1971 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. 23, № 2
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УДК 0А85

Двойственность в экстремальных задачах

М. М. Цветанов

Введение

В классическом вариационном исчислении в качестве простейшего рассматривается функционал

$$I(x) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1(t), \ldots, x_n(t), \dot{x}_1(t), \ldots, \dot{x}_n(t))\, dt \tag{1}$$

и ставится задача об отыскании нижней грани этого функционала при условии, что непрерывно дифференцируемая вектор-функция $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ соединяет две определенные точки n-мерного пространства

$$x(t_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = x_0, \qquad x(t_1) = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1) = x_1. \tag{2}$$

Нам будет удобнее придать задаче (1) несколько иной вид. Рассмотрим функционал

$$I(x_1, x_2) = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x_1^1(t), x_2^1(t), \ldots, x_n^1(t), x_1^2(t), \ldots, x_n^2(t))\, dt, \tag{1'}$$

заданный на произведении $C_1^n[t_0, t_1] \times C^n[t_0, t_1]$. Легко понять, что задача об инфимуме функционала $(1')$ эквивалентна задаче об инфимуме функционала (1) при условиях, что:

а) $x_2(t) = \dfrac{d}{dt} x_1(t)$;

б) $x_1(t_0) = x_0, \qquad x_1(t_1) = x_1$.

В этой работе мы рассматриваем задачи (1), (2) и $(1')$, $(2')$ в несколько более общей ситуации.

Как было выяснено в последнее время, для большинства задач вариационного типа весьма естественно рассматривать их в пространствах, находящихся в двойственности (см., например, [1]).

Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — вещественные линейные пространства и $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ — пространства, находящиеся в двойственности к ним. В данной работе мы изучаем задачу о нижней грани функционала $f(x_1, x_2)$, заданного на $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ при условии, что:

а) $x_2 = Ax_1$, где A — линейный оператор: $A : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$;

б) $x_1 \in X$, где $X \subset \mathfrak{X}_1$ — некоторое выпуклое замкнутое множество.

К этому классу задач относятся не только простейшие задачи классического вариационного исчисления, но и многие задачи управления, а также задачи другой природы.

Как видно из дальнейших рассмотрений, для задач такого типа весьма естественно формулируются такие, казалось бы, специфические именно для классического вариационного исчисления условия, как уравнение Эйлера и система канонических уравнений. В предположении, что $f(x_1, x_2)$ — выпуклая функция своих переменных, получаем теорему двойственности и принцип оптимальности.

Основные факты, касающиеся теории выпуклых функций в пространствах, находящихся в двойственности, были получены в работах [2—6]. Они также изложены в обзорной статье [1], где имеется подробная библиография. Данная работа примыкает к циклу работ А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова по теории двойственности в задачах вариационного исчисления.

§ 1. Выпуклые функции, локально выпуклые функции и двойственность

Основные определения и теоремы. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — вещественные линейные пространства. Считаем, что $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ находятся в двойственности, если существует билинейный функционал $B(x, y) : \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \to R^1$ такой, что [1]:

а) для любого $x \neq 0$, $x \in \mathfrak{X}$ существует $y \in \mathfrak{Y}$ такой, что $B(x, y) \neq 0$;

б) для любого $y \neq 0$, $y \in \mathfrak{Y}$ существует $x \in \mathfrak{X}$ такой, что $B(x, y) \neq 0$.

Отношение двойственности приводит к топологии в каждом из пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$. Эта топология, обычно называемая слабой, определяется как слабейшая из топологий, в которых непрерывны все линейные формы $x \to B(x, y)$ на $\mathfrak{X}$ и $y \to B(x, y)$ на $\mathfrak{Y}$, и обозначается соответственно $\sigma(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ и $\sigma(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$. Базис фундаментальной системы окрестностей нуля в этих топологиях образуют множества $U_y(\varepsilon) = \{x : |B(x, y)| < \varepsilon\}$ в $\mathfrak{X}$ и $V_x(\varepsilon) = \{y : |B(x, y)| < \varepsilon\}$ в $\mathfrak{Y}$.

Наделенные слабыми топологиями $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ превращаются в отделимые локально выпуклые линейные топологические пространства, топологически сопряженные друг с другом [1].

Отображение $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}'$, сопоставляющее каждому $y_0 \in \mathfrak{Y}$ линейный функционал $x_0'(x) = B(x, y_0) \in \mathfrak{X}'$, линейно и изоморфно отображает $\mathfrak{Y}$ на некоторое линейное подпространство $\mathfrak{Y}_1$ в $\mathfrak{X}'$ ($\mathfrak{X}'$ — пространство всех линейных функционалов, заданных на $\mathfrak{X}$). Поскольку $B(x, y)$ при этом переходит в каноническую билинейную форму, то $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ двойственны относительно сужения на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}_1$ канонической билинейной формы на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$. Поэтому мы в дальнейшем рассматриваем $\mathfrak{Y}$ как линейное многообразие в $\mathfrak{X}'$ и двойственность между $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ понимаем относительно канонической билинейной формы на $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}'$.

Очевидно, что при этом равноправие $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ не нарушается, так как $\mathfrak{X}$ автоматически становится линейным многообразием в $\mathfrak{Y}'$.

Пусть в пространстве $\mathfrak{X}$ задано множество X. Полярой X^0 множества X называют множество тех элементов $y \in \mathfrak{Y}$, для которых удовлетворено соотношение $\langle x, y \rangle \leqslant 1$ для всех $x \in X$. Очевидно, $0 \in X^0$ и $(X^0)^0 \supseteq X$, а если X выпукло и замкнуто и содержит нуль, то $(X^0)^0 = X$.

Если X — подпространство, то X^0 состоит из всех тех $y \in \mathfrak{Y}$, для которых $\langle x, y \rangle = 0$. X^0 есть подпространство пространства $\mathfrak{Y}$. Называется оно подпространством, ортогональным к подпространству X и обозначается $X^{\perp}$.

Пусть в $\mathfrak{X}$ задана функция $f(x)$, принимающая значения в расширенной области вещественных чисел, $f(x) \in [-\infty, \infty]$. Обозначим

$$\operatorname{dom} f = \{x : f(x) < \infty\} \subseteq \mathfrak{X} \text{ и } \det f = \{(\lambda, x) : \lambda \geqslant f(x)\} \subseteq R^1 \times \mathfrak{X}.$$

Функцию $f(x)$ назовем выпуклой, если $\det f$ выпукло, и замкнутой, если $\det f$ замкнуто в $R^1 \times \mathfrak{X}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема [1, стр. 57]. Всегда $f^{**}(x) \leqslant f(x)$ $f^{**}(x) = f(x)$ тогда и только тогда, когда f собственная (т. е. $\{x : |f(x)| < \infty\} \neq \varnothing$) выпуклая замкнутая функция. (Функцию f^{**} называют второй двойственной к f, т. е. двойственной к двойственной, а

$$f^*(y) = \sup_x [\langle x, y\rangle - f(x)] \tag{3}$$

называют двойственной, по Юнгу, к функции f.)

Отметим также важное неравенство, непосредственно вытекающее из (3)

$$\langle x, y\rangle \leqslant f(x) + f^*(y). \tag{3$'$}$$

Определение 1. Назовем функцию $\varphi(x)$ слабо локально выпуклой в точке x_0, если

$$\varphi'(x_0;\ x) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x_0+tx) - \varphi(x_0)}{t} \tag{4}$$

существует и выпуклая по x.

Определение 1$'$. Мы говорим, что функция $\varphi(x)$ — локально выпуклая в смысле Гато в точке x_0, если для каждого $x \in \mathfrak{X}$

$$\varphi(x_0+tx) = f(x_0+tx) + O_x(t), \tag{5}$$

где f — выпуклая функция.

Определение 1$''$. Функцию $\varphi(x)$ называют сильно локально выпуклой в точке x_0, если для каждого ограниченного множества V существует функция $\varepsilon(t, V) \to 0$ при $t \to 0$ такая, что

$$\varphi(x_0+tx) = f(x_0+tx) + t\varepsilon(t, V) \tag{6}$$

для всех $x \in V$.

Если $\mathfrak{X}$ — B-пространство, то (6) можно заменить равенством

$$\varphi(x_0+x) = f(x_0+x) + O(\|x\|). \tag{6$'$}$$

В этом случае считаем еще, что φ — локально выпуклая по Фреше.

Если $\varphi(x)$ — локально выпуклая функция в одном из определений (1$'$), (1$''$) и $f(x)$ — выпуклая функция, входящая в определение, то будем иногда обозначать $\varphi \underset{x_0}{\cong} f$.

Нетрудно показать, что из (6) следует (5) и из (5) — (4).

Лемма 1. *Если функция $\varphi(x)$ дифференцируема по Фреше в B-пространстве $\mathfrak{X}$, то она локально выпуклая в смысле* (6$'$).

Доказательство. Пусть φ дифференцируема по Фреше в точке x_0. Это значит, что

$$\varphi(x_0+x) = \varphi(x_0) + \langle x, \varphi'(x_0)\rangle + \|x\|\,\varepsilon(\|x\|),$$

где $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to 0$. Если в качестве функции f возьмем функцию $\varphi(x_0) + \langle x, \varphi(x_0)\rangle$, то

$$\varphi(x_0+x) = f(x_0+x) + O(\|x\|)$$

и функция f — выпуклая, поскольку она является линейным функционалом на $\mathfrak{X}$ плюс $\varphi(x_0)$.

Лемма 2. *Для того чтобы локально выпуклая функция $\varphi(x)$ достигала минимума (локального) в точке x_0, необходимо, а если φ — выпуклая, то и достаточно, чтобы ее производная по направлению*

$$\varphi'(x_0;\ x) = \lim_{t\to+0} \frac{\varphi(x_0+tx) - \varphi(x_0)}{t}$$

удовлетворяла соотношению

$$\varphi'(x_0;\ x) \geqslant 0. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\varphi(x_0) = \min \varphi(x)$. Тогда существует уравновешенная окрестность V нуля такая, что для всех $x \in V$ $\varphi(x_0 + x) \geqslant \varphi(x_0)$ и тем более для $0 < t \leqslant 1$ $\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0) \geqslant 0$, откуда

$$\frac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \to +0} \frac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t} = \varphi'(x_0;\ x) \geqslant 0.$$

Докажем достаточность. Пусть φ выпуклая и $\varphi'(x_0;\ x) \geqslant 0$. Соотношение $\dfrac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t}$ убывает при $t \to +0$ и, следовательно,

$$\frac{\varphi(x_0 + tx) - \varphi(x_0)}{t} \geqslant \varphi'(x_0;\ x) \geqslant 0,\ t > 0,$$

т. е. $\varphi(x_0 + tx) \geqslant \varphi(x_0)$ для всех $t > 0$. Положив $t = 1$, получаем

$$\varphi(x_0 + x) \geqslant \varphi(x_0)$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$, откуда следует, что

$$\varphi(x_0) = \min \varphi(x).$$

§ 2. Субдифференциалы выпуклых и локально выпуклых функций

Определение 2. Субдифференциалом выпуклой функции $f(x)$ в точке x_0 называют множество

$$Y = \{y_0 : f(x) \geqslant f(x_0) + \langle x - x_0, y\rangle, \quad x \in \mathfrak{X}\} \subset \mathfrak{Y} \tag{8}$$

и обозначают $\partial f(x_0)$. Каждое $y_0 \in Y$ называется субградиентом функции f в точке x_0.

Для субградиентов имеет место соотношение

$$f(x_0) + f^*(y_0) = \langle x_0, y_0\rangle. \tag{9}$$

Нетрудно доказать, что выпуклая замкнутая функция $f(x)$ достигает минимума в точке x_0 тогда и только тогда, когда $x_0 \in \partial f^*(0)$ (что эквивалентно соотношению $0 \in \partial f(x_0)$).

Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — вещественные линейные пространства и $\mathfrak{Y}_1$ и $\mathfrak{Y}_2$ им двойственные. Пусть $\varphi(x_1) = f(Ax_1)$, где f — выпуклая функция и A — линейный оператор: $A : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$. Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Всегда*

$$\partial\varphi \supset A^*\partial f. \tag{10}$$

Если A такой, что A^* отображает $\mathfrak{Y}_2$ на $\mathfrak{Y}_1$, то

$$\partial\varphi = A^*\partial f. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $y_2^0 \in \partial f(Ax_1^0)$. Тогда

$$f(x_2) - f(Ax_1^0) \geqslant \langle x_2 - Ax_1^0, y_2^0\rangle.$$

Поскольку это неравенство выполнено для всех $x_2 \in \mathfrak{X}_2$, то оно выполнено и для тех x_2, для которых $x_2 = Ax_1$, т. е.

$$f(Ax_1) - f(Ax_1^0) \geqslant \langle Ax_1 - Ax_1^0, y_2^0\rangle,$$

что дает

$$\varphi(x_1) - \varphi(x_1^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, A^*y_2^0\rangle.$$

Итак, $A^*y_2^0 \in \partial\varphi(x_1^0)$.

Пусть теперь A^* отображает $\mathfrak{Y}_2$ на $\mathfrak{Y}_1$. Пусть $y_1^0 \in \partial\varphi(x_1^0)$. Тогда $\varphi(x_1) - \varphi(x_1^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, y_1^0\rangle$ и отсюда

$$f(Ax_1) - f(Ax_1^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, y_1^0\rangle = \langle Ax_1 - Ax_1^0, y_2^0\rangle,$$

где $y_1^0 = A^* y_2^0$.

Так, мы получили, что $y_2^0 \in \partial f(Ax_1^0)$, следовательно,

$$\partial\varphi(x_1^0) \subset A^*\partial f(Ax_1^0),$$

чем и закончено доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть $f(x_1, x_2)$ — выпуклая по совокупности переменных замкнутая функция, заданная на $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$. Тогда*

$$\partial f(x_1, x_2) \subset (\partial f_{x_1}, \partial f_{x_2}),$$

где

$$\partial f_{x_1}(x_1^0, x_2^0) = \{y_1^0 : f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, y_1^0\rangle\},$$

$$\partial f_{x_2}(x_1^0, x_2^0) = \{y_2^0 : f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) \geqslant \langle x_2 - x_2^0, y_2^0\rangle\}.$$

Доказательство. Пусть $(y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_1^0, x_2^0)$. Тогда

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, y_1^0\rangle + \langle x_2 - x_2^0, y_2^0\rangle.$$

Положив $x_2 = x_2^0$, получаем, что

$$f(x_1, x_2^0) - f(x_1^0, x_2^0) \geqslant \langle x_1 - x_1^0, y_1^0\rangle,$$

т. е. $y_1^0 \in \partial f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$, а при $x_1 = x_1^0$ получаем, что

$$f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) \geqslant \langle x_2 - x_2^0, y_2^0\rangle,$$

т. е. $y_2^0 \in \partial f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$.

Итак, мы получили, что если $(y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_1^0, x_2^0)$, то $y_1^0 \in \partial f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)$ и $y_2^0 \in \partial f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)$, откуда и следует утверждение леммы.

Определение 3. Под субдифференциалом функции $\varphi(x)$, локально выпуклой в точке x_0 в смысле (5) или (6), мы будем понимать субдифференциал функции $f(x)$, где $\varphi \overset{\simeq}{x_0} f$, т. е.

$$\partial\varphi(x_0) = \partial f(x_0).$$

Лемма 5. *Пусть функция $\varphi(x)$ — локально выпуклая в смысле (5) или (6) в точке x_0 и $\partial f(x_0) \neq \varnothing$. Пусть $\varphi \overset{\simeq}{x_0} f$. Тогда для того чтобы функция φ достигала минимума в точке x_0, необходимо, чтобы $0 \in \partial f(x_0)$.*

Доказательство тривиально следует из определения локально выпуклой функции и леммы 2.

Рокафеллар доказал для выпуклых функций следующую теорему.

Теорема. Пусть существует точка $x_0 \in \operatorname{dom} f_2$, в которой функция f_1 непрерывна. Тогда

$$\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 + \partial f_2. \qquad (12)$$

Следующая лемма доказывает, что для локально выпуклых функций, заданных в пространстве со счетным базисом, имеет место подобное утверждение.

Лемма 6. *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — сильно локально выпуклые в точке x_0 функции, заданные в пространстве $\mathfrak{X}$ со счетным базисом, и $\varphi_1 \overset{\simeq}{x_0} f_1$, $\varphi_2 \overset{\simeq}{x_0} f_2$. Пусть в точке x_0 хотя бы одна из функций φ_1 и φ_2 непрерывна (мы предполагаем обе функции конечны в x_0). Тогда имеет место равенство*

$$\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 + \partial f_2.$$

Доказательство. Пусть, для определенности, функция $\varphi_1(x)$ непрерывна в x_0. Покажем, что функция f_1 тоже непрерывна в x_0, чем и будет закончено доказательство леммы (f_2 конечна в x_0, поскольку $f_2(x_0) = \varphi_2(x_0)$).

Пусть $\mathfrak{X}$ — пространство со счетным базисом и $\varphi_1(x)$ непрерывна в x_0. Допустим, что функция f_1 не непрерывна в x_0.

Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная система окрестностей нуля в $\mathfrak{X}$. Тогда $\left\{x_0 + \frac{1}{n} U_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная система окрестностей точки x_0. Если f_1 не непрерывна в x_0, то она неограничена сверху на каждом множестве $x_0 + \frac{1}{n} U_n$ и, следовательно, существует точка $x_n \in U_n$ такая, что $f_1\left(x_0 + \frac{1}{n} x_n\right) \geqslant n$. Так как $x \in U_n$, то последовательность $\{x_n\} \to 0$, т. е. она ограничена. Обозначим $V = \{[x_n, 0]\}$. По определению

$$\varphi_1(x_0 + tx) = f_1(x_0 + tx) + t\varepsilon(t, V)$$

для всех $x \in V$, $t \in R$. Положим $t = \frac{1}{n}$, $x = x_n$. Тогда

$$\varphi_1\left(x_0 + \frac{1}{n} x_n\right) = f_1\left(x_0 + \frac{1}{n} x_n\right) + \frac{1}{n} \varepsilon\left(\frac{1}{n}, V\right).$$

При $n \to \infty$ левая сторона (из непрерывности $\varphi_1(x)$ в точке x_0) стремится к $\varphi_1(x_0)$, $\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}, V\right)$ — к нулю, а $f_1\left(x_0 + \frac{1}{n} x_n\right) \to \infty$.

Так, мы пришли к противоречию, следовательно, $f_1(x)$ непрерывна в x_0, а это, согласно цитированной выше теореме Рокафеллара, означает, что

$$\partial(f_1 + f_2) = \partial f_1 + \partial f_2.$$

Докажем одну лемму в двойственности на подпространствах. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — пространства, находящиеся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x, y\rangle$. Пусть в $\mathfrak{X}$ задана выпуклая функция $F(x)$ и L — подпространство пространства $\mathfrak{X}$. Рассмотрим функцию

$$f(\xi) = \inf_{x \in L} F(x + \xi).$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 7. *На подпространстве L' пространства $\mathfrak{Y}$ имеет место равенство $f^*(\eta) = F^*(\eta)$.*

Доказательство.

$$f^*(\eta) = \sup_{\xi} [\langle \xi, \eta\rangle - f(\xi)] = \sup_{\xi} [\langle \xi, \eta\rangle - \inf_{x \in L} F(x + \xi)] =$$
$$= \sup_{\xi} \sup_{x \in L} [\langle \xi, \eta\rangle - F(x + \xi)] = \sup_{x \in L} \sup_{\xi} [\langle \xi + x, \eta\rangle -$$
$$- F(x + \xi) - \langle x, \eta\rangle] = \sup_{x \in L} [F^*(\eta) - \langle x, \eta\rangle] = \begin{cases} F^*(\eta), & \text{если } \eta \in L^{\perp}, \\ \infty, & \text{если } \eta \overline{\in} L^{\perp}. \end{cases}$$

Из этой леммы легко получаем, что если X—произвольное множество, то $f^*(\eta) = F^*(\eta) - \mu_{X^\circ}(\eta)$.

§ 3. Двойственность в задачах вариационного типа

Пусть $f(x_1, x_2)$ — выпуклая замкнутая по совокупности переменных функция, заданная на произведении $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, где $x_1 \in \mathfrak{X}_1$, $x_2 \in \mathfrak{X}_2$. Пусть пространства $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ находятся в двойственности относительно билинейной формы $\langle x_1, y_1 \rangle$, а $\mathfrak{X}_2$ и $\mathfrak{Y}_2$ — относительно $\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle$. Все пространства предположены вещественными линейными пространствами.

Определение 4. Функцию

$$H(x_1, y_2) = \sup_{x_2 \in \mathfrak{X}_2} [\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle - f(x_1, x_2)]$$

назовем функцией Гамильтона функции f.

Положим

$$f^*(y_1, y_2) = \sup_{x_1 \in \mathfrak{X}_1} [\langle x_1, y_1 \rangle + H(x_1, y_2)].$$

Тогда

$$f^*(y_1, y_2) = \sup_{x_1} [\langle x_1, y_1 \rangle + H(x_1, y_2)] = \sup_{x_1} [\langle x_1, y_1 \rangle + \sup_{x_2} [\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle -$$

$$- f(x_1, x_2)]] = \sup_{x_1, x_2} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle - f(x_1, x_2)].$$

Пространство $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$ находится в двойственности к пространству $\mathfrak{Y}_1 \times \times \mathfrak{Y}_2$ относительно билинейной формы

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle$$

и функция $f^*(y_1, y_2)$ — двойственная к $f(x_1, x_2)$ относительно этой билинейной формы.

Из определения для функции H следует, что она вогнута по x_1 и выпукла по y_2. Функция f^* выпукла и замкнута по совокупности переменных.

Обозначим

$$\operatorname{dom} f = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) < \infty\}.$$

Проекции $\operatorname{dom} f$ на $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ обозначим $\operatorname{dom}_{\mathfrak{X}_1} f$ и $\operatorname{dom}_{\mathfrak{X}_2} f$ соответственно.

Обозначим

$$\operatorname{dom} H = \{(x_1, y_2) : |H(x_1, y_2)| < \infty\}$$

и подобно $\operatorname{dom}_{\mathfrak{X}_1} H$ и $\operatorname{dom}_{\mathfrak{Y}_2} H$.

Сопряженную к $H(x_1, y_2)$ по второму аргументу функцию обозначим $f^{**}_{x_2}(x_1, x_2)$:

$$f^{**}(x_1, x_2) = \sup_{y_2} [\langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle - H(x_1, y_2)].$$

При наших ограничениях на f (она выпукла и замкнута по второму аргументу) имеем $f(x_1, x_2) = f^{**}_{x_2}(x_1, x_2)$.

Теперь будем разыскивать условия, при которых можно выразить $\inf f(x, Ax)$* с помощью описанной двойственности. Представляет интерес только случай, когда

$$\inf_x f(x, Ax) = M > -\infty,$$

поскольку $\inf f(x, Ax) = -\infty$, то функция $f^*(-A^* y, y)$ будет тождественно равна бесконечности. Докажем последнее утверждение:

$$\inf_x f(x, Ax) = \inf_x \sup_y [\langle\langle Ax, y \rangle\rangle - H(x, y)] \geqslant \sup_y \inf_x [\langle x, A^* y \rangle - H(x, y)] =$$

$$= -\inf_y \sup_x [\langle x, -A^* y \rangle + H(x, y)] = -\inf_y f^*(-A^* y, y),$$

* $A : \mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{X}_2$ — замкнутый линейный оператор, $A^* : \mathfrak{Y}_2 \to \mathfrak{Y}_1$.

т. е. $\inf_x f(x, Ax) + \inf_y f^*(-A^*y, y) \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\inf_y f^*(-A^*y, y) = \infty$, а это и дает, что

$$f^*(-A^*y, y) \equiv \infty.$$

Итак, доказана и следующая лемма.

Лемма 8. *Всегда*

$$\inf_x f(x, Ax) + \inf_y f^*(-A^*y, y) \geqslant 0. \tag{13}$$

Мы будем часто в дальнейшем пользоваться функциями

$$\varphi(\xi) = \inf_x f(x, Ax + \xi) \text{ и } \psi(\eta) = \inf_y f^*(-A^*y + \eta, y).$$

(функции подобного рода были введены и исследованы в работах Моро и Рокафеллара). Функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ выпуклы.

Для получения условий, когда в (13) имеет место равенство, мы будем действовать в более общей ситуации. Именно, будем рассматривать задачу о нижней грани функции $f(x_1, x_2)$ при условии, что $x_2 = Ax_1$, $x_1 \in X$, где X — некоторое выпуклое замкнутое множество. При этих условиях задача об

$$\inf_{\substack{x_2 = Ax_1 \\ x_1 \in X}} f(x_1, x_2)$$

эквивалентна задаче о нижней грани функции

$$f(x_1, Ax_1) + \delta_{X \times \mathfrak{X}_2}(x_1, Ax_1) = \tilde{f}(x_1, Ax_1)$$

(вместо x_1 мы будем в дальнейшем писать просто x).

Докажем основную теорему двойственности.

Теорема 1 (основная теорема двойственности). *Для выполнения равенства*

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \inf_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = 0, \tag{14}$$

где

$$\tilde{f}^*(y_1, y_2) = \sup_{x_1, x_2} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle - \tilde{f}(x_1, x_2)],$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\xi) = \inf_x \tilde{f}(x, Ax + \xi)$ (*или* $\psi(\eta) = \inf_y \tilde{f}^*(-A^*y + \eta, y)$) *была замкнута в нуле.*

Доказательство. Найдем функцию $\varphi^*(y)$:

$$\varphi^*(y) = \sup_\xi [\langle\langle \xi, y \rangle\rangle - \varphi(\xi)] = \sup_\xi [\langle\langle \xi, y \rangle\rangle - \inf_x \tilde{f}(x, Ax + \xi)] =$$

$$= \sup_\xi \sup_x [\langle\langle \xi, y \rangle\rangle - \tilde{f}(x, Ax + \xi)].$$

Обозначая $Ax + \xi = x_2$, $x = x_1$, получаем

$$\varphi^*(y) = \sup_{x_1, x_2} [\langle\langle x_2, y \rangle\rangle + \langle x_1, -A^*y \rangle - \tilde{f}(x_1, x_2)] = \tilde{f}^*(-A^*y, y).$$

Докажем необходимость. Пусть равенство (14) выполнено. Тогда

$$\varphi(0) = \inf_x \tilde{f}(x, Ax) = -\inf_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = -\inf_y \varphi^*(y) = \varphi^{**}(0).$$

Для доказательства достаточности нам будет нужно следующее определение.

О п р е д е л е н и е 5. Назовем выпуклую функцию $f(x)$ замкнутой в точке x_0, если $f(x_0) = f^{**}(x_0)$.

Из определения двойственной функции следует, что

$$f(0) = f^{**}(0) = -\inf_y f^*(y).$$

Пусть функция $\varphi(\xi)$ замкнута в нуле. Тогда

$$\inf_x \widetilde{f}(x, Ax) = \varphi(0) = -\inf_y \varphi^*(y) = -\inf_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y).$$

Для функции $\psi^*(x)$ после простой выкладки получаем

$$\psi^*(x) = f(x, Ax).$$

Точно так же доказывается, что замкнутость функции $\psi(\eta)$ в нуле является необходимым и достаточным условием для справедливости равенства (14). Теорема доказана.

Л е м м а 9. *Пусть X — выкуклое замкнутое множество с непустой внутренностью. Пусть* $\mathrm{dom}_{\mathfrak{X}_1} f \cap \inf X \neq \varnothing$ *и* $\mathrm{dom}_{\mathfrak{X}_2} f \neq \varnothing$, $x_2 = Ax_1$. *Тогда справедливо*

$$\widetilde{f}^*(-A^*y, y) = f^*(-A^*y, y) \oplus \mu_{X^\bullet \times \{o\mathfrak{H}_2\}}(-A^*y, y).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию

$$\mathrm{int\,dom}\, \delta_{X \times \mathfrak{X}_2} \cap \mathrm{dom}\, f \neq \varnothing,$$

т. е. существует точка $(x_0, Ax_0) \in \mathrm{int\ dom}\, \delta$, в которой функция f конечна, а функция δ непрерывна (равна нулю на $X \times \mathfrak{X}_2$), следовательно, условия теоремы, которую мы приводим ниже, выполнены. Мы предполагаем $\inf f(x, Ax) = M > -\infty$ и можем записать

$$[f(x_1, x_2) + \delta_{X \times \mathfrak{X}_2}(x_1, x_2)]^* = f^*(y_1, y_2) \oplus \mu_{X^\bullet \times \{o\mathfrak{H}_2\}}(y_1, y_2).$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а Р о к а ф е л л а р а. Пусть существует точка $x_0 \in \mathrm{dom}\, f_2$, в которой функция f_1 непрерывна. Пусть $\inf_x [f_1(x) + f_2(x)] > -\infty$. Тогда $(f_1 + f_2)^* = f_1^* \oplus f_2^*$.

Операцию $\oplus$ мы называем конволюцией.

Отметим, что в условии леммы мы не предполагали, что

$$\mathrm{int\,dom}\, f \neq \varnothing.$$

Теперь мы укажем условия, обеспечивающие замкнутость функции φ в нуле.

Т е о р е м а 2. *Для того чтобы функция $\varphi(\xi)$ была замкнута в нуле, необходимо и достаточно, чтобы существовала гиперплоскость L, отделяющая множества* $\det f$, *и*

$$L_z'(x_1, x_2) = \{(x_1, x_2, z) : x_2 = Ax_1, \quad x_1 \in X, \quad z \leqslant M - \varepsilon\},$$

где $M = \inf_x \widetilde{f}(x, Ax)$ *и* $\varepsilon > 0$ *произвольно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем необходимость. Пусть функция φ замкнута в нуле. Тогда по теореме 1 справедлиео (14). Обозначим $M = \inf_x \widetilde{f}(x, Ax)$. Из (14) следует, что $-M = \inf_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y)$ и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое y_0, что $\tilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) < -M + \varepsilon$. Отсюда

$$\sup_{x_1, x_2} [\langle x_1, -A^*y_0\rangle + \langle\langle x_2, y_0\rangle\rangle - \tilde{f}(x_1, x_2)] < -M + \varepsilon =$$
$$= \inf_{\substack{x_2 = Ax_1, \\ z \leqslant M - \varepsilon}} [\langle x_1, -A^*y_0\rangle + \langle\langle x_2, y_0\rangle\rangle - z].$$

Это означает, что множества $\det\tilde{f}$ и L'_z отделимы гиперплоскостью.

Докажем достаточность. Пусть множества $\det\tilde{f}$ и L'_z отделимы гиперплоскостью. Тогда отделимы и множества $\det\tilde{f}$ и $\overline{L}_z = \{(x_1, x_2, z) : x_2 = Ax_1, z \leqslant M - \varepsilon, x_1 \in \mathfrak{X}_1\}$, поскольку для всех $x_1 \overline{\in} X$ $\tilde{f}(x_1, x_2) = \infty$. Это означает, что существуют (y_1, y_2, μ) такие, что

$$\inf_{\substack{x_2 = A x_1, \\ z \leqslant M - \varepsilon}} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle + \mu z] \geqslant \sup_{(x_1, x_2, \lambda) \in \det\tilde{f}} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle + \mu\lambda].$$

Легко доказывается, что $\mu < 0$ и, следовательно, можем предположить $\mu = -1$. Отсюда

$$\tilde{f}^*(y_1, y_2) + \inf_x \tilde{f}(x, Ax) < \varepsilon + \inf_{x_1} \langle x_1, y_1 + A^*y_2\rangle,$$

где $y_1 = -A^*y_2$. Так,

$$\tilde{f}^*(-A^*y, y) + \inf_x \tilde{f}(x, Ax) \leqslant \varepsilon$$

и тем более

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \inf_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \inf_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) \leqslant 0. \qquad (15)$$

Сравнивая (15) и (13), получаем (14), откуда в силу теоремы 1 следует, что функция φ замкнута в нуле.

Теорема 3. *Пусть функции φ и ξ замкнуты в нуле. Тогда*

а) *для того чтобы функция $\tilde{f}^*(-A^*y, y)$ достигала минимума, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(\xi)$ была субдифференцируема в нуле;*

б) *для того чтобы функция $\tilde{f}(x, Ax)$ достигала минимума, необходимо и достаточно, чтобы функция $\psi(\eta)$ была субдифференцируема в нуле;*

в) *равенство*

$$\min_x \tilde{f}(x, Ax) + \min_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = 0. \qquad (16)$$

справедливо тогда и только тогда, когда функции φ и ψ субдифференцируемы в нуле;

г) *функция $\varphi(\xi)$ субдифференцируема в нуле и $\min\limits_x \tilde{f}(x, Ax)$ достигается тогда и только тогда, когда функция $\psi(\eta)$ субдифференцируема в нуле и $\min\limits_y \tilde{f}^*(-A^*y, y)$ достигается.*

Доказательство. Докажем условие а). В доказательстве теоремы 1 мы нашли, что $\varphi^*(y) = \tilde{f}^*(-A^*y, y)$, $\psi^*(x) = \tilde{f}(x, Ax)$.

Пусть

$$\inf_x \widetilde{f}(x, Ax) + \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = 0.$$

Тогда

$$\varphi(0) = \inf_x \widetilde{f}(x, Ax) = -\min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = -\min_y \varphi^*(y),$$

откуда и следует, что функция $\varphi(\xi)$ субдифференцируема в нуле.

Обратно, пусть функция $\varphi(\xi)$ субдифференцируема в нуле. Тогда

$$0 = \varphi(0) + \min_y \varphi^*(y) = \inf_x \widetilde{f}(x, Ax) + \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y).$$

Утверждение б) доказывается точно так же.

Докажем условие в). 1. Пусть (16) выполнено. Тогда

$$\varphi(0) = \min_x \widetilde{f}(x, Ax) = -\min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = -\min_y \varphi^*(y),$$

$$\psi(0) = \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = -\min_x \widetilde{f}(x, Ax) = -\min_x \psi^*(x),$$

т. е. функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ субдифференцируемы в нуле.

2. Пусть функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\eta)$ субдифференцируемы в нуле. Тогда

$$\inf_x \widetilde{f}(x, Ax) = \varphi(0) = -\min_y \varphi^*(y) = -\min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y),$$

$$\inf_x \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = \psi(0) = -\min_x \psi^*(x) = -\min_x f(x, Ax),$$

откуда и следует (16).

Докажем условие г). Субдифференцируемость функции $\varphi(\xi)$ в нуле дает, что $\widetilde{f}^*(-A^*y, y)$ достигает минимума, а факт, что $\widetilde{f}(x, Ax)$ достигает минимума и замкнутость функции $\varphi(\xi)$ в нуле, дает субдифференцируемость функции $\psi(\eta)$ в нуле. И наоборот.

Определение 6. Назовем функцию $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ N-функцией, если существует точка $(x_0, Ax_0) \in \operatorname{dom} \widetilde{f}$, $x_0 \in X$, в которой f непрерывна.

Теорема 4. *Если $f(x_1, x_2)$ является N-функцией, то $\inf_x \widetilde{f}^*(-A^*y, y)$ достигается и*

$$\inf_x \widetilde{f}(x, Ax) + \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим множество Λ в $R^1 \times \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$:

$$\Lambda = \{(x_1, x_2, \lambda) : x_2 = Ax_1, \quad x_1 \in X, \quad -\infty \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0 = \inf_x \widetilde{f}(x, Ax)\}.$$

Обозначим $L = \{(x_1, x_2) : x_2 = Ax_1, \ x_1 \in X\}$.

Пусть существует точка (x_1^0, Ax_1^0), $x_1^0 \in X$, в которой функция $f(x_1, x_2)$ непрерывна. Очевидно, что $\Lambda \cap \operatorname{int} \det f = \varnothing$. По условию $\operatorname{int} \det f \neq \varnothing$. По теореме Хана — Банаха об отделимости существует ненулевой непрерывный линейный функционал (y_1, y_2, μ), отделяющий Λ от $\operatorname{int} \det f$. Иначе говоря,

$$\inf_{\substack{x_2 = Ax_1, \\ \lambda \leqslant \lambda_0, \ x_1 \in X}} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle + \lambda\mu] \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(x_1 x_2, \lambda) \in \operatorname{int} \det f} [\langle x_1, y_1 \rangle + \langle\langle x_2, y_2 \rangle\rangle + \lambda\mu]. \tag{17}$$

Понятно, что μ не может быть положительным числом (ибо иначе sup справа равнялся бы $+\infty$). Докажем, что $\mu \neq 0$. Действительно, пусть $\mu = 0$.

Тогда мы имеем слева $\inf\limits_{\substack{x_2=Ax_1,\\ x_1\in X}} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle]$ и справа $\sup\limits_{(x_1, x_2)\in\operatorname{int}\operatorname{dom} f} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle]$. Но, поскольку $L\cap \operatorname{int}\operatorname{dom} f \neq \varnothing$, то неравенство (17) не имело бы места. Итак, μ — отрицательное число. Поэтому, не уменьшая общности, можно предположить $\mu = -1$ (иначе поделим на $-\mu > 0$) и получим

$$\inf_{\substack{x_2=Ax_1,\\ \lambda\leqslant\lambda_0,\ x_1\in X}} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle - \lambda] \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{(x_1, x_2, \lambda)\in\operatorname{int}\operatorname{det} f} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle - \lambda].$$

Переходя к $\inf\limits_{\lambda\leqslant\lambda_0}$ слева и к $\sup\limits_{\lambda\geqslant f(x_1,x_2)}$ справа, получаем

$$\sup_{x_1,x_2} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle - f(x_1, x_2)] \leqslant$$

$$\leqslant \inf_{x_2=Ax_1, x_1\in X} [\langle x_1, y_1\rangle + \langle\langle x_2, y_2\rangle\rangle - \lambda_0].$$

Отсюда

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + f^*(y_1, y_2) \leqslant \inf_{x\in X} \langle x, y_1 + A^*y_2\rangle. \tag{18}$$

А. Пусть $X = \mathfrak{X}_1$. Тогда $\langle x, A^*y_2 + y_1\rangle \equiv 0$. Сравнивая (18) и (13), получаем

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_y f^*(-A^*y, y) = 0. \tag{19}$$

Б. Пусть $X = L$ — подпространство пространства $\mathfrak{X}_1$. Тогда из (18) следует

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_{y_1+A^*y_2\in L^\perp} f^*(y_1, y_2) = 0. \tag{20}$$

В. Пусть $X = \xi + L$, где L — подпространство пространства $\mathfrak{X}_1$. Тогда

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_{y_1+A^*y_2\in L^\perp} [f^*(y_1, y_2) - \langle \xi, A^*y_2 + y_1\rangle] = 0. \tag{21}$$

Г. Пусть $X \subset \mathfrak{X}$ — выпуклое замкнутое множество. Тогда

$$\inf_x \langle x, y_1 + A^*y_2\rangle = -\sup_{x\in X} \langle x, -y_1 - A^*y_2\rangle = -\mu_{X^\circ}(-y_1 - A^*y_2).$$

Обозначив $-y_1 - A^*y_2 = z$, получаем

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_{y,z} [f^*(-A^*y - z, y) + \mu_{X^\circ}(z)] = 0. \tag{22}$$

Д. Пусть $X = \{x_1 : \langle x_1, y_1^k\rangle = \xi_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, т. е. $X \subset \mathfrak{X}_1$ — сдвинутое подпространство коразмерности n. Тогда $X^\perp$ имеет размерность n, т. е.

$$X^\perp = \sum_{i=1}^n \beta_i y_1^i,$$

где $\beta_i \in R^1$, и мы получаем

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_{y,\beta_i} \left[f^*(-A^*y + \sum_{i=1}^n \beta_i y_1^i, y) - \sum_{i=1}^n \beta_i \xi_i \right] = 0. \tag{23}$$

В условии теоремы утверждалось, что

$$\inf_x \tilde f(x, Ax) + \min_y \tilde f^*(-A^*y, y) = 0.$$

Поскольку условия теоремы 3 выполнены ($\operatorname{int}\det f \cap X \neq \varnothing$), то

$$\tilde{f}^*(y_1, y_2) = f^*(y_1, y_2) \oplus \mu_{X^0 \times \{0_{\mathfrak{H}_2}\}}(y_1, y_2),$$

где $(f_1 \oplus f_2)(x) = \inf_{x_1+x_2=x} [f_1(x_1) + f_2(x_2)]$ называем конволюцией выпуклых функций f_1 и f_2.

Рассмотрим случай Б.

$$\tilde{f}^*(y_1, y_2) = f^*(y_1, y_2) \oplus_1 \mu_{X^0}(y_1),$$

где $\oplus_1$ означает конволюцию по первому аргументу. Но $\mu_{L\perp}(y) = \delta_{L\perp}(y)$ и

$$f^*(y_1, y_2) \oplus_1 \delta_{L\perp}(y_1) = \min_{y_1^1+y_1^2=y_1} [f^*(y_1^1, y_2) + \delta_{L\perp}(y_1^2)] =$$

$$= \min_{y_1^2 \in L^\perp} [f^*(y_1 - y_1^2, y_2) + \delta_{L\perp}(y_1^2)] = \min_{y_1^2 \in L^\perp} f^*(y_1 - y_1^2, y_2) = \tilde{f}^*(y_1, y_2),$$

т. е. $\tilde{f}^*(-A^*y, y) = \min_{z \in L^\perp} f^*(-A^*y - z, y)$, и мы получаем окончательно

$$\inf_x \tilde{f}(x, Ax) + \min_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = 0.$$

В случае В получаем

$$\mu_{X^0}(y_1) = \sup_{x_1 \in X} [\langle x_1, y_1 \rangle - \delta_X(x)] = \langle \xi, y_1 \rangle,$$

$$\tilde{f}^*(-A^*y, y) = \min_{z \in L^\perp} [f^*(-A^*y + z, y) + \langle \xi, -z \rangle].$$

В остальных случаях точно так же получается, что $\tilde{f}^*(-A^*y, y)$ имеет вид, выписанный в (19)—(23) соответственно.

Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что если $\tilde{f}(x_1, x_2)$ является N-функцией, то функция $\varphi(\xi)$ субдифференцируема в нуле.

Отметим также, что замкнутость функции $\varphi(\xi)$ в нуле является необходимым и достаточным условием для того, чтобы

$$\inf_x \sup_y [\langle\langle Ax, y \rangle\rangle - H(x, y)] = \sup_y \inf_x [\langle\langle Ax, y \rangle\rangle - H(x, y)].$$

Теорема 5 (принцип оптимальности). *Если выполнено условие теоремы 4, то*

$$\inf_{x_2=Ax_1} \tilde{f}(x_1, x_2) = \inf_{x_1, x_2} [\tilde{f}(x_1, x_2) - \langle\langle x_2 - Ax_1, y_2^0 \rangle\rangle],$$

где y_2^0 — точка минимума функции $\tilde{f}^*(-A^*y, y)$ и x_1, x_2 меняются независимо.

Доказательство. Пусть y_2^0 — точка минимума функции $\tilde{f}^*(-A^*y, y)$. Тогда

$$\inf_{x_1, x_2} [\tilde{f}(x_1, x_2) - \langle\langle x_2 - Ax_1, y_2^0 \rangle\rangle] = -\sup_{x_1, x_2} [\langle x_1, -A^*y_2^0 \rangle + \langle\langle x_2, y_2^0 \rangle\rangle -$$

$$- \tilde{f}(x_1, x_2)] = -\tilde{f}^*(-A^*y_2^0, y_2^0) = -\min_y \tilde{f}^*(-A^*y, y) = \inf_x \tilde{f}(x, Ax).$$

Теорема доказана.

Теперь мы используем понятие субградиент для получения некоторых результатов относительно экстремумов рассматриваемых функций.

По определению, $y_2^0 \in \partial_{x_2} \widetilde{f}$ в точке x_2^0 при фиксированном $\overline{x_1}$, если

$$\widetilde{f}(\overline{x_1}, x_2^0) + \widetilde{H}(\overline{x_1}, y_2^0) = \langle\langle x_2, y_2^0 \rangle\rangle, \tag{24}$$

где $\widetilde{H}(x_1, y_2)$ — функция Гамильтона функции $\widetilde{f}(x_1, x_2)$.

Точка $x_1^0 \in \partial_{y_1} \widetilde{f}^*$ в точке y_1^0 при фиксированном $\overline{y_2}$, если

$$\widetilde{f}^*(y_1^0, \overline{y_2}) - \widetilde{H}(x_1^0, \overline{y_2}) = \langle x_1^0, y_1^0 \rangle.$$

И, подобно, $(y_1^0, y_2^0) \in \partial \widetilde{f}(x_1^0, x_2^0)$, если

$$\widetilde{f}(x_1^0, x_2^0) + \widetilde{f}^*(y_1^0, y_2^0) = \langle x_1^0, y_1^0 \rangle + \langle\langle x_2^0, y_2^0 \rangle\rangle.$$

Пусть x_0 — точка минимума функции $\widetilde{f}(x, Ax)$, а y_0 — точка минимума функции $\widetilde{f}^*(-A^*y, y)$. Тогда, как легко видно, x_0 и y_0 удовлетворяют равенствам ($\widetilde{f}$ — N-функция):

$$\begin{gathered} \widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \widetilde{H}(x_0, y_0) = \langle\langle Ax_0, y_0 \rangle\rangle, \\ \widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) - \widetilde{H}(x_0, y_0) = \langle x_0, -A^*y_0 \rangle. \end{gathered} \tag{25}$$

Теорема 6 (уравнение Эйлера). *Для того чтобы N-функция $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ достигала минимума в точке (x_1^0, x_2^0) при условии, что $x_2 = Ax_1$, необходимо и достаточно, чтобы существовали $(y_1^0, y_2^0) \in \partial \widetilde{f}(x_0, Ax_0)$, удовлетворяющие соотношению, которое в дальнейшем будем называть уравнением Эйлера*:

$$y_1^0 + A^*y_2^0 = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $\widetilde{f}(x_0, Ax_0) = \min_x \widetilde{f}(x, Ax)$. По теореме 4 существует y_0 такое, что

$$\widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) = 0 = \langle x_0, -A^*y_0 \rangle + \langle\langle Ax_0, y_0 \rangle\rangle,$$

откуда следует, что $(-A^*y_0, y_0) \in \partial \widetilde{f}(x_0, Ax_0)$.

Докажем достаточность. Пусть (26) выполнено. Тогда для каждого $x \in \mathfrak{X}$ справедливо

$$\begin{gathered} \widetilde{f}(x, Ax) \geqslant \widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \langle x - x_0, -A^*y_2^0 \rangle + \langle\langle Ax - Ax_0, y_2^0 \rangle\rangle = \\ = \widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \langle x - x_0, A^*y_0 - A^*y_0 \rangle = \widetilde{f}(x_0, Ax_0). \end{gathered}$$

Из этой теоремы мы получаем следующее важное следствие.

Следствие. *Если N-функция $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ достигает минимума в точке (x_1^0, x_2^0) при условии $x_2 = Ax_1$, то имеет место*

$$0 \in \partial_{x_1} \widetilde{f}(x_0, Ax_0) + A^*\partial_{x_2} \widetilde{f}(x_0, Ax_0). \tag{26'}$$

Доказательство. По доказанному в теореме 6, существует y_0 такое, что $(-A^*y_0, y_0) \in \partial \widetilde{f}(x_0, Ax_0)$. По лемме 4 $\partial \widetilde{f}(x_0, Ax_0) \subset (\partial_{x_1} \widetilde{f}(x_0, Ax_0), \partial_{x_2} f(x_0, Ax_0))$, т. е. $-A^*y_0 \in \partial_{x_1} \widetilde{f}(x_0, Ax_0)$, $y_0 \in \partial_{x_2} \widetilde{f}(x_0, Ax_0)$, откуда и следует требуемое.

Теперь мы выпишем уравнение Эйлера для всех пяти случаев, рассмотренных нами в теореме 4:

а) $X = \mathfrak{X}_1$:

$$y_1^0 + A^* y_2^0 = 0, \text{ где } (y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_0, Ax_0); \tag{26$^{\mathrm{I}}$}$$

б) $X = L$ — подпространство пространства $\mathfrak{X}_1$:

$$y_1^0 + A^* y_2^0 \in L^{\perp}, \text{ где } (y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_0, Ax_0); \tag{26$^{\mathrm{II}}$}$$

в) $X = \xi + L$, где $L \subset \mathfrak{X}_1$ подпространство:

$$y_1^0 + A^* y_2^0 \in L^{\perp}, \text{ где } (y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_0, Ax_0); \tag{26$^{\mathrm{III}}$}$$

г) $X \subset \mathfrak{X}_1$ выпуклое замкнутое множество:

$$y_1^0 + A^* y_2^0 = z, \text{ где } -z \in \partial_{x_1} \delta_{X \times \mathfrak{X}_2}(x_0, Ax_0) \tag{26$^{\mathrm{IV}}$}$$

и $(y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_0, Ax_0)$;

д) $X = \{x_1 : \langle x_1, y_1^k \rangle = \xi_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$:

$$y_1^0 + A^* y_2^0 = \sum_{i=1}^{n} \beta_i^0 y_1^i, \text{ где } (y_1^0, y_2^0) \in \partial f(x_0, Ax_0) \tag{26$^{\mathrm{V}}$}$$

и β_i^0 — постоянные, на которых

$$\widetilde{f}^*(-A^*y, y) = \min_{\beta} \left[f^*\left(-A^*y + \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_1^i, y\right) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i \right]$$

достигает минимума.

Замечание 1. Если N-функция $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ не достигает минимума, то, очевидно, для функции $\widetilde{f}^*(-A^*y, y)$ никакого уравнения Эйлера существовать не будет, хотя и она, как было показано в теореме 4, достигает минимума и равенство $\inf\limits_x \widetilde{f}(x, Ax) + \min\limits_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = 0$ выполнено.

Теорема 7 (канонические уравнения). *Пусть N-функция $\widetilde{f}(x_1, x_2)$ достигает минимума в точке (x_1^0, x_2^0) при условии, что $x_2 = Ax_1$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\partial_{y_2} \widetilde{H}(x_0, y_0) \ni Ax_0 : \widetilde{f}(x_0, Ax_0) = \min_x \widetilde{f}(x, Ax),$$

$$\partial_{x_1} \widetilde{H}(x_0, y_0) \ni A^*y_0 : \widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) = \min_y \widetilde{f}^*(-Ay_0, y_0).$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{f}(x_0, Ax_0) = \min_x \widetilde{f}(x, Ax).$$

Тогда, в силу теоремы 4, существует y_0 такое, что

$$\widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) = \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y)$$

и, в силу теоремы 3, справедливо

$$\widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) = 0 = \langle x_0, -A^*y_0\rangle + \langle\langle Ax_0, y_0\rangle\rangle.$$

Прибавляя и вычитая $\widetilde{H}(x_0, y_0)$ и используя неравенство Юнга, получаем

$$\widetilde{f}(x_0, Ax_0) + \widetilde{H}(x_0, y_0) = \langle\langle Ax_0, y_0\rangle\rangle,$$

$$\widetilde{f}^*(-A^*y_0, y_0) - \widetilde{H}(x_0, y_0) = \langle x_0, -A^*y_0\rangle.$$

Отсюда следует, что

$$\partial y_2 \widetilde{H}(x_0, y_0) \ni Ax_0, \ \ \partial x_1 \widetilde{H}(x_0, y_0) \ni A^*y_0,$$

чем и закончено доказательство теоремы.

Замечание 2. В переходе от функции $\widetilde{f}(x, Ax)$ к функции $\widetilde{f}^*(-A^*y, y)$ мы получаем функцию

$$\langle\langle Ax, y\rangle\rangle - \widetilde{H}(x, y),$$

выпуклую по x и вогнутую по y. Для этой выпукло-вогнутой функции точка (x_0, y_0) является седловой точкой, т. е.

$$\langle\langle Ax, y_0\rangle\rangle - \widetilde{H}(x, y_0) \geqslant \langle\langle Ax_0, y_0\rangle\rangle - \widetilde{H}(x_0, y_0) \geqslant \langle\langle Ax_0, y\rangle\rangle - \widetilde{H}(x_0, y).$$

Коротко рассмотрим случаи, когда функция $f(x_1, x_2)$ задана на произведении пространств $\mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$, но не зависит от одного из аргументов.

Из преобразования Юнга функции f:

$$f^*(-A^*y, y) = \sup_{x_1, x_2}[\langle x_1, -A^*y\rangle + \langle\langle x_2, y\rangle\rangle - f(x_1, x_2)]$$

следует, что:

1) если f не зависит от x_1, то $-A^*y = 0$ (иначе $f^*(-A^*y, y) = \infty$) и функция f^* принимает вид $f^*(0, y)$;

2) если функция f не зависит от x_2, то $y = 0$ и, следовательно, функция f^*, возможно, отлична от бесконечности только при $y = 0$, т. е.

$$\inf_x f(x, \cdot) + f^*(0, 0) \geqslant 0.$$

Интересным случаем задачи с ограничением является следующий: найти $\inf\limits_{x_1, x_2} f(x_1, x_2)$ при условиях, что

$$x_2 = Ax_1, \ \ x_1 \in X_1 \subset \mathfrak{X}_1, \ \ x_2 \in X_2 \subset \mathfrak{X}_2, \tag{27}$$

где X_1 и X_2 — выпуклые замкнутые множества или подпространства и $A(X_1) \cap X_2 \neq \varnothing$. В этом случае при дополнительном предположении, что

$$\operatorname{int}\operatorname{dom}_{\mathfrak{X}_1} f \cap X_1 \neq \varnothing, \quad \operatorname{int}\operatorname{dom}_{\mathfrak{X}_2} f \cap X_2 \neq \varnothing$$

и функция

$$\widetilde{f}(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \delta_{X_1 \times \mathfrak{X}_2}(x_1, x_2) + \delta_{\mathfrak{X}_1 \times X_2}(x_1, x_2)$$

является N-функцией, имеет место теорема двойственности.

Теорема 8.

$$\inf_x \widetilde{f}(x, Ax) + \min_y \widetilde{f}^*(-A^*y, y) = 0,$$

где

$$\widetilde{f}^*(-A^*y, y) = [f^*(-A^*y, y) \oplus_1 \mu_{X_1^0}(-A^*y)] \oplus_2 \mu_{X_2^0}(y).$$

Теорема 9 (уравнение Эйлера для локально выпуклых функций) *Для того чтобы функция* $\varphi(x, Ax)$, *локально выпуклая в точке* (x_0, Ax_0) *в смысле* 1′, 1″, *достигла минимума в этой точке при условии, что* $x \in X \subset \mathfrak{X}_1$, *необходимо, чтобы она удовлетворяла соотношению*

$$0 \in \partial_{x_1} \tilde{f}(x_0, Ax_0) + A^* \partial_{x_2} \tilde{f}(x_0, Ax_0), \tag{28}$$

где $\varphi \underset{(x_0, Ax_0)}{\simeq} f$.

(Уравнение (28) является обобщением уравнения Эйлера для классического вариационного исчисления в виде, приданном ему Дю — Буа — Раймондом).

Доказательство. Пусть (x_0, Ax_0) — точка локального минимума функции φ при условии $x \in X$. Но тогда в этой точке достигает минимума и функция $\tilde{f}(x, Ax)$, что и доказывает справедливость (28).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН, т. 23, № 6, 1968.
2. W. Fenchel, On conjugate convex functions, Canadian Jarn. Math., 1, 1949, 73—77.
3. J. J. Moreau, Fonctions convexes en dualité. Faculté des Science de Montepellier, Seminaire de Math. (multigraph), 1962.
4. A. Brondsted, Conjugste convex functions in topological vector spaces, Math. fis. Medd. udj. at Det Kongelige Danske Vid. Selsk. Copenghagen, 34, 2, 1964.
5. R. T. Rockafellar, Extension of Fenchel's dualiti for convex functions, Duke Math. J., 33, 1966, 81—89.
6. R. T. Rockafellar, Dualiti and stabiliti in extremum problems involving convex functions, Pac. J. Math., 21, 1, 1967, 167—189.
7. М. М. Цветанов, О двойственности в задачах вариационного исчисления, Доклады БАН, т. 21, № 8, 1968.

Поступила 29.IX 1969 г.,
после переработки — 20.IX 1970 г.
Болгария