УДК 512.25:517:513.88

Об одном способе построения нормальных в смысле А. Н. Тихонова решений систем линейных уравнений

В. К. Дзядык

1°. Рассмотрим совместную систему r линейных алгебраических уравнений с n неизвестными x_k вида

$$AX = B, \tag{1}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{r1} \ldots a_{rn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Решение системы (1), вообще говоря, неоднозначно. Поэтому возникает задача найти такое решение X° этой системы, которое по сравнению со всеми другими ее решениями имеет минимальную норму. Такое решение, следуя А. Н. Тихонову, будем называть нормальным решением системы (1).

В работах [1 и 2] А. Н. Тихонов показал, что задача о нахождении нормального решения системы (1) является, вообще говоря, некорректной в смысле Адамара и, пользуясь развитым им методом регуляризации функциональных уравнений I рода [3—5], построил устойчивый алгоритм для нахождения нормальных решений таких систем.

В данной статье, во-первых, приводится один критерий совместности системы уравнений вида (1), во-вторых, дается простой эффективный способ для разыскания нормального решения этой системы и его нормы и, в-третьих, указаны применения полученных результатов для нахождения полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, в любом унитарном пространстве при произвольных линейных связях на его коэффициенты.

Нам потребуются следующие определения.

Обозначим через A^* матрицу, сопряженную к матрице A:

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{a}_{1n} & \cdots & \bar{a}_{rn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

При этом определении множество одностолбцовых матриц A, состоящих из одного и того же количества элементов, превращается в унитарное пространство, если мы введем в нем скалярное произведение по формуле

$$(A, A') = |A^*A'| = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k a'_k, \qquad A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где через $|A^*A'|$ обозначен детерминант одноэлементной матрицы A^*A'. В силу этого мы одностолбцовые матрицы будем еще называть векторами и положим $\|A\|^2 = (A, A) = |A^*A|$. Кроме матриц A, A^*, B и X, нам потребуются еще матрицы

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}, \qquad A_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn}),$$

$$A_j^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{j1} \\ \vdots \\ \bar{a}_{jn} \end{pmatrix}, \qquad b_i = (b_i) \text{ и } D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. а) *Для того чтобы система линейных уравнений вида*

$$AX = B \tag{6}$$

была разрешимой относительно X, необходимо и достаточно, чтобы была разрешимой относительно Y система уравнений вида

$$AA^*Y = B. \tag{7}$$

б) *Если система* (6) *разрешима, то:*

i) *нормальное решение X^0 этой системы может быть вычислено при помощи произвольного решения Y системы* (7) *по формуле*

$$X^0 = A^*Y; \tag{8}$$

ii) *норма решения X^0 выражается через Y по формуле*

$$\| X^0 \|^2 = \sum_1^r \overline{y}_k b_k = (Y, B); \tag{9}$$

iii) *решение X^0 является единственным.*

Доказательство. а) Если система (6) разрешима и ее решение X представимо в виде

$$X = A^*C = \sum_{j=1}^r c_j A_j^*, \tag{10}$$

то тогда в силу (6) $AA^*C = AX = B$ и, следовательно, система (7) разрешима.

Чтобы убедиться в общем случае, что из разрешимости системы (6) следует разрешимость системы (7), мы покажем, что если некоторый вектор X, являясь решением системы (6) так, что

$$A_j X = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{11}$$

не представим в виде (10), то тогда вектор $X^* = \sum\limits_{j=1}^r a_j^* A_j^*$, коэффициенты a_j^* которого определяются из условия

$$\| X - X^* \|^2 = \inf_{a_j} \left\| X - \sum_{j=1}^r a_j A_j^* \right\|^2 \tag{12}$$

(т. е. X^* является среди векторов вида (10) вектором наилучшего приближения вектора X) также будет служить решением системы (6), поскольку это решение имеет вид (10), то отсюда, как мы видели, и будет следовать разрешимость системы (7).

Действительно, из предположения от противного, что X^* не является решением системы (6) следует, что при каком-нибудь j имеет место неравенство $A_j X^* = b_j' \neq b_j$, в силу чего мы, положив $\| A_j^* \|^2 = s_j$ и учитывая (11) и равенство $A_j^{**} = A_j$, получаем

$$\left\| X - \left(X^* + \frac{\overline{b_j - b_j'}}{s_j} A_j^* \right) \right\|^2 = \left(X - X^* - \frac{\overline{b_j - b_j'}}{s_j} A_j^*, \right.$$

$$\left. X - X^* - \frac{\overline{b_j - b_j'}}{s_j} A_j^* \right) = \| X - X^* \|^2 - 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\overline{b_j - b_j'}}{s_j} A_j^{**} (X - X^*) \right\} +$$

$$+ \frac{| b_j - b_j' |^2}{s_j^2} s_j = \| X - X^* \| - \frac{| b_j - b_j' |^2}{s_j} < \| X - X^* \|^2,$$

т. е. мы видим, что вектор $X^* + \frac{\overline{b_j - b_j'}}{s_j} A_j^*$ вида (10) приближает вектор X лучше, чем вектор X^*, и этим приходим в противоречие с условием (12).

Наоборот, если система (7) разрешима и некоторый вектор Y^0 удовлетворяет этой системе, то тогда вектор $A^* Y^0$ будет удовлетворять уравнению (6), т. е. система (6) также является разрешимой.

б) Обозначим через Y какое-нибудь решение системы (7) (такое решение ввиду разрешимости системы (6) существует вследствие утверждения а)) и положим $X^0 = A^* Y$. Тогда, учитывая, что скалярное произведение X^0 на любое другое решение X системы (6) удовлетворяет условию

$$(X^0, X) = |(A^*Y)^*X| = |Y^*AX| =$$
$$= |Y^*B| = (Y, B) = \text{const} = (X^0, X^0) = \| X^0 \|^2, \tag{13}$$
получим
$$\| X - X^0 \|^2 = (X - X^0, X - X^0) =$$
$$= \| X \|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(X^0, X) + \| X^0 \|^2 = \| X \|^2 - \| X^0 \|^2. \tag{14}$$
Из равенств (14) и (13) следует, что:

i) решение X^0, вычисленное по формуле (8) по сравнению со всеми другими решениями системы (6), имеет минимальную норму, т. е. является нормальным;

ii) норма X^0 в силу (13) может быть вычислена по формуле (9) и

iii) нормальное решение является единственным, ибо в силу (14) из равенства $\| X_1^0 \| = \| X^0 \|$ следует, что $\| X_1^0 - X^0 \| = 0$, т. е. что $X_1^0 = X^0$.

Этим теорема доказана.

Заметим в заключение, что единственность нормального решения из других соображений очень просто установлена в [1 и 2].

2°. Покажем, что теорема 1 дает возможность очень просто установить следующую теорему Фредгольма.

Теорема 2 (альтернатива Фредгольма для линейных систем). *Для того чтобы система уравнений*
$$A^*Y = D \tag{15}$$
была совместной, необходимо и достаточно, чтобы вектор D был ортогональный к любому решению X однородной системы
$$AX = 0, \tag{16}$$
т. е. чтобы выполнялось условие
$$D \perp N_x, \tag{17}$$
где $N_x = \{X : AX = 0\}$ — множество нулей системы (16).

Необходимость. Пусть система (15) разрешима и Y^0— какое-нибудь ее решение. Положим $AA^*Y^0 = AD = B$ и обозначим через X^0 нормальное решение совместной системы $AX = B$. В силу формулы (8) из теоремы 1 следует $X^0 = A^*Y^0 = D$ и так как X^0 среди всех решений уравнения $AX = B$ имеет минимальную норму, то
$$\| X^0 \| = \| X^0 - 0 \| = \min_{x \in N_x} \| X^0 - X \|,$$
значит (см., например, [6, стр. 23]), $X^0 \perp N_x$ и, следовательно, $D \perp N_x$.

Достаточность. Если $D \perp N_x$, то, полагая $AD = B$ видим, что система $AX = B$ совместна и что среди всех решений этой системы вектор D в силу условия (17) имеет минимальную норму, так что $D = X^0$. Поэтому в силу утверждения а) теоремы 1 совместна также система $AA^*Y = B$ и если Y^0 — какое-нибудь решение этой системы, то $D = X^0 = A^*Y^0$, а это означает, что система (15) совместна.

Замечание. Убедимся, что, в свою очередь, при помощи теоремы 2 можно легко получить утверждение а) теоремы 1.

Действительно, из предположения, что система (6) разрешима и что X^0— нормальное решение этой системы (существование такого решения следует из того, что решения X системы (6) содержатся в конечномерном пространстве R^n) следует, как мы видели, что $X^0 \perp N_x$. Отсюда же в силу теоремы 2 вытекает, что разрешимым является уравнение $A^*Y = X^0$, а, значит, также и уравнение $AA^*Y = AX^0 = B$, что и требовалось доказать.

3°. В следующей ниже теореме мы убедимся, что задача о разыскании полинома, наименее уклоняющегося от нуля, в самой общей постановке совершенно просто решается в любом унитарном пространстве H. Чтобы сформулировать эту теорему мы перефразируем данную задачу следующим образом.

Пусть в унитарном пространстве H заданы система из ортогональных векторов

$$e_1, e_2, \ldots, e_n$$

и r линейных функционалов $L_1, L_2, \ldots, L_r$ и пусть, кроме того, задано r, вообще говоря, комплексных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_r$. Требуется в множестве E_n тех элементов X вида

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \tag{18}$$

которые удовлетворяют r связям

$$L_j X = \sum_{k=1}^{n} x_k L_j(e_k) = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{19}$$

найти элемент X^0 с наименьшей в H нормой, т. е. требуется среди элементов $X \in E_n$ вида (18), удовлетворяющих связям (19), найти элемент (полином), наименее уклоняющийся от нуля.

Заметим, что если положить $L_j(e_k) = a_{jk}$, то условия (19) сразу сводятся к виду (6) или (11). В силу этого мы точно так же, как и в теореме 1, убеждаемся, что имеет место следующая теорема о полиномах, наименее уклоняющихся от нуля в унитарном пространстве.

Т е о р е м а 3. *Если связи* (19) *совместны, то*

i) *элемент* $X^0 \in E_n$ (*удовлетворяющий этим связям*) *с минимальной в H нормой вычисляется по формуле*

$$X^0 = A^* Y = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} \overline{a}_{jk} y_j \right) e_k, \tag{8'}$$

где через Y обозначено какое-нибудь решение системы $AA^*Y = B$;

ii) *норма решения X^0 выражается при помощи Y по формуле*

$$\| X^0 \|^2 = \sum_{k=1}^{r} \overline{y}_k b_k = (B, Y) \tag{9'}$$

iii) *решение X^0 является единственным.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Н. Т и х о н о в, О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения, ДАН СССР, т. 163, № 3, 1965.
2. А. Н. Т и х о н о в, Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 5, № 4, 1965.
3. А. Н. Т и х о н о в, Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации, ДАН СССР, т. 151, № 3, 1963.
4. А. Н. Т и х о н о в, О регуляризации некорректно поставленных задач, ДАН СССР, т. 153, № 1, 1963.
5. А. Н. Т и х о н о в, О нелинейных уравнениях первого рода, ДАН СССР, т. 161, № 5, 1965.
6. Н. И. А х и е з е р, Лекции по теории аппроксимации, «Наука», М., 1965.

Поступила 4.VI 1969 г.

Институт математики АН УССР