \sigma$ — граф G вложен в 2-многообразие σ; $\operatorname{St} x$ — звезда комплекса, центром которой есть вершина x; $\cong$ — гомеоморфизм; $\approx$ — изоморфизм.

§ 2.1. Пусть в полиэдре P выделено q систем подполиэдров P_{ji}, $1 \leqslant j \leqslant q$, $1 < i \leqslant d_j$, причем все P_{j_i} не пересекаются и гомеоморфны друг другу

* Ниже простую цепь будем называть цепью, простой цикл — циклом.

при каждом фиксированном j, т. е. внутри каждой системы. Сумму $\sum_{i=1}^{d_j} P_{j_i}$ подполиэдров j-й системы, состоящую из эквивалентных между собой в топологическом смысле подполиэдров полиэдра P, будем называть j-м классом R-эквивалентности. Через $\varphi^j_{ii'}$ обозначим гомеоморфизм между P_{j_i} и $P_{j_{i'}}$. Тогда R_j-эквивалентностью будет множество этих гомеоморфизмов, которые будут удовлетворять условию

$$\varphi^j_{ii'} \cdot \varphi^j_{i'i''} = \varphi^j_{ii''}. \qquad (*)$$

Таким образом, на подпространстве $\mathfrak{F} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{d_j} P_{j_i}$ полиэдра P задается набор R эквивалентностей

$$R = \{R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots, R_q\}.$$

Определение 1. φ-Преобразованием полиэдра P называется переход от P к полиэдру $\varphi(P, R)$, который получается из P склеиванием подполиэдров каждого класса R-эквивалентности по заданным в них гомеоморфизмам. При этом вводятся обозначения:

$$\overline{P} = \varphi(P, R),$$

$$\overline{P}_j = \varphi\left(\sum_{i=1}^{d_j} P_{j_i}, R_j\right), \; d_j > 1,$$

$$\overline{\mathfrak{F}} = \varphi(\mathfrak{F}, R)$$

и т. д. Склеивание определено однозначно ввиду условия $(*)$.

Дефектом φ-преобразования полиэдра P при заданной R-эквивалентности называется подпространство

$$\Delta_\varphi(\mathfrak{F}, R) = \mathfrak{F} \setminus \sum_{j=1}^{q} P_j$$

этого полиэдра, где P_j — представители классов R-эквивалентности на P.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими утверждениями.

Лемма 1.

$$P \setminus \sum_j \sum_i P_{j_i} = \varphi(P, R) \setminus \sum_j \overline{P}_j.$$

Доказательство очевидно.

Если уточнение не необходимо, то вместо $\varphi(P, R)$ будем писать $\varphi(P)$.

Лемма 2.

$$(\varphi(K) = \overline{K}, |\{K_{j_i}\}_i| = d_j, j = 1, 2, \ldots, q) \Rightarrow \left(\overline{\alpha}_r = \alpha_r - \sum_{j=1}^{q} (d_j - 1)\alpha^j_r\right).$$

Доказательство. По лемме 1 имеем

$$K \setminus \sum_j \sum_i K_{j_i} = \varphi(K) \setminus \sum_j \overline{K}_j,$$

а для r-остова K^r комплекса K это равенство принимает вид

$$K^r \setminus \sum_j \sum_i K^r_{j_i} = \varphi(K^r, R) \setminus \sum_j \overline{K}^r_j.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $|\{K_{j_i}\}| = d_j$, получим

$$\alpha_r - \sum_{j=1}^{q} d_j \alpha_r^j = \overline{\alpha}_r - \sum_{j=1}^{q} \alpha_r^j.$$

Тем самым лемма доказана.

Лемма 3.

$$\chi(\varphi(P)) = \chi(P) - \chi(\Delta_\varphi(\mathfrak{F})).$$

Доказательство. По лемме 2

$$\overline{\alpha}_r = \alpha_r - \sum_{j=1}^{q} (d_j - 1)\alpha_r^j.$$

Составив знакочередующуюся сумму по r этих равенств, получим

$$\chi(\varphi(P)) = \chi(\varphi(K)) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \alpha_r - \sum_{j=1}^{q} (d_j - 1) \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \alpha_r^j =$$

$$= \chi(K) - \sum_{j=1}^{q} (d_j - 1)\chi(K_j) = \chi(K) - \sum_{j=1}^{q} d_j \chi(K_j) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{q} \chi(K_j) = \chi(P) - \chi(\mathfrak{F}) + \chi(\varphi(\mathfrak{F})) = \chi(P) - \chi(\Delta_\varphi(\mathfrak{F})).$$

Следствие 1. $(\chi(\varphi(P)) = \chi(P)) \Longleftrightarrow (\chi(\mathfrak{F}) = \chi(\varphi(\mathfrak{F})))$.

Следствие 2. $(\forall P_j)(P_j \cong \Pi_j) \Rightarrow (\chi(\varphi(P)) = \chi(P))$.

Следствие 3. $[\chi(\varphi(P, R)) = \chi(P),\ R = \{R_1, R_2\}]\ ((\chi(P_1) + \chi(P_2) = 0) \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow ((d_1 = d_2) \vee (\chi(P_j) = 0,\ j = 1, 2)))$.

Ниже мы будем исследовать φ-преобразования только графов и 2-многообразий.

2. Будем рассматривать граф G, состоящий из m связных компонент G_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Пусть $\mathfrak{G}_l$ $(1 \leqslant l \leqslant m_0)$ — связные компоненты графа $\varphi(G)$, а $R_j(G_1^{k_1^j}, \ldots, G_s^{k_s^j})$ — эквивалентность, имеющая k_i^j своих представителей на связной компоненте G_i графа G $(1 \leqslant i \leqslant s \leqslant m)$.

Определение 2. φ-Базой $B_j = B(R_j)$ j-го класса R-эквивалентности на графе G называется его подграф

$$B_j = \{G_i \setminus R_j(G_i^{k_i^j}),\ k_i^j \geqslant 1\}.$$

Определение 3. Комплексной φ-базой $\mathfrak{B}_l$ над связной компонентой $\mathfrak{G}_l$ графа $\varphi(G)$ называется подграф

$$\mathfrak{B}_l = \varphi^{-1}(\mathfrak{G}_l)$$

графа G.

Замечание.

1) $\mathfrak{B}_l = \bigcup\limits_{j=j_{l-1}+1}^{j_l} B_j;\ l = 1, 2, \ldots, m_0;\ j_0 = 0,\ \nu_l = j_l - j_{l-1} = |\{R_j / R_j(G_j^{k_j^l}),$
$k_i^j \geqslant 1,\ G_i \subset \mathfrak{B}_l\}|$;

2) $\mathfrak{B}_l \cap \mathfrak{B}_{l'} = \varnothing,\ l \neq l'$;

3) $\sum\limits_{l=1}^{m_0} \nu_l = q$.

Определение 4. Графом комплексной φ-базы $\mathfrak{B}_l$ называется граф $L_l(L_l^0, L_l^1)$, множество вершин которого $L_l^0 = \{G_i/G_i \subset \mathfrak{B}_l\}$ и эти вершины соединяются ребрами так, чтобы на всех вершинах, на которых представлена эквивалентность R_j $(j = 1, 2, \ldots, \nu_l)$, образовалось дерево с $k_i^j - 1$ петлями в каждой вершине G_i, если $R_j(G_i^{k_i^j})$ при $k_i^j > 1$.

Определение 5. Графом φ-баз графа G называется граф

$$L(G) = \sum_{l=1}^{m_0} L_l,$$

не содержащий изолированных вершин, т. е. $R(G_i^{k_i})$, $k_i \geqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Дефектом i-го числа Бетти графа G при φ-преобразовании графа называется разность

$$\Delta_\varphi(p_i(G)) = p_i(G) - p_i(\varphi(G)).$$

Ясно, что для $\mathfrak{F}$

$$\Delta_\varphi(p_i(\mathfrak{F})) = p_i(\Delta_\varphi(\mathfrak{F})).$$

Теорема 1.

а) $p_0(L_l) = 1$;

б) $p_1(L(G)) = \Delta_\varphi(p_i(\mathfrak{F})) - \Delta_\varphi(p_i(G))$, $i = 0, 1$.

Доказательство. Равенство а) очевидно; б) при $i = 0$. Число ребер графа L (исключая петли) выражается суммой $\sum_{j=1}^{q}(p_0(B_j) - 1)$, а число петель — суммой $\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p0(B_j)}(k_i^j - 1)$. Поэтому число всех ребер графа L равно

$$|L^1| = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p0(B_j)}(k_i^j - 1) + \sum_{j=1}^{q}(p_0(B_j) - 1) = \sum_{j=1}^{q}(d_j - 1).$$

Из определения графа $L(G)$ и свойства а) следует, что

$$p_0(L) = \sum_{l=1}^{m_0} p_0(L_l) = m_0.$$

Подставляя полученные величины в формулу Эйлера — Пуанкаре, получим

$$p_1(L) = |L^1| - |L^0| + m_0 = \sum_{i=1}^{q} d_j - q - \Delta_\varphi(p_0(G)) = \Delta_\varphi(p_0(\mathfrak{F})) - \Delta_\varphi(p_0(G)).$$

Для доказательства б) в случае $i = 1$ заметим, что по лемме 2

$$\bar{\alpha}_r = \alpha_r - \sum_{j=1}^{q}(d_j - 1)\alpha_r^j, \qquad r = 0, 1,$$

и на основании а)

$$p_0(\varphi(G)) = p_0(L).$$

Применяя теорему Эйлера — Пуанкаре, получим

$$p_1(\varphi(G)) = \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_0 + p_0(\varphi(G)) = \alpha_1 - \alpha_0 -$$
$$- \sum_{j=1}^{q}(d_j - 1)(\alpha_1^j - \alpha_0^j) + p_0(L) = p_1(G) + p_1(L) -$$
$$- \sum_{j=1}^{q}(d_j - 1)\, p_1(P_j) = p_1(G) + p_1(L) - \Delta_\varphi\, p^1(\mathfrak{F}),$$

откуда

$$p_1(L) = \Delta_\varphi p_1(\mathfrak{F}) - \Delta_\varphi p_1(G).$$

3. Рассмотрим граф G, вложенный в замкнутое ориентируемое 2-многообразие σ_ν.

Введем обозначения $N = \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ i=1,2}}^{n} \bar{s}_{j_i}$, $F = \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ i=1,2}}^{n} z_{j_i}$ ($F \equiv \mathfrak{F}$, если циклы z_{j_i} не пересекаются), где $s_{j_i} \in \{\sigma_\nu \diagdown G\}$; $p_r(\bar{s}_{j_i}) = 1 - r$; $r = 0,1$; $z_{j_i} = \partial s_{j_i}$.

Известный факт получения 2-многообразия $\sigma_{\nu+1}$ из σ_ν сформулируем следующим образом.

Лемма 4.

$$[\sigma_\nu \supset N, N = \bar{s}_1 + \bar{s}_2] (\exists \varphi) (\varphi(\sigma_\nu \diagdown (s_1 + s_2), z_1 R z_2) = \sigma_{\nu+1}).$$

Каждый цикл z_{j_i} графа $F = \bigcup\limits_{\substack{j=1,\\ i=1,2}}^{n} z_{j_i}$ ограничивает на N 2-клетку s_{j_i}. Число $\beta(F)$ таких 2-клеток на N равно $2n$.

Теорема 2. *Если на σ_ν задан граф $F = F_1 + F_2$, причем $\beta(F_1) = \beta(F_2) = n$, то существует n таких последовательных φ-преобразований φ_j, определяемых эквивалентностями R_j на парах циклов z_{j_1}, $z_{j_2} \in F$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), что*

$$\varphi_n \varphi_{n-1} \ldots \varphi_1 (\sigma_\nu \diagdown \{N \diagdown F\}) = \sigma_{\nu+n}.$$

Доказательство. Пусть $\beta(F_i) = 1$ $(i = 1, 2)$, тогда $F_i = z_i$ и теорема верна по лемме 4.

Допустим, что она верна для графа

$$F = F_1 + F_2 \text{ при } \beta(F_i) = k, \qquad i = 1, 2$$

и докажем ее справедливость для графа $F' = F'_1 + F'_2$ при $\beta(F'_i) = k + 1$ $\left(F'_i = \bigcup\limits_{j_i=1}^{k+1} z_{j_i} \subset N' \subset \sigma_\nu,\ i = 1, 2\right)$. Так как $N' \neq \sigma_\nu$, ибо $F'_1 \cap F'_2 = \varnothing$, то найдется такое открытое 2-многообразие $E' \subseteq \sigma_\nu \diagdown N'$, что $p_1(E') \geqslant 1$. Поэтому существуют 2-клетки $s_i \subset N'_i$ ($N' = N'_1 + N'_2$), которые граничат с E' на σ_ν и, кроме того, $\overline{E'} \cap \bar{s}_i \supset c_i$. c_i является цепью графа G или ребром.

Выберем c_i на каждом F_i $(i = 1, 2)$ и положим, что

$$\partial c_i = (-1)^i (x_i - y_i), \qquad x_i, y_i \in G^0.$$

Возьмем на c_i точки a_i и b_i, не совпадающие с граничными точками.

Циклы $z_i = \partial s_i$ $(i = 1, 2)$ ориентируем противоположно и образуем упорядоченные последовательности точек

$$a_1, b_1, y_1, \ldots, x_1, a_1,$$

$$a_2, x_2, \ldots, y_2, b_2, a_2$$

на циклах z_1 и z_2 соответственно.

Теперь R-эквивалентность $z_1 R_1 z_2$ зададим таким образом, чтобы $a_1 R_1 a_2$, $b_1 R_1 b_2$. Осуществив φ-преобразование φ_1 с указанной R-эквивалентностью R_1 на $\sigma_\nu \diagdown (s_1 + s_2)$, на основании леммы 4 получим 2-многообразие

$$\varphi_1(\sigma_\nu \diagdown (s_1 + s_2)) = \sigma_{\nu+1}.$$

Граф F' при этом преобразуется в граф

$$\varphi_1(F'_1 + F'_2)\diagdown(c' + c'') = \dot{F}_1 + F_2.$$

Здесь

$$c' = \varphi_1(x_1 a_1) \cup \varphi_1(a_2 x_2), \qquad c'' = \varphi_1(y_2 b_2) \cup \varphi_1(b_1 y_1)$$

и

$$c' + c'' = z \cap E, \qquad z\diagdown(c' + c'') \subset \overline{E}\diagdown E,$$

где

$$z = \varphi_1(z_1 + z_2), \qquad \overline{E} = \varphi_1(\overline{E}').$$

При этом

$$N = \varphi_1(N'\diagdown(s_1 + s_2))\diagdown(c' + c'').$$

Поэтому

$$\beta(F_1) = \beta(F_2) = n; \qquad F_1 \cap F_2 = \varnothing.$$

Это завершает индукцию, а вместе с тем и доказательство теоремы.

С л е д с т в и е. *Если $F = F_1 + F_2$, то независимо от $\beta(F_i)$ и $p_0(F_i)$ $(i = 1, 2)$ существует φ-преобразование*

$$\varphi(\sigma_\nu\diagdown(s_1 + s_2),\ z_1 R z_2) = \sigma_{\nu+1},$$

при котором на $\sigma_{\nu+1}$ образуется граф $\widetilde{F} = \widetilde{F}_1 + \widetilde{F}_2$ с $\beta(\widetilde{F}_i) = \beta(F_i) - 1$.

§ 3.1. Комбинаторный граф [11] называется простым, если он не содержит петель и кратных ребер. Заданному простому комбинаторному графу без вершин степени 2 соответствует простой топологический граф G (1-полиэдр) и симплициальный граф (1-комплекс) K^1. Простой граф будем обозначать жирным шрифтом.

Установим условия получения простого графа при φ-преобразованиях графов.

П р е д л о ж е н и е 1. Все графы $L(G)$ для $G = \sum_{i=1}^{n} G_i$ будут простыми тогда и только тогда, когда классы R-эквивалентности представлены на G так, что

$$k_i^j \leqslant 1 \text{ при } R_j(G_i^{k_i^j})$$

и

$$|\{R_j\diagdown R_j(G_i^1, G_{i'}^1)\}| \leqslant 1 \qquad (i, i' = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq i';\ j = 1, 2, \ldots, q).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если среди графов $L(G)$ имеется хотя бы один непростой, то это означает, что этот граф содержит по крайней мере одну петлю или одно кратное ребро. В первом случае будут существовать такие R_j и G_i, что $k_i^j > 1$ при $R_j(G_i^{k_i^j})$. Во втором случае будут существовать такие связные компоненты G_i и $G_{i'}$ графа G, что

$$|\{R_j\diagdown R_j(G_i^{k_1^j}, G_i^{k_2^j});\ k_1^j, k_2^j \geqslant 1\}| > 1.$$

Если же $k_i^j > 1$, то G_i содержит более одного представителя R-эквивалентности R_j, а, следовательно, граф L содержит петли и не будет простым. Если же

$$|\{R_j\diagup R_j(G_i^1, G_{i'}^1)\}| > 1,$$

то можно построить граф $L(G)$ с кратными ребрами.

2. Через $T_{2,r}$ будем обозначать дерево, которое содержит только две неконцевые вершины $P_{0,l}$ $(l = 0, 1)$ степени $\rho(P_{0,l}) = r$.

Л е м м а 5. *Для каждого полного графа $\mathfrak{K}_n$ $(n > 2)$ существует такое φ-преобразование леса $\sum_{i=1}^{n} T_{2,r}^i$ при R-эквивалентности на его вершинах, что*

$$\mathfrak{K}_n = \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} T_{2,r}^i, R\right),$$

причем $T_{2,r}^i \approx T_{2,r}$ *и* $r = m$, *если* $n = 2m$, $r = m + 1$, *если* $n = 2m + 1$.

Доказательство. 1) Пусть $n = 2m$. Обозначим через $P_{0,l}^i$ неконцевые вершины дерева $T_{2,m}^i$, а через $P_{j,l}^i$ ($l = 0, 1$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots \ldots, m-1$) его концевые вершины, смежные с $P_{0,l}^i$, соответственно. Зададим R-эквивалентность на вершинах деревьев $T_{2,m}^i$ следующим образом:

$$P_{j,l}^i R P_{0,l_1}^h,$$

принимая, что $h = i + j$, $l_1 = l$ при $i + j \leqslant m$, $h = (i + j) \pmod m$, $l_1 = 1 - l$ при $i + j > m$. В дереве $T_{2,m}^k$ вершина $P_{0,l}^k$ инцидентна ребрам $P_{0,l}^k P_{0,1-l}^k$, $P_{0,l}^k P_{j,l}^k$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$. В результате φ-преобразования вершина $P_{0,l}^k$ станет смежной с m различными вершинами

$$\varphi(P_{0,1-l}^k) = P_{0,1-l}^k,$$

$$\varphi(P_{j,l}^k) = P_{0,l}^{k+j}, \qquad j \leqslant m - k,$$

$$\varphi(P_{j,l}^k) = P_{0,1-l}^{k+j}, \qquad j > m - k, \quad (k + j) \pmod m,$$

а также с $k - 1$ различными вершинами $P_{0,l}^i$ при условии, что

$$\varphi(P_{j,l}^i) = P_{0,l}^k, \qquad i + j = k,$$

и с $m - k$ различными вершинами $P_{0,1-l}^i$ при условии, что

$$\varphi(P_{j,1-l}^i) = P_{0,l}^k, \qquad i > k, \quad i + j > m, \quad (i + j) \pmod m = k.$$

Эти совокупности различных вершин не пересекаются, а ввиду того, что для i и для j исчерпаны все допустимые значения, то это означает, что степень каждой вершины $P_{0,l}^k$ графа $\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} T_{2,m}^i, R\right)$ равна

$$m + (k - 1) + (m - k) = 2m - 1.$$

Следовательно, мы получили полный граф на $2m$ вершинах.

2) Пусть $n = 2m + 1$. В этом случае при тех же обозначениях вершин $P_{j,l}^i$ леса $\sum_{i=1}^{m} T_{2,m+1}^i$, $j = 1, 2, \ldots, m$, принятое в п. 1) условие R-эквивалентности дополним отношением

$$P_{m,l}^i R P_{m,1-l}^{i'}, \qquad i, i' = 1, 2, \ldots, m.$$

В дальнейшем доказательство аналогично тому, которое приведено в п.1).

Следствие 1. *Существует такое* φ-*преобразование леса* $\sum_{i=1}^{k} T_{2,k}^i$ *в граф* $\mathfrak{K}_{2k}$, *что при* j, $j' = 1, 2, \ldots, k - 1$

$$\varphi(P_{j,l}^i) \neq \varphi(P_{j',l}^i), \qquad j \neq j', \tag{$**$}$$

$$\varphi(P_{j,l}^i) \neq \varphi(P_{j',1-l}^i), \qquad l = 0,1.$$

Следствие 2. *Пусть* $n > 2k$. *Тогда существует такое* φ-*преобразование графа*

1) $G_1 = \sum\limits_{i=1}^{k} T^i_{2,k_1}$, *если* $n = 2k_1$, *и графа*

2) $G_2 = \sum\limits_{i=1}^{k} (T^i_{2,k_1} \cup P^i_{0,0}P^i_{n,0})$, *если* $n = 2k_1 + 1$, *при котором* $\varphi(G_1)$ и $\varphi(G_2)$ *являются такими подграфами графа* $\mathfrak{K}_n$, *для которых выполняется условие* $(**)$.

Доказательство. 1) $n = 2k_1$, $k_1 > k$. Как и при доказательстве леммы, рассмотрим k деревьев T^i_{2,k_1}, $i = 1, 2, \ldots, k$, и, кроме того, $k_1 - k$ пронумерованных пар вершин $P^{i'}_{0,l}$, $l = 0, 1$; $i' = k+1, k+2, \ldots, k_1$. Зададим R-эквивалентность на всех этих вершинах так же, как и в п.1) доказательства леммы 5. Образуется связной подграф $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{k} T^i_{2,k_1}\right)$ графа $\mathfrak{K}_n$, удовлетворяющий условию следствия 1 из леммы 5.

2) $n = 2k_1 + 1$, $k_1 \geqslant k$: а) $k_1 = k$. В этом случае к каждому из графов T^i_{2,k_1}, $i = 1, 2, \ldots, k$, добавим по висячему ребру $P^i_{0,0}P^i_{n,0}$. Получим графы $T^i_{2,k_1} \cup P^i_{0,0}P^i_{n,0}$. Зададим дополнительную R-эквивалентность $P^i_{n,0}RP^{i'}_{n,0}$, $i, i' = 1, 2, \ldots, k_1$. Полученный после определяемого всей эквивалентностью φ-преобразования граф $\varphi\left(\sum\limits_{i=1}^{k} (T^i_{2,k_1} \cup P^i_{0,0}P^i_{n,0})\right)$ является искомым; б) $k_1 > k$. Доказательство осуществляется совместным применением способов, указанных в случаях 1) и 2,а).

Теорема 3. *Существует φ-преобразование*

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} T^i_{2,m}\right) = \mathfrak{K}_{2m},$$

определяющее m цепей c_i^{2m-1}, которые являются гамильтоновыми в графе $\mathfrak{K}_{2m}$ и покрывают его.

Доказательство. Вершины дерева $T^i_{2,m}$ обозначим так же, как в лемме 5: $P^i_{0,l}$ — неконцевые вершины, а $P^i_{j,l}$ — концевые, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $l = 0, 1$; $j = 1, 2, \ldots, m-1$.

Пусть заданная на наборе вершин R-эквивалентность $P_1P_2\ldots P_kRP'_1P'_2\ldots P'_k$ состоит из k классов эквивалентностей $P_jR_jP'_j$; $j = 1, 2, \ldots, k$. Зададим R-эквивалентность на тройках вершин следующим образом:

$$P^i_{r,l}P^i_{m-r,l}P^i_{r+1,l}RP^h_{2r,l_1}P^h_{0,l_1}P^h_{2r+1,l_1},$$

где

$$h = i + r, \ l_1 = l \text{ при } i + r \leqslant m,$$

$$h \equiv (i + r) (\operatorname{mod} m), \ l_1 = 1 - l \text{ при } i + r > m, \qquad r = 1, 2, \ldots, \left[\frac{m-1}{2}\right];$$

при $r = \left[\dfrac{m-1}{2}\right] = \dfrac{m-1}{2}$ получим только

$$P^i_{\frac{m-1}{2},l}P^i_{\frac{m+1}{2},l}RP^h_{m-1,l_1}P^h_{0,l_1}.$$

Рассматриваемая R-эквивалентность на $2m$ вершинах дерева $T^i_{2,m}$ образует цепь c_i^{2m-1}. Вершина $P^i_{m-r,l}$ соединяется только с двумя вершинами $P^i_{r,l}$ и $P^i_{r+1,l}$ ребрами $P^h_{2r,l_1}P^h_{0,l_1}$, $P^h_{0,l_1}P^h_{2r+1,l_1}$ из дерева $T^h_{2,m}$ и лишь при $r = \left[\dfrac{m-1}{2}\right] = \dfrac{m-1}{2}$ $P^i_{\frac{m+1}{2},l}$ является концевой вершиной цепи c_i^{2m-1}. Упомянутая эквивалентность R порождает эквивалентность R_1:

$$P^i_{j,l} R_1^{\cdot} P^{m-j+i}_{0,l_1},\ l_1 = l \text{ при } j-i \geqslant 0,$$
$$l_1 = 1 - l \text{ при } j - i < 0$$

такую, что

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} T^i_{2,m}, R_1\right) = \mathfrak{K}_{2m}.$$

Приведенные рассуждения показывают, что граф $\mathfrak{K}_{2m}$ содержит m цепей c_i^{2m-1} без общих ребер. Ясно, кроме того, что каждая цепь c_i^{2m-1} является в $\mathfrak{K}_{2m}$ гамильтоновой.

Следствие 1.

$$(\exists\varphi)\left(\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} c_i^{2m-1}\right) = \mathfrak{K}_{2m}\right)$$

при

$$\varphi(\partial c_i^{2m-1}) \cap \varphi(\partial c_j^{2m-1}) = \varnothing, \qquad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Следствие 2. *Граф $\mathfrak{K}_n$ является образом φ-преобразований:*

$$1^\circ \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{m} z_i^n\right) = \mathfrak{K}_n \text{ при } n = 2m+1$$

и

$$2^\circ \quad \varphi\left(\sum_{i=1}^{m-1} z_i^n + \sum_{i=1}^{m} u_i^1\right) = \mathfrak{K}_n \text{ при } n = 2m$$

при R-эквивалентности, заданной на вершинах.

Доказательство 1°. Каждую цепь c_i^{2m-1} из $\mathfrak{K}_{2m}$ дополним до цикла z_i^n соединением ее концов с дополнительной вершиной. Тем самым будут указаны m различных гамильтоновых циклов графа $\mathfrak{K}_{2m+1}$.

2°. Согласно 1° граф $\mathfrak{K}_{2m-1}$ состоит из $m-1$ циклов длины $2m-1$. Добавим к графу $\mathfrak{K}_{2m-1}$ одну вершину и соединим ее со всеми его вершинами; получим $\mathfrak{K}_{2m}$. Выделив из $\mathfrak{K}_{2m}$ центральные ребра всех цепей c_i^{2m-3} графа $\mathfrak{K}_{2m-2} \subset \mathfrak{K}_{2m}$ и ребро на $\mathfrak{K}^0_{2m} \setminus \mathfrak{K}^0_{2m-2}$, получим 2°.

Следствие 3. *Граф $\mathfrak{K}_{2m}$ составлен из $2m-1$ множителей первой степени* [11].

Теорема 4.

$$\left[G = \sum_{i=1}^{n} G_i, R = \{R_j / R_j(G_1^1, \ldots, G_n^1)\}_1^k\right]((\exists \mathbf{L}(G)) \Longleftrightarrow (n \geqslant 2k)).$$

Доказательство.

$$|L^0| = n, \qquad |L^1| = k(n-1).$$

Пусть $L(G) = \mathbf{L}$. Если $n < 2k$, то $|\mathbf{L}^1| > \dfrac{n(n-1)}{2}$, что невозможно.

Пусть $n = 2k$. Выбрав φ-преобразование согласно следствию 1 из леммы 5, граф $\mathfrak{K}_n = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} T^j_{2,k}\right)$ может служить удовлетворяющим требованиям теоремы графом $\mathbf{L}(G)$.

При $n > 2k$ графы $\varphi(G_1)$ и $\varphi(G_2)$ (см. следствие 2 из леммы 5) являются такими подграфами графа $\mathfrak{K}_n$, которые могут служить графами $\mathbf{L}(G)$.

Теорема 5.

$$(\varphi(\mathbf{G}) = \mathbf{G}') \Longleftrightarrow (p_i(\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_j)) \cup \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j'}))) = 1 - i),$$
$$x_j, x_{j'} \in \varphi^{-1}(x), \qquad x \in \mathbf{G}', \quad i = 0, 1.$$

Доказательство. Пусть $\varphi(\mathrm{G}) = \mathrm{G}'$, $x \in \mathrm{G}'$, $x_j, x_{j'} \in \varphi^{-1}(x)$; тогда

$$\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_j)) \cap \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j'})) = \varepsilon.$$

Это пересечение, в силу предположения, не может содержать петель и кратных ребер. Кроме того, оно не может содержать изолированных вершин, за исключением вершины x, когда R-эквивалентность задана только на $\varphi^{-1}(x)$. Вершину x это пересечение всегда содержит; если бы оно содержало еще изолированную вершину $\tilde{x}$, то в G существовало бы два не R-эквивалентных ребра $x_i x_j$ и $x_{i'} x_{j'}$ таких, что x_i, $x_{i'} \in \varphi^{-1}(\tilde{x})$. Это противоречит тому, что граф φ (G) — простой. Таким образом,

$$p_i(\varepsilon) = 1 - i, \qquad i = 0, 1.$$

Пусть теперь

$$p_i(\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_j)) \cap \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j'}))) = 1 - i, \qquad i = 0, 1, \tag{δ}$$

где

$$x_j, x_{j'} \in \varphi^{-1}(x), \qquad x \in \varphi(\mathrm{G}).$$

Покажем, что при этом исключаются все возможные случаи образования непростого графа φ (G). Петля в этом графе может возникнуть только при условии, что в G существует ребро $x_1 x_2$, концы которого входят в один класс эквивалентности $x_1 R_j x_2$. Тогда

$$(\overline{\mathrm{St}}(x_1) \cap \overline{\mathrm{St}}(x_2) \supset \overline{x_1 x_2}$$

и

$$\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_1)) \cap \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_2)) \supset \varphi(\overline{x_1 x_2}) = z.$$

Это противоречит условию (δ), ибо $p_1(z) = 1$.

Кратное ребро в графе φ (G) может возникнуть только тогда, когда в G существуют по крайней мере два таких ребра $x_{j_1} x_{j_2}$, $x_{j_3} x_{j_4}$, что $x_{j_1} R_1 x_{j_3}$, $x_{j_2} R_2 x_{j_4}$, причем эквивалентности R_1, R_2 одновременно не тождественны, а сами ребра не R-эквивалентны.

При этом

$$\overline{\mathrm{St}}(x_{j_1}) \supset x_{j_2}, \quad \overline{\mathrm{St}}(x_{j_3}) \supset x_{j_4}.$$

Поэтому

$$\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j_1})) \cap \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j_3})) \supset (\varphi(x_{j_1}) + \varphi(x_{j_2}))$$

и, следовательно,

$$p_0(\varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j_1})) \cap \varphi(\overline{\mathrm{St}}(x_{j_3}))) > 1,$$

чего не может быть. Итак, доказано, что φ (G) — простой граф.

Нерешенные задачи. 1. Даны графы G_1, G_2: а) найти условия, при которых $\varphi(\mathrm{G}_1, R) \approx \mathrm{G}_2$; б) найти минимальное количество классов R-эквивалентности, осуществляющих этот изоморфизм.

2. Найти условия, при которых род и связность графа G при φ-преобразовании не убывают.

3. Дан простой топологический граф G порядка n без висячих ребер и набор циклов длины i, $3 \leqslant i \leqslant n(n-1)$; требуется: а) путем φ-преобразования при R-эквивалентности на парах ребер циклов образовать граф G; б) найти количество таких способов образования заданного графа G.

Выражаем глубокую признательность А. В. Чернавскому за полезные замечания, учтенные авторами в данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. B. Kempe, The Geographical Problem of Four Colors, Am. J. of Math., II, 1879, 193—200.
2. P. J. Heawood, Map-Colour Theorem, Quarterly J. of pure and applied Math., 24, 1890, 332—338.
3. L. Heftter, Über das Problem der Nachbargebiete, Math. Ann., 38, 1891, 477—508.
4. G. Ringel, Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen, Berlin, 1959.
5. O. Ore, The four-color problem, New York and London, 1967.
6. J. W. T. Youngs, Minimal imbeddings and the genus of a graph, J. Math. and Mech., 12, 1963, 303—315.
7. F. Harary, Recent results in topological graph theory, Acta Math. (Budapest), XV, 3—4, 1964, 405—412.
8. G. Ringel and J. W. T. Youngs, Solution of the Heawood Map-Coloring Problem, Proc. of the National Acad. of Sciences of U. S. A., 60, 2, 1968, 438—446.
9. П. Дж. Хилтон, С. Уайли, Теория гомологий, «Мир», М., 1966.
10. О. Оре, Теория графов, «Наука», М., 1968.
11. D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig, 1963.

Поступила 12.IV 1969 г.

Институт математики АН УССР