УДК 518:517.91/94

О применении некоторых модификаций метода С. А. Чаплыгина к предельной задаче Коши

И. И. Безверщенко

1°. Алгорифм построения двусторонних приближений к решению начальной задачи Коши, разработанный С. А. Чаплыгиным [1, 2] и распространенный в [3] на предельную задачу Коши

$$y' = f(x, y), \lim_{x \to \infty} y(x) = y_\infty, \tag{1}$$

предполагает знакопостоянство $f''_{y^2}(x, y)$ в некоторой области изменения x и y.

В статье изучается возможность распространения некоторых модификаций [4 — 6] метода С. А. Чаплыгина, не требующих никаких предположений о $f''_{y^2}(x, y)$, на задачу (1).

В дальнейшем предполагается существование и единственность решения этой задачи, доказанные в [7], в предположении, что $f(x, y)$ непрерывна по $y \in (-\infty, \infty)$ почти при всех $x \in [0, \infty)$, измерима по x при всех y и $|f(x, y)| \leqslant \mu(x)$, где $\mu(x)$ суммируема на $[0, \infty)$ (условия Каратеодори).

Будем пользоваться также следующей теоремой о дифференциальных неравенствах для задачи (1) (см. [7, 3]).

Теорема 1 [7]. Пусть $y(x)$ — абсолютно непрерывное решение задачи (1), где $f(x, y)$ удовлетворяет условиям Каратеодори по $x \in [0, \infty)$ и $y \in (-\infty, \infty)$.

Если абсолютно непрерывные функции $z(x)$ и $t(x)$ таковы, что для всех $x \in [0, \infty)$

$$z(\infty) = t(\infty) = y(\infty) = y_\infty, \; z' - f(x, z) \geqslant 0, \; t' - f(x, t) \leqslant 0,$$

то для тех же x выполняются неравенства $z(x) \leqslant y(x) \leqslant t(x)$. Считаем, что $\varphi(x, y)$ удовлетворяет обобщенному условию Липшица по y, если по всем $x \in [0, \infty)$ и $y \in (-\infty, \infty)$

$$|\varphi(x, \bar{y}) - \varphi(x, \tilde{y})| \leqslant K(x) |\bar{y} - \tilde{y}|, \tag{2}$$

где $K(x)$ — суммируемая на $[0, \infty)$ функция, которую в дальнейшем будем называть обобщенной функцией Липшица.

2°. Рассмотрим возможность применения модификаций [4, 5] к задаче (1).

Пусть непрерывная по всем $x \in [0, \infty)$ и $y \in (-\infty, \infty)$ функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и для $x \in [0, \infty)$ и $y \in [u_0, v_0]$

$$m(x) \leqslant f'_y(x, y) \leqslant M(x), \tag{3}$$

где $m(x)$ и $M(x)$ — суммируемые на $[0, \infty)$, а $u_0(x)$ и $v_0(x)$ — начальная пара абсолютно непрерывных на $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющих предельным условиям:

$$u_0(\infty) = v_0(\infty) = y(\infty) = y_\infty \tag{4}$$

и дифференциальным неравенствам

$$u_0' - f(x, u_0) \geqslant 0, \; v_0' - f(x, v_0) \leqslant 0. \tag{5}$$

Построим последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая

$$u_n = u_{n-1} + \tau_n, \; v_n = v_{n-1} - \sigma_n \; (n = 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

где $\tau_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ — решения линейных дифференциальных уравнений

$$\tau_n'(x) - M(x)\tau_n(x) + \alpha_{n-1}(x) = 0, \quad \sigma_n'(x) - M(x)\sigma_n(x) - \beta_{n-1}(x) = 0, \tag{7}$$

удовлетворяющих предельным условиям:

$$\tau_n(\infty) = \sigma_n(\infty) = 0, \tag{8}$$

а $\alpha_n(x)$ и $\beta_n(x)$ — левые части неравенств:

$$u_n' - f(x, u_n) \geqslant 0, \; v_n' - f(x, v_n) \leqslant 0. \tag{9}$$

Докажем, что для всех $x \in [0, \infty)$ и $n = 1, 2, \ldots$ имеют место соотношения:

$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_n \leqslant \ldots \leqslant y \leqslant \ldots \leqslant v_n \leqslant \ldots \leqslant v_1 \leqslant v_0, \tag{10}$$

$$u_n(\infty) = v_n(\infty) = y(\infty) = y_\infty, \tag{11}$$

а также (9), из которых следует безграничная двусторонняя аппроксимация искомого решения $y(x)$, построенными по формулам (6) функциями.

В самом деле, подставляя $y(x) - u_{n-1}(x)$ и $v_{n-1}(x) - y(x)$ в уравнения (7), получим, используя при этом формулу Лагранжа о конечных приращениях и условие (3):

$$(y - u_{n-1})' - M(x)(y - u_{n-1}) + \alpha_{n-1}(x) = ([f_y']_{\xi_{n-1}} - M(x))(y - u_{n-1}) \leqslant 0,$$

$$(v_{n-1} - y)' - M(x)(v_{n-1} - y) - \beta_{n-1}(x) = ([f_y']_{\zeta_{n-1}} - M(x))(v_{n-1} - y) \leqslant 0.$$

На основании теоремы 1 заключаем, что $y(x) - u_{n-1}(x) \geqslant \tau_n(x)$, $v_{n-1}(x) - y(x) \geqslant \sigma_n(x)$. Отсюда в силу (5) и учитывая, что $\tau_n \geqslant 0$ и $\sigma_n \geqslant 0$, замечаем, что $u_{n-1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant y(x) \leqslant v_n(x) \leqslant v_{n-1}(x)$. При этом из (4), (6) и (8) следует (11). Нетрудно также установить, что:

$$\alpha_n(x) = u_n' - f(x, u_n) = (M(x) - [f_y']_{\xi_n})\tau_n \geqslant 0,$$

$$\beta_n(x) = v_n' - f(x, v_n) = ([f_y']_{\zeta_n} - M(x))\sigma_n \leqslant 0. \tag{12}$$

Докажем теперь сходимость процесса.

Интегрируя (7) с учетом (8) при $n = 1$, получим:

$$\tau_1(x) = \exp\left[-\int_x^\infty M(t)\,dt\right]\int_x^\infty \alpha_0(t)\exp\left[\int_t^\infty M(s)\,ds\right]dt,$$

$$\sigma_1(x) = -\exp\left[-\int_x^\infty M(t)\,dt\right]\int_x^\infty \beta_0(t)\exp\left[\int_t^\infty M(s)\,ds\right]dt.$$

Учитывая, что $\exp\left[-\int_x^\infty M(t)\,dt\right] \leqslant 1$, можем записать:

$$\tau_1(x) \leqslant ae^{\lambda_x}, \quad \sigma_1(x) \leqslant be^{\lambda_x}, \tag{1}$$

где

$$\lambda_x = \int_x^\infty |M(t)|\,dt \leqslant \int_0^\infty |M(t)|\,dt = \lambda,$$

$$a = \int_0^\infty \alpha_0(t)\,dt, \quad b = -\int_0^\infty \beta_0(t)\,dt. \tag{1}$$

Обозначая $|M(x) - m(x)| = \omega(x)$ и учитывая (3), из (12) при $n = 1$ имее

$$\alpha_1(x) \leqslant \omega(x)\,\tau_1(x), \quad -\beta_1(x) \leqslant \omega(x)\,\sigma_1(x). \tag{1}$$

Интегрируя (7) при $n = 2$, можем записать, используя (13) — (15):

$$\tau_2(x) \leqslant ae^{2\lambda_x}\int_x^\infty \omega(t)\,dt, \quad \sigma_2(x) \leqslant be^{2\lambda_x}\int_x^\infty \omega(t)\,dt. \tag{1}$$

При $n = 2$ из (12) по аналогии с (15) имеем:

$$\alpha_2(x) \leqslant \omega(x)\,\tau_2(x), \quad -\beta_2(x) \leqslant \omega(x)\,\sigma_2(x).$$

Интегрируя (7) при $n = 3$ и учитывая последние неравенства, получим:

$$\tau_3(x) \leqslant e^{\lambda_x}\int_x^\infty \omega(t)\,\tau_2(t)\,dt, \quad \sigma_3(x) \leqslant e^{\lambda_x}\int_x^\infty \omega(t)\,\sigma_2(t)\,dt,$$

откуда, используя (16), имеем:

$$\tau_3(x) \leqslant e^{\lambda_x}\int_x^\infty \omega(t)\left(ae^{2\lambda_x}\int_t^\infty \omega(s)\,ds\right)dt =$$

$$= -ae^{3\lambda_x}\int_x^\infty\left(\int_t^\infty \omega(s)\,ds\right)d\left(\int_t^\infty \omega(s)\,ds\right) = ae^{3\lambda_x}\frac{\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^2}{2!}$$

Аналогично,

$$\sigma_3(x) \leqslant be^{3\lambda_x}\frac{\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^2}{2!}.$$

Продолжая этот процесс далее, получим:

$$\tau_n(x) \leqslant ae^{n\lambda_x}\frac{\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \sigma_n(x) \leqslant be^{n\lambda_x}\frac{\left(\int_x^\infty \omega(t)\,dt\right)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что $\{\tau_n\}$ и $\{\sigma_n\}$ при $n \to \infty$ равномерно на $[0, \infty)$ сх дятся к нулю, откуда в силу (6) следует равномерная сходимость аппрокс мирующих последовательнсстей $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$.

Покажем, что обе последовательности сходятся к решению $y(x)$ зада (1). Из (12) имеем:

$$u_n(x) = y_\infty - \int_x^\infty f(t, u_n)\,dt - \int_x^\infty (M(t) - [f_y']_{\xi_n})\,\tau_n(t)\,dt. \tag{1}$$

Заметим, что так как $M(x)-[f'_y]_{\xi_n}$ — суммируема, не зависящая от n, а $\tau_n(x) \rightrightarrows 0$ при $n\to\infty$ на $[0,\infty)$, то

$$\int\limits_x^\infty (M(t)-[f'_y]_{\xi_n})\,\tau_n(t)\,dt \rightrightarrows 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Учитывая это, покажем, что при $n\to\infty$ равенство (18) переходит в тождество

$$\bar{y}(x)=y_\infty-\int\limits_x^\infty f(t,\bar{y})\,dt, \tag{19}$$

в котором $\bar{y}(x)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$.

В самом деле,

$$\left|\int\limits_x^\infty f(t,u_n)\,dt-\int\limits_x^\infty f(t,\bar{y})\,dt\right| \leqslant \int\limits_x^\infty |f(t,u_n)-f(t,y)|\,dt+\int\limits_x^\infty |f(t,u_n)-f(t,\bar{y})|\,dt.$$

В силу равномерной сходимости $\{u_n(x)\}$ к $\bar{y}(x)$ и равномерной непрерывности $f(x,y)$ в замкнутой области $G\,\{0\leqslant x\leqslant x_0,\ u_0\leqslant y\leqslant v_0\}$

$$\int\limits_x^{x_0} |f(t,u_n)-f(t,\bar{y})|\,dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как для всех $x\in[0,\infty)$ и $y\in(-\infty,\infty)$ $|f(x,y)|\leqslant\mu(x)$, то

$$\int\limits_{x_0}^\infty |f(t,u_n)-f(t,y)|\,dt\leqslant 2\int\limits_{x_0}^\infty \mu(x)\,dx\leqslant\frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — любое наперед заданное положительное число.

В связи с произволом ε заключаем, что при $n\to\infty$ (18) переходит в (19). Если под знаком интеграла $\int\limits_x^\infty f(t,\ y)\,dt$ сделать замену $t=\dfrac{1}{z}$, то можно показать, что интегральное равенство (19) эквивалентно задаче (1). В силу единственности решения этой задачи заключаем, что $\bar{y}(x)\equiv y(x)$. Аналогично устанавливается равномерная на $[0,\infty)$ сходимость к $y(x)$ последовательности $\{v_n(x)\}$.

Для оценки погрешности $\delta_n(x)=v_n(x)-u_n(x)$ рассмотрим разность

$$u_m-u_n=\sum_{i=n+1}^{\infty}(u_i-u_{i-1}).$$

Пусть при фиксированном n $m>n$ и $m\to\infty$. Тогда $y-u_n=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}\tau_i$ или в силу (17)

$$y-u_n<ae^{(n+1)\lambda_x}\frac{l_x^n}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{l_x e^{\lambda_x}}{n}\right)^k,$$

где

$$l_x=\int\limits_x^\infty \omega(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^\infty \omega(x)\,dx=l.$$

Аналогично,

$$y - v_n < be^{(n+1)\lambda_x} \frac{l_x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l_x e^{\lambda_x}}{n} \right)^k.$$

и, следовательно,

$$\delta_n(x) = v_n - u_n < ce^{(n+1)\lambda_x} \frac{l_x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{l_x e^{\lambda_x}}{n} \right)^k, \tag{20}$$

где $c = a - b$. Отсюда заключаем, что при любом $x \in [0, \infty)$ и $n \to \infty$ $\delta_n(x) \rightrightarrows 0$. При любом фиксированном x оценка погрешности определяется формулой (20), начиная с $n > l_x e^{\lambda_x}$.

При тех же предположениях относительно $f(x, y), u_0(x)$ и $v_0(x)$, имея n-е приближения $u_n(x)$ и $v_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, полученные в результате интегрирования уравнений

$$u_n' - M_{n-1}(x) \cdot (u_n - u_{n-1}) - f(x, u_{n-1}) = 0; \; v_n' - M_{n-1}(x)(v_n - v_{n-1}) - \\ - f(x, v_{n-1}) = 0 \tag{21}$$

с предельными условиями (11), $n + 1$-е можно находить, решая уравнения

$$u_{n+1}' - M_n(x)(u_{n+1} - u_n) - f(x, u_n) = 0, \; v_{n+1}' - M_n(x)(v_{n+1} - v_n) - \\ - f(x, v_n) = 0, \tag{22}$$

$$u_{n+1}(\infty) = v_{n+1}(\infty) = y_\infty, \text{ где } M_n(x) = \max_{u_n \leqslant y \leqslant v_n} f_y'(x, y), \; x \in [0, \infty).$$

В результате снова получим две последовательности $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, причем для любого n на $[0, \infty)$ нетрудно установить методом математической индукции справедливость соотношений (9) — (11), если учесть, что при $n = 0$ они выполняются в силу теоремы 1. Из (10) и (11) следует, что этот процесс также является сходящимся, причем погрешность n-го приближения не превосходит величины

$$\delta_n(x) = v_n(x) - u_n(x) \geqslant 0, \; \delta_n(\infty) = 0. \tag{23}$$

Из (21) имеем

$$(v_{n+1} - u_{n+1})' = M_n(x)(v_{n+1} - v_n - u_{n+1} + u_n) + f(x, v_n) - f(x, u_n).$$

Отсюда

$$\delta_{n+1}'(x) = M_n(x)(v_{n+1} - u_{n+1}) + ([f_y']_{\bar{y}} - M_n(x))(v_n - u_n),$$

где $[f_y']_{\bar{y}} = f_y'(x, \bar{y})$, $u_n < \bar{y} < v_n$. Обозначая $[f_y']_{\bar{y}} - M_n(x) = \psi_n(x) \leqslant 0$, получим линейное дифференциальное уравнение

$$\delta_{n+1}'(x) - M_n(x)\,\delta_{n+1}(x) - \psi_n(x)\,\delta_n(x) = 0,$$

решая которое с предельными условиями $\delta_{n+1}(\infty) = 0$, имеем

$$\delta_{n+1}(x) = -\exp\left[-\int_x^\infty M_n(t)\,dt\right] \int_x^\infty \exp\left[\int_t^\infty M_n(s)\,ds\right] \psi_n(t)\,\delta_n(t)\,d\tau. \tag{24}$$

Теорема. *Пусть по всем* $x \in [0, \infty), y \in (-\infty, \infty)$ $f(x, y)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а* $f_y'(x, y)$ — *условию Липшица с обобщенной функцией* $K(x)$. *Аппроксимирующие последовательности* $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$, *построенные в результате интегрирования* (21) $(n = 1, 2, \ldots)$, *сходятся к* *абсолютно непрерывному решению $y(x)$ задачи* (1) *равномерно* на $[0, \infty)$, *причем*

$$\delta_n(x) \leqslant c \left[b \int_x^\infty K(t)\, dt \right]^{2^n-1} \leqslant 2c\, 2^{-2^n}, \tag{25}$$

если

$$\delta_0(x) = v_0(x) - u_0(x) \leqslant c = (bL_n)^{-1}, \tag{26}$$

где

$$b = 2 \int_0^\infty K(x)\, dx, \quad L_n = \exp \int_0^\infty M_n(x)\, dx.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{y} \in [u_n, v_n]$ — то значение y, для которого $f'_y(x, y) = M_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $\psi_n(x) = f'_y(x, \bar{y}) - f'_y(x, \tilde{y})$ и в силу (2) $|\psi_n(x)| = |f'_y(x, \bar{y}) - f'_y(x, \tilde{y})| \leqslant K(x) | v_n(x) - u_n(x)|$ или, учитывая (23), $\psi_n(x) \leqslant K(x)\, \delta_n(x)$. Из (24)

$$|\delta_{n+1}(x)| \leqslant \exp \left(\int_0^\infty M_n(x)\, dx \right) \int_x^\infty K(t)\, \delta_n^2(t)\, dt. \tag{27}$$

Справедливость неравенств (25) при любом $n = 1, 2, \ldots$ докажем методом математической индукции. Предположим, что оно выполняется для некоторого n (для $n = 0$ оно справедливо в силу (26)). Тогда из (27), учитывая (25), получим:

$$|\delta_{n+1}(x)| \leqslant L_n \int_x^\infty K(t)\, c^2 \left[b \int_t^\infty K(s)\, ds \right]^{2^{n+1}-2} dt =$$

$$= - L_n c^2 b^{2^{n+1}-2} \int_x^\infty \left(\int_t^\infty K(s)\, ds \right)^{2^{n+1}-2} d \left(\int_t^\infty K(s)\, ds \right) =$$

$$= L_n c^2 b^{2^{n+1}-2} \frac{\left(\int_x^\infty K(t)\, dt \right)^{2^{n+1}-1}}{2^{n+1} - 1}.$$

Таким образом, можем записать:

$$\delta_{n+1}(x) \leqslant L_n \frac{1}{bL_n} c b^{2^{n+1}-2} \left(\int_x^\infty K(t)\, dt \right)^{2^{n+1}-1} =$$

$$= c \left[b \int_x^\infty K(t)\, dt \right]^{2^{n+1}-1} \leqslant \frac{2c}{2^{2^{n+1}}}.$$

Отсюда заключаем, что (25) выполняется при любом n. Теорема доказана.

3°. Перейдем к распространению модификации [6] на задачу (1). Пусть снова $f(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и условию (2). Если найдены абсолютно непрерывные функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$, удовлетворяющие предельным условиям (4) и дифференциальным неравенствам (5) и, следовательно, в силу теоремы 1 $u_0(x) \leqslant y(x) \leqslant v_0(x)$ для всех $x \in [0, \infty)$, то построение нижних и верхних функций $u_n(x)$, $v_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ можно осуществить по формулам (6), в которых $\tau_n(x)$ и $\sigma_n(x)$ являются решениями линейных дифференциальных уравнений

$$\tau_n'(x) - K(x)\tau_n(x) + \alpha_{n-1}(x) = 0, \quad \sigma_n'(x) - K(x)\sigma_n(x) - \beta_{n-1}(x) = 0, \tag{28}$$

удовлетворяющими предельным условиям (8). Здесь $K(x)$ — обобщенная функция Липшица.

Покажем безграничную аппроксимацию $y(x)$ построенными функциями, например, $\{u_n(x)\}$. Обозначая при любом $n = 1, 2, \ldots, y(x) - u_{n-1}(x) = \tau(x)$, получим дифференциальное уравнение относительно $\tau(x)$:

$$\tau'(x) + f(x, u_{n-1}) - f(x, y) + \alpha_{n-1}(x) = 0. \tag{29}$$

Вместо (29) интегрируем первое из уравнений (28) с предельными условиями (8). Получим:

$$\tau_n(x) = \exp\left[-\int_x^\infty K(t)\,\mathrm{d}t\right]\int_x^\infty \alpha_{n-1}(t)\exp\left[\int_t^\infty K(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Подставляя в (29) $\tau_n(x)$ вместо $\tau(x)$ и используя при этом (2), на основании теоремы 1 устанавливаем, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ $\tau_n(x) \leqslant \tau(x)$. Так как $\tau_n(x) \geqslant 0$, то отсюда следует, что $u_n(x) = u_{n-1}(x) + \tau_n(x)$ является улучшенной нижней функцией, т. е. $u_{n-1}(x) \leqslant u_n(x) \leqslant y(x)$, причем в силу того, что

$$\alpha_n(x) = u_n' - f(x, u_n) \leqslant 2K(x)\tau_n(x) \geqslant 0, \tag{31}$$

ее можно принять за исходную для построения $u_{n+1}(x)$ и т. д.

Что касается сходимости процесса, то в результате изложенного получим последовательность нижних функций в виде

$$\{u_n(x)\} = \left\{u_0(x) + \sum_{i=1}^{n}\tau_i(x)\right\}.$$

Покажем, что она равномерно на $[0, \infty)$ сходится к решению $y(x)$, для чего установим равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\tau_i(x)$. Из (30) при $n = 1$, используя (14), можем записать:

$$\tau_1(x) \leqslant ae^{k_x}, \tag{32}$$

где

$$k_x = \int_x^\infty K(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty K(x)\,\mathrm{d}x = k.$$

При $n = 2$, учитывая (31) и (32), получим:

$$\tau_2(x) \leqslant e^{k_x}\int_x^\infty \alpha_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant e^{k_x}\int_x^\infty 2K(t)\tau_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 2ae^{2k_x}\int_x^\infty K(t)\,\mathrm{d}t.$$

При $n = 3$

$$\tau_3(x) \leqslant 2^2ae^{3k_x}\int_x^\infty K(t)\left(\int_t^\infty K(s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,$$

откуда

$$\tau_3(x) \leqslant -2^2ae^{3k_x}\int_x^\infty\left(\int_t^\infty K(s)\,\mathrm{d}s\right)d\left(\int_t^\infty K(s)\,\mathrm{d}s\right) = 2^2ae^{3k_x}\frac{\left(\int\limits_x^\infty K(t)\,\mathrm{d}t\right)^2}{2!}.$$

Продолжая далее, получим:

$$\tau_{n+1}(x) \leqslant 2^n a e^{(n+1)k_x} \frac{\left(\int\limits_x^\infty K(t)\,\mathrm{dt}\right)^n}{n!},$$

откуда следует равномерная на $[0, \infty)$ сходимость исследуемого ряда и, следовательно, $u_n(x) \rightrightarrows \overline{y}(x)$ при $n \to \infty$. Интегрируя тождество $u'_n(x) - f(x, u_n) = \alpha_n(x)$ и учитывая по (31) равномерную на $[0, \infty)$ сходимость к нулю $\{\alpha_n(x)\}$ так же, как и в п. 2°, можно показать, что $\overline{y}(x) \equiv y(x)$. Аналогично п. 2° устанавливается, что при любом $x \in [0, \infty)$ для $n > 2k_x e^{k_x}$

$$\delta_n(x) = v_n - u_n < 2^n c e^{(n+1)k_x} \frac{k_x^n}{n!} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2k_x e^{k_x}}{n}\right)^i.$$

Замечание 1. Как и в случае начальной задачи Коши, можно по известной последовательности нижних (верхних) функций построить последовательность верхних (нижних). Пусть, например, $\{u_n(x)\}$— безгранично аппроксимирующая решение $y(x)$ задачи (1) и равномерно сходящаяся к нему на $[0, \infty)$ последовательность абсолютно непрерывных нижних функций. Построение последовательности верхних функций $\{v_n(x)\}$, обладающей этими же свойствами, можно осуществить по формулам: $v_n = u_{n-1} + \eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где $\eta_n(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\eta'_n + K(x)\eta_n + \alpha_{n-1}(x) = 0, \tag{33}$$

удовлетворяющее предельным условиям: $\eta_n(\infty) = 0$.

Аналогично, имея последовательность $\{v_n(x)\}$, последовательность $\{u_n(x)\}$ строится по формулам: $u_n = v_{n-1} - \eta_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказательство безграничной аппроксимации и сходимости приближений такое же, как и в п. 2°, 3°.

Замечание 2. Из сказанного выше вытекает возможность построения последовательности $\{w_n(x)\}$ чередующихся двусторонних приближений, исходя из одной каким-либо способом найденной начальной нижней или верхней функции, при помощи уравнения (33).

В самом деле, пусть $w_0(x)$ — нижняя функция. Тогда $w_1 = w_0 + \eta_1$— верхняя, $w_2 = w_1 - \eta_2$— нижняя и т. д.

Итак, установлено, что модификации [4—6] метода С. А. Чаплыгина при некоторых видоизменениях, изложенных в п. 1°—3°, можно распространить на предельную задачу Коши. При этом скорость сходимости приближений характерна скорости в соответствующих модификациях для начальной задачи Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин, Собрание сочинений, т. I, ОГИЗ, М., 1948.
2. Н. Н. Лузин, О методе приближенного интегрирования С. А. Чаплыгина, Труды ЦАГИ, вып. 141, 1932.
3. В. М. Мусаев, С. М. Сардарлы, Применение метода С. А. Чаплыгина к предельной задаче Коши, сб. Вопросы вычислительной математики, АН АзербССР, 1967.
4. Б. Н. Бабкин, Об одной модификации метода академика С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования, ДАН СССР, т. 67, № 2, 1949.
5. Б. А. Вертгейм, О скорости сходимости приближений в методе академика С. А. Чаплыгина и в модификациях этого метода, Научн. тр. Пермского горного ин-та, № 1, 1956.

6. В. Б. Балакин, Двусторонние приближения к решению уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$, УМЖ, т. XI, № 2, 1959.
7. Я. Д. Мамедов, Односторонние оценки в условиях существования и единственности решений предельной задачи Коши в банаховом пространстве, Сиб. матем. ж., т. VI, № 5, 1965.

Поступила 5.V 1970 г.
Днепропетровский государственный университет