УДК 517.949.8

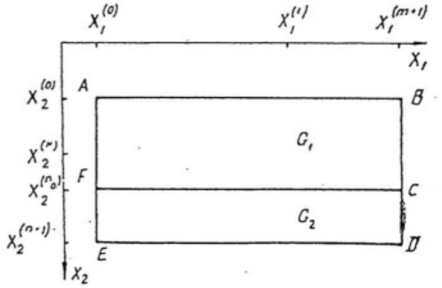
Решение в конечноразностной постановке граничных задач для одного уравнения эллиптического типа

И. М. Великоиваненко, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий

Вступление. Данная работа посвящена численно-аналитическому решению краевых задач для уравнения эллиптического типа без смешанных производных в некоторых канонических неоднородных областях при условиях 1, 2 и 3-го рода на различных участках границы. На примере одной из них дан вывод дискретного решения по методу суммарных представлений [1].

При построении разностной схемы используется метод баланса Тихонова — Самарского [2]. Аппроксимация дифференциальной задачи выполнена на обычном пятиточечном шаблоне.

1. Основные обозначения. Пусть x — переменная точка в плоскости x_1, x_2; G_1 (прямоугольник $ABCF$ с границей V_1) и G_2 (прямоугольник $CDEF$ с границей V_2) — области заданных размеров. Покрываем $G = G_1 \bigcup G_2$ сетью Ω с шагами h, $h_1 = \mathrm{const} > 0$ (рисунок): $x_1^{(i)} = x_1^{(0)} + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, m+1)$, $x_2^{(k)} = x_2^{(0)} + kh_1$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$, $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ — известная точка, $h/h_1 = \gamma$.



Множество внутренних узлов G_1 и G_2, т. е. узлы Ω, принадлежащие $G \diagdown (V_1 \bigcup V_2)$, обозначим через W; узлы с координатами $(x_1^{(1)}, x_2^{(n_0)})$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(n_0)}), \ldots$ $\ldots, (x_1^{(m)}, x_2^{(n_0)})$ — через w; все остальные узлы G отнесем к граничным V и обозначим: на AB (граница v_1) — Γ_1, на BD (граница v_2) без узла $(x_1^{(m+1)}, x_2^{(0)})$ — Γ_2, на DE (граница v_3) без узлов $(x_1^{(0)}, x_2^{(n+1)})$, $(x_1^{(m+1)}, x_2^{(n+1)})$ — Γ_3, на AE (граница v_4) без узла $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ — Γ_4.

Под $u_{i,k}$, $f_{i,k}$ понимаем значения функций $u(x)$, $f(x)$ в точке пересечения i-й вертикальной и k-й горизонтальной линий сети; под $\chi^{(i)}$, $\chi_1^{(i)}$, $\sigma^{(k)}$, $\theta^{(k)}$, $\theta_1^{(k)}$ — значения функций $\chi_1(x_1)$, $\chi_2(x_1)$, $\sigma(x_2)$, $\theta_1(x_2)$, $\theta_2(x_2)$ в узлах, принадлежащих их области определения; под $\beta^{(k)}$, $\tau^{(k)}$ — значения функций $\beta(x_2)$ и $\tau(x_2) = \dfrac{h^2}{2\beta(x_2)}[\tau_1(x_2) + \tau_2(x_2)]$ в узлах отрезков прямых $x_2 = x_2^{(k)}$, лежащих в G, причем

$$f_{i,n_0} = \frac{f^+(x_1^{(i)}, x_2^{(n_0)}) + f^-(x_1^{(i)}, x_2^{(n_0)})}{2}, \quad f_{i,n+1} = f^+(x_1^{(i)}, x_2^{(n+1)}),$$

$$\tau^{(n_0)} = \frac{\tau^+(x_2^{(n_0)}) + \tau^-(x_2^{(n_0)})}{2}, \quad \tau^{(n+1)} = \tau^+(x_2^{(n+1)}),$$

$$\beta^{(n_0)} = \frac{\beta^+(x_2^{(n_0)}) + \beta^-(x_2^{(n_0)})}{2}, \quad \beta^{(n+1)} = \beta^+(x_2^{(n+1)}).$$

Знаки «+» и «—» вверху около символа функции указывают, что берутся соответственно ее предельные значения в точках горизонтальной линии сети Ω при подходе к ним сверху и снизу.

Введем оператор

$$A_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\beta(x_2)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right] - \tau_\alpha(x_2) \quad (\alpha = 1, 2), \tag{1}$$

где

$$\beta(x_2) = \beta_\alpha = \text{const} > 0, \quad x \in G_\alpha \setminus V_\alpha,$$
$$(\alpha = 1, 2)$$
$$\tau_\alpha(x_2), \quad x \in G \setminus (V_1 \cup V_2)$$

— известные функции (если под $C_q^{(r)}$ понимать пространство функций, имеющих в области определения r по x_1 и q по x_2 непрерывных производных, то $\tau_\alpha(x_2)$ может принадлежать, например, $C_0^{(0)}$ и быть даже кусочно-непрерывной с конечным числом разрывов 1-го рода в G) и разностные операторы $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, действующие на произвольную функцию дискретного аргумента $y = y(i, k)$:

$$\mathfrak{L}y = y(i+1, k) - 2(1 + \tau^{(k)})\, y(i, k) + y(i-1, k),$$
$$\mathfrak{M}y = y(i, k-1) - 2y(i, k) + y(i, k+1)^*.$$

Символом $\|\cdot\|$ обозначается норма вектора, значок $\wedge$ определяет трансформацию, смысл которой пояснен ниже.

Пусть далее β_0, β', β'' соответственно величины $(\beta_1 - \beta_2)/(\beta_1 + \beta_2)$, $2\beta_1/(\beta_1 + \beta_2)$, $2\beta_2/(\beta_1 + \beta_2)$;

$$\vec{u}^{(i)} = (u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n+1}), \quad \vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n+1}),$$

$$\vec{\Phi}^{(i)} = (\varphi_{i,1} - \gamma^2\chi^{(i)}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,3}, \ldots, \varphi_{i,n}, \varphi_{i,n+1} + 2\gamma h \chi_1^{(i)}),$$

$$\vec{\Theta} = (\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \ldots, \theta^{(n+1)}), \quad \vec{\Theta}_1 = (\theta_1^{(1)}, \theta_1^{(2)}, \ldots, \theta_1^{(n+1)})$$

— векторы с $(n+1)$-й компонентами, причем

$$\varphi_{i,k} = \frac{h^2 f_{i,k}}{\beta^{(k)}}, \quad x \in W \cup w \cup \Gamma_3,$$

а $\vec{\psi}$ — искомое решение вспомогательной конечноразностной задачи; $Q = (Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1})$, $\vec{R} = (R_1, R_2, \ldots, R_{n+1})$ — векторы произвольных постоянных T — $(n+1)$-мерная трехдиагональная матрица:

---

* Если $y = y(i, k)$ — вектор, то операторы $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{M}$ действуют на каждую из его компонент.

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & & O & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & & & \\ & & & \ldots & & & & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & & & \beta' & -2 & \beta'' & & & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & O & & & & & & \ldots & & \\ & & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1\\1\\1\\1\\1\\1 \end{matrix}}\right\} n_0 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}; \qquad (2)$$

$\varrho, \tilde{\varrho}, t, \eta$ — диагональные матрицы с элементами $\varrho_k = \{\beta^{(k)} - k = 1, 2, \ldots, n;$ $\beta_2/2 - k = n+1\}$, $\tilde{\varrho}_k = \{\sqrt{\varrho_k} - k = 1, 2, \ldots, n+1\}$, $t_k = \{(\sigma^{(k)} - 1) - k = 1, 2, \ldots, n+1\}$, $\eta_k = \{[1 + \gamma^2(1 - \cos\omega_k) + \tau^{(k)}] - k = 1, 2, \ldots, n+1\}$ где ω_k — корни тригонометрического уравнения, которое вводится в рассмотрение дальнейшими рассуждениями, причем

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \cos\omega_k = \overline{\xi}, \quad \min_{1 \leqslant k \leqslant n+1} \cos\omega_k = \underline{\xi};$$

I — единичная $(n+1)$-мерная матрица; любые из выражений $\mu_1(\nu, t)$, $\mu_2(\nu)$ $\mu_3(\zeta)$ — следующие диагональные матрицы:

$$[\mu_1(\nu_k, t_k)]_1^{n+1}, \quad [\mu_2(\nu_k)]_1^{n+1}, \quad [\mu_3(\zeta_k)]_1^{n+1}; \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}, \quad \zeta_k = $$

$$= \arccos\eta_k;$$

$$\vec{Q}^{(i)} = \nu^{-i}\vec{Q}, \quad \vec{R}^{(i)} = \nu^i\vec{R}, \quad \vec{S}^{(i)} = \sum_{l=1}^{m} \frac{\nu^{|i-l|+1}}{\nu^2 - 1} \vec{\hat{\Phi}}^{(l)},$$

$$\vec{Q}'^{(i)} = \vec{Q}^{(i)}, \quad \vec{R}'^{(i)} = i\nu^{-i}\vec{R}, \quad \vec{S}'^{(i)} = \sum_{l=1}^{i-1} (i-l)\,\nu^{l-i+1}\vec{\hat{\Phi}}^{(l)}, \qquad (3)$$

$$\vec{Q}''^{(i)} = \cos i\zeta \cdot \vec{Q}, \quad \vec{R}''^{(i)} = \sin i\zeta \cdot \vec{R}, \quad \vec{S}''^{(i)} = \sum_{l=1}^{i-1} \frac{\sin(i-l)\zeta}{\sin\zeta} \vec{\hat{\Phi}}^{(l)} \quad (i = 0, 1, \ldots, m+1)$$

— переменные векторы и $\vec{S}'^{(0)} = \vec{S}'^{(1)} = \vec{S}''^{(0)} = \vec{S}''^{(1)} = \vec{0}$ ($\vec{0}$ — $(n+1)$-мерный нуль-вектор);

$$\vec{\Psi}_1 = \frac{1 + \nu t}{1 - \nu^2} \sum_{l=1}^{m} \nu^l \vec{\hat{\Phi}}^{(l)}, \quad \vec{\Psi}_2 = \frac{\nu^{m+2}}{1 - \nu^2} \sum_{l=1}^{m} \nu^{-l} \vec{\hat{\Phi}}^{(l)}. \qquad (4)$$

2. Постановка и аппроксимация задачи. Требуется найти функцию $u(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$Au = \sum_{\alpha=1}^{2} A_\alpha u(x) = f(x), \quad x \in G \setminus (V_1 \cup V_2), \qquad (5)$$

условиям сопряжения

$$\beta_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^+ = \beta_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^-, \qquad x \in V_1 \cap V_2 \tag{6}$$
$$u^+ = u^-,$$

и краевым условиям

$$u = \chi_1(x_1), \quad x \in v_1; \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \chi_2(x_1), \; x \in v_3; \tag{7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \sigma(x_2)\, u = \theta_1(x_2), \; x \in v_4; \quad u = \theta_2(x_2), \quad x \in v_2. \tag{8}$$

Так как эта задача описывает какой-то вполне определенный физический процесс в неоднородной среде, то при построении разностной схемы естественно исходить из соответствующего закона сохранения (уравнения баланса). Используя интегро-интерполяционный метод [2], запишем задачу (5)—(8) в конечных разностях:

$$u_{i,0} = \chi^{(i)}, \quad x \in \Gamma_1, \tag{9}$$

$$\mathfrak{L} u_{i,k} + \gamma^2 \mathfrak{M} u_{i,k} = \varphi_{i,k}, \quad x \in W, \tag{10}$$

$$\mathfrak{L} u_{i,n_0} + \gamma^2 (\beta' u_{i,n_0-1} - 2u_{i,n_0} \mp \beta'' u_{i,n_0+1}) = \varphi_{i,n_0}, \quad x \in w, \tag{11}$$

$$\mathfrak{L} u_{i,n+1} + 2\gamma^2 (u_{i,n} - u_{i,n+1}) = \varphi_{i,n+1} + 2\gamma h \chi_1^{(i)}, \quad x \in \Gamma_3, \tag{12}$$

$$u_{1,k} + t_k u_{0,k} = \theta^{(k)}, \quad x \in \Gamma_4, \tag{13}$$

$$u_{m+1,k} = \theta_1^{(k)}, \quad x \in \Gamma_2. \tag{14}$$

Условия (9), (14) дают точные значения u в граничных узлах, уравнения (10)—(12) аппроксимируют дифференциальную задачу в соответствующих узлах с порядком $O(h^2 + h_1^2)$ в пространстве $C_q^{(r)}(r, \; q \geqslant 4)$, условие (13) с первым порядком аппроксимирует граничное значение (8) на v_4 в пространстве $C_q^{(r)}(r, \; q \geqslant 2)$.

3. Об исследовании вспомогательной матрицы. Рассмотрим систему конечноразностных уравнений

$$\mathfrak{M}\psi_k - \lambda\psi_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1, \; n_0 + 1, \; n_0 + 2, \ldots, n),$$
$$\beta'\psi_{n_0-1} - (\lambda + 2)\,\psi_{n_0} + \beta''\psi_{n_0+1} = 0, \tag{15}$$
$$2\psi_n - (\lambda + 2)\,\psi_{n+1} = 0, \quad \psi_0 = 0,$$

которая представима с помощью матрицы T в виде

$$(\mathrm{T} - \lambda I)\vec{\psi} = \vec{0}. \tag{16}$$

Домножим равенство (16) на матрицу ρ слева и тогда, как известно [1], собственные числа и собственные векторы полученной самосопряженной задачи будут совпадать с собственными числами

$$\lambda_j = 2(\cos\omega_j - 1)$$

и собственными ортонормированными векторами матрицы T

$$\vec{P}_j = (p_{ij})_{i=1}^{n+1} = N_j\,(\sin\omega_j, \; \sin 2\omega_j, \ldots, \sin n_0\omega_j, \quad K_j \cos(n - n_0)\,\omega_j,$$
$$K_j \cos(n - n_0 - 1)\,\omega_j, \ldots, K_j \cos\omega_j, \; K_j),$$

$$N_j = \|\widetilde{\varrho \vec{P}_j}\|^{-1}, \quad K_j = \sin n_0 \omega_j [\cos(n - n_0 + 1)\omega_j]^{-1}*,$$

где $j = 1, 2, \ldots, n+1$, а ω_j — корни уравнения

$$\cos(n+1)\omega + \beta_0 \cos(n - 2n_0 + 1)\omega = 0 \ (0 < \omega < \pi). \tag{17}$$

Так как $|\beta_0| < 1$, $1 \leqslant n_0 \leqslant n$, то в $(0, \pi)$ расположено $n+1$ корней уравнения (17) и притом они все различны.

Для фундаментальной матрицы P размерности $(n+1) \times (n+1)$ со столбцами $\vec{P}_j$, транспонированной по отношению к ней матрицы P^*, диагональной матрицы собственных чисел $\Lambda = [\lambda_k]_1^{n+1}$, матриц ϱ и T выполняются соотношения

$$P^* \varrho P = I, \ \ \mathrm{T} = P \Lambda P^* \varrho, \tag{18}$$

причем $P^* \varrho = P^{-1}$. Произведением матрицы P^{-1} и произвольного вектора $\vec{H} = (H_k)_1^{n+1}$ определяется P^{-1}-трансформация этого вектора, т. е.

$$\vec{\hat{H}} = P^{-1} \vec{H} = (\hat{H}_k)_1^{n+1}.$$

Аналогичные рассуждения при построении фундаментальной матрицы и нахождении собственных значений матрицы, сходной с Т, в более подробном виде можно найти в работе [3].

4. Вывод дискретного решения исследуемой задачи. В векторной форме конечноразностная задача (9)—(14) записывается в виде

$$\mathfrak{L} \vec{u}^{(i)} + \gamma^2 \mathrm{T} \vec{u}^{(i)} = \vec{\Phi}^{(i)}, \tag{19}$$

$$\vec{u}^{(1)} + t \vec{u}^{(0)} = \vec{\Theta}, \tag{20}$$

$$\vec{u}^{(m+1)} = \vec{\Theta}_1. \tag{21}$$

Умножим уравнение (19) на P^{-1} слева, тогда

$$\mathfrak{L} \vec{\hat{u}}^{(i)} + \gamma^2 \Lambda \vec{\hat{u}}^{(i)} = \vec{\hat{\Phi}}^{(i)}. \tag{22}$$

Расписывая оператор $\mathfrak{L}$, находим

$$\vec{\hat{u}}^{(i+1)} - 2\eta \vec{\hat{u}}^{(i)} + \vec{\hat{u}}^{(i-1)} = \vec{\hat{\Phi}}^{(i)}. \tag{23}$$

Очевидно, что при

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \tau_\alpha (x_2) < -2\beta(x_2) \left[\frac{1}{h_1^2} (1 - \underline{\xi}) + \frac{2}{h^2} \right] = a_1(x_2), \tag{24}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \tau_\alpha (x_2) > -\frac{2\beta(x_2)}{h_1^2} (1 - \overline{\xi}) = a_2(x_2); \tag{25}$$

$|\eta_k| > 1$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n+1$ и, следовательно,

$$\vec{\hat{u}}^{(i)} = \vec{Q}^{(i)} + \vec{R}^{(i)} + \vec{S}^{(i)} \tag{26}$$

---

* Если $\cos(n - n_0 + 1)\omega_j = 0$, то и $\sin n_0 \omega_j = 0$, а коэффициент K_j следует положить равным $\dfrac{n_0 \cos n_0 \omega_j}{(n_0 - n - 1) \sin(n - n_0 + 1)\omega_j}$.

или

$$\vec{u}^{(i)} = P\,(\vec{Q}^{(i)} + \vec{R}^{(i)} + \vec{S}^{(i)}). \tag{27}$$

Это же справедливо и при более сильных оценках:

$$\tau^{(k)} < -2 + \gamma^2(\cos\omega_k - 1) = b_k, \tag{28}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\tau^{(k)} > -\gamma^2(1 - \cos\omega_k) = b_k' \tag{29}$$

Учитывая равенства (3), (20), (21), запишем систему уравнений для определения векторов произвольных постоянных:

$$\begin{gathered}(\nu^{-1} + t)\vec{Q} + (\nu + t)\vec{R} = \vec{\Psi}_1 + \vec{\Theta},\\ \nu^{-m-1}\vec{Q} + \nu^{m+1}\vec{R} = \vec{\Psi}_2 + \vec{\Theta}_1,\end{gathered} \tag{30}$$

откуда

$$\begin{gathered}\vec{Q} = \frac{\nu^{m+1}(\vec{\Psi}_1 + \vec{\Theta}) - (\nu + t)(\vec{\Psi}_2 + \vec{\Theta}_1)}{\nu^{m+1}(\nu^{-1} + t) - \nu^{-m-1}(\nu + t)},\\ \vec{R} = \frac{\nu^{-m-1}(\vec{\Psi}_1 + \vec{\Theta}) - (\nu^{-1} + t)(\vec{\Psi}_2 + \vec{\Theta}_1)}{\nu^{-m-1}(\nu + t) - \nu^{m+1}(\nu^{-1} + t)}.\end{gathered} \tag{31}$$

Подставляя значения $\vec{Q}$ и $\vec{R}$ в выражение (27), получаем

$$\vec{u}^{(i)} = P\left\{\frac{(\nu^{m+1-i} - \nu^{i-m-1})(\vec{\Psi}_1 + \vec{\Theta}) - [\nu^{-1}(\nu + t) - \nu^{i}(\nu^{-1} + t)]\,(\vec{\Psi}_2 + \vec{\Theta}_1)}{\nu^{m+1}(\nu^{-1} + t) - \nu^{-m-1}(\nu + t)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{m} \frac{\nu^{|i-l|+1}}{\nu^2 - 1}\hat{\vec{\Phi}}^{(l)}\right\} \tag{32}$$

и, таким образом, $u_{i,k}$ известно в каждой точке x сеточного множества $W \cup w \cup V$.

Если любая из оценок (28), (29) достигается, то

$$\hat{\vec{u}}^{(i)} = \vec{Q}'^{(i)} + \vec{R}'^{(i)} + \vec{S}'^{(i)}. \tag{33}$$

При

$$a_1(x_2) < \sum_{\alpha=1}^{2} \tau_\alpha(x_2) < a_2(x_2) \tag{34}$$

или более сильном неравенстве

$$b_k < \tau^{(k)} < b_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{35}$$

имеем

$$\hat{\vec{u}}^{(i)} = \vec{Q}''^{(i)} + \vec{R}''^{(i)} + \vec{S}''^{(i)}. \tag{36}$$

После того как получено общее решение уравнения (23) в одной из форм (33), (36), нахождение дискретного решения задачи (19)—(21) проводится по той же схеме, что и в случае оценок (24), (25), (28), (29).

Функции $\tau_\alpha(x_2)$ могут быть такими, что значения $\tau^{(k)}$ делают величину $|\eta_k|$ больше, меньше или равной единице для различных k. Тогда необходимо отыскивать $\hat{u}_{i,k}$ в зависимости от абсолютной величины η_k по формулам (26), (33), (36), расписанным в скалярной форме. Затем, объединяя полученные значения в векторы и совершая P-трансформацию последних, найдем общее решение уравнения (19). Векторы произвольных постоянных определяются подобным изложенному выше образом.

Заключение и замечания. В данной работе рассмотрена задача, допускающая типичное решение с помощью предлагаемой методики. Для произвольной комбинации условий 1-го и 2-го рода на горизонтальных участках и условий 1, 2 и 3-го рода на вертикальных участках границы области отыскание дискретного решения краевой задачи (5)—(8) численно-аналитическим методом Г. Н. Положего проводится аналогичным путем. При этом в рассуждениях лишь незначительно меняется вид матрицы T и векторов $\vec{Q}$, $\vec{R}$.

Почти во всех случаях решения рассматриваемых задач можно распространить на неоднородные полосу (точки A, E на рисунке удалены на $-\infty$, точки B, D — на $+\infty$) и полуполосу (на рисунке точки B, D находятся на $+\infty$), причем, если отыскивается решение в полосе, ограниченное при подходе к $\pm\infty$, то $\vec{Q} = \vec{R} \equiv \vec{0}$; если ищется решение, ограниченное в правой полуполосе, то $\vec{Q} \equiv \vec{0}$.

Легко проверить, что при $\beta(x_2) \equiv 1, \tau_\alpha(x_2) \equiv 0$ $(\alpha = 1, 2)$ общее решение уравнения (19) совпадает с известным в литературе для этого варианта.

Если область G состоит из большего чем два числа прямоугольников, идея вывода дискретного решения анализируемых задач сохраняется. То же можно сказать и об обобщении исследований предлагаемой заметки, на трехмерный случай.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Изд-во КГУ, К., 1962.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Об однородных разностных схемах, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 1, № 1, 1961.
3. И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, Г. Е. Мистецкий, О численно-аналитическом решении некоторых краевых задач для уравнения div ($\varkappa$ grad φ) $= F$ при кусочно-постоянном $\varkappa$, УМЖ, т. 21, № 4, 1969.

Поступила 20.III 1970 г.
Киевский государственный университет