УДК 513.88.513.83

О слабой сходимости в пространствах Орлича

Б. Д. Котляр

1°. С. Банахом и С. Мазуром [1] получен следующий результат: если последовательность $\{x_k\}$ слабо сходится к 0 в L^p, $1 < p \leqslant 2$ (в l^p, $p > 1$), то существует подпоследовательность $\{x_{i_k}\}$ такая, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} \right\| = O\left(n^{\frac{1}{p}}\right).$$

Ниже получено обобщение этого результата на пространства Орлича.

Пусть φ — функция, заданная на R; рассмотрим следующие условия:

1) φ — выпуклая (книзу) функция;

2) $\varphi(-u) = \varphi(u)$;

3) $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\varphi(u)}{u} = 0$;

4) $\lim\limits_{u\to +\infty} \dfrac{\varphi(u)}{u} = +\infty$;

5) $\overline{\lim\limits_{u\to +\infty}} \dfrac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < +\infty$;

5′) $\overline{\lim\limits_{u\to 0}} \dfrac{\varphi(2u)}{\varphi(u)} < +\infty$;

6) φ'' задана и не возрастает на $(0, +\infty)$.

Из 1) и 6) вытекает неотрицательность φ'', а из 1), 6) и 4) — ее положительность на $(0, +\infty)$.

Функция φ, удовлетворяющая условиям 1) —5), задает банахово пространство L_φ функций $x \equiv x(t)$, заданных на $[a, b]$, для которых

$$\Phi(x) \equiv \int_a^b \varphi(x(t))\, dt < +\infty;$$

если φ удовлетворяет условиям 1) —4), 5′), то она задает банахово пространство l_φ последовательностей $x \equiv \{\xi_r\}$, для которых

$$\Phi(x) \equiv \sum_{r=1}^{\infty} \varphi(\xi_r) < +\infty.$$

Подробно со свойствами пространств Орлича можно ознакомиться в [2 и 3].

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{x_r\} \subset L_\varphi$ *слабо сходится к* 0; φ *удовлетворяет условию* 6); *тогда можно выбрать подпоследовательность* $\{x_{i_k}\}$ *такую, что*

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right) = O(n). \tag{1}$$

Теорема 2. *Пусть последовательность* $\{x_k\} \subset l_\varphi$ *слабо сходится к* 0; φ *удовлетворяет условию* 5); *тогда можно выбрать подпоследовательность* $\{x_{i_k}\}$ *такую, что*

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{n} x_{i_k}\right) = O(n). \tag{2}$$

Отметим, что, полагая $\varphi(u) = \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{p}\right)^p |u|^p$, $p > 1$, получаем приведенный результат Банаха — Мазура. Условие невозрастания φ'' в теореме 1 существенно — так как, например, для L^p, $p > 2$, приведенная оценка неверна [1]; это условие выделяет класс пространств Орлича, «похожих» на L^p, $1 < p \leqslant 2$.

2°. Докажем сначала следующее неравенство, аналогичное неравенству Банаха — Сакса ([4], см. также [5]). Пусть φ удовлетворяет условиям 1) — 5) и 6); тогда найдется постоянная A, зависящая только от φ, что для любых $a, b \in R$, $|a| \geqslant 1$

$$\varphi(a+b) \leqslant \varphi(a) + \varphi'(a)\, b + A\varphi(b). \tag{3}$$

Пусть

$$\omega(x) = \frac{\varphi(a+x) - \varphi(a) - \varphi'(a)\, x}{\varphi(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}. \tag{4}$$

Если $|x| \leqslant \frac{1}{2}|a|$, то, учитывая, что $\varphi(0) = \psi(0) = \varphi'(0) = \psi'(0) = 0$ ($\varphi'(0) = 0$ в силу условия (3)), получаем $\omega(x) = \frac{\psi''(y)}{\varphi''(y)} = \frac{\varphi''(a+y)}{\varphi''(y)}$.

Так как $|y| \leqslant \frac{|a|}{2} \leqslant |a| - |y| \leqslant |a+y|$, то по условию 6) имеем

$$\omega(x) \leqslant 1. \tag{5}$$

Пусть $|x| \geqslant \frac{1}{2}|a|$. Для x, удовлетворяющих условию $|x| \geqslant \frac{1}{2}$, в силу условия 5) выполняется Δ_2-условие

$$\varphi(2x) \leqslant C\varphi(x), \tag{6}$$

где C — константа, не зависящая от x. Теперь имеем

$$\frac{\varphi(a+x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{\varphi(3x)}{\varphi(x)} \leqslant \frac{C\varphi\left(\frac{3}{2}x\right)}{\varphi(x)} < \frac{C\varphi(2x)}{\varphi(x)} \leqslant C^2. \tag{7}$$

Далее с помощью (6) получаем

$$\left|\frac{\varphi(a)}{\varphi(x)}\right| \leqslant \frac{\varphi(2|x|)}{\varphi(|x|)} \leqslant C. \tag{8}$$

Для $x \geqslant \frac{1}{2}$ имеем

$$C\varphi(x) \geqslant \varphi(2x) = \int_0^{2x} \varphi'(t)\, dt \geqslant \int_x^{2x} \varphi'(t)\, dt \geqslant \varphi'(x)\, x,$$

откуда

$$\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)} \leqslant C. \tag{9}$$

Для $x \leqslant -\frac{1}{2}$ неравенство (9) следует из четности функции $\frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}$.

Из (9) получаем

$$\left|\frac{\varphi'(a)\, x}{\varphi(x)}\right| \leqslant \frac{\varphi'(2|x|)\,|x|}{\varphi(|x|)} \leqslant \frac{C\frac{1}{2}2|x|\varphi'(2|x|)}{\varphi(2|x|)} \leqslant \frac{C^2}{2}. \tag{10}$$

Из (7), (8) и (10) следует существование константы B такой, что при $|x| \geqslant \frac{|a|}{2}$, $\omega(x) \leqslant B$, а отсюда и (5) вытекает существование зависящей лишь от φ константы A, что $\omega(x) \leqslant A$, откуда и следует (3).

Отметим, что (3) выполняется для всех значений a, $b \in R$, если φ удовлетворяет одновременно условиям 5) и 5′), т. е. Δ_2-условию на всей оси (этот факт нам в дальнейшем не понадобится).

Доказательство теоремы 1. Определим x_{i_k} по индукции. Положим $i_1 = 1$; пусть найдены i_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$; положим $s_{n-1}(t) = \sum_{k=1}^{n-1} x_{i_k}(t)$. Докажем, что

$$\chi_E \varphi'(s_{n-1}) \in L_\psi, \tag{11}$$

где $E = \{t \,\|\, s_{n-1}(t)| \geqslant 1\}$, ψ — функция, сопряженная, по Юнгу, к φ. Прежде всего отметим, что функция $t \to \psi[\chi_E \varphi'(s_{n-1}(t))]$ измерима. Так как $\psi(v) = \max\limits_{0<u<+\infty} [uv - \varphi(u)]$ и $[uv - \varphi(u)]'_u = v - \varphi'(u)$; $[uv - \varphi(u)]''_u = -\varphi''(u) < 0$, то получим, что max достигается в точке u, удовлетворяющей равенству $v = \varphi'(u)$. Отсюда, полагая $v = \varphi'(s_{n-1}(t))$ и учитывая монотонность φ' на $(0, +\infty)$, получаем $u = s_{n-1}(t)$; имеем $\psi(\varphi'(s_{n-1})) = s_{n-1}\varphi'(s_{n-1}) - \varphi(s_{n-1})$.

В силу (9) при $|s_{n-1}| \geqslant 1$ $\quad \frac{s_{n-1}\varphi'(s_{n-1})}{\varphi(s_{n-1})} \leqslant C$, т. е.

$$\psi(\varphi'(s_{n-1})) \leqslant (C+1)\varphi(s_{n-1}).$$

Из интегрируемости $\varphi(s)$ на любом измеримом подмножестве $[a, b]$ получаем (11). Так как L_ψ сопряжено к L_φ, то, используя слабую сходимость $\{x_k\}$ к 0, найдем номер $i_n > i_{n-1}$ так, что

$$\left| \int_E \varphi'(s_{n-1}(t))\, x_{i_n}(t)\, dt \right| \leqslant 1. \tag{12}$$

Положим теперь в (3) $a = s_{n-1}(t)$, $b = x_{i_n}(t)$ и проинтегрируем полученное неравенство по множеству E:

$$\int_E \varphi(s_n(t))\, dt \leqslant \int_E \varphi(s_{n-1}(t))\, dt + \int_E \varphi'(s_{n-1}(t))\, x_{i_n}(t)\, dt + A\int_E \varphi(x_{i_n}(t))\, dt. \tag{13}$$

Так как $\{x_k\}$ сходится слабо, то существует постоянная такая, что $\|x_k\| \leqslant M$ (здесь и далее под $\|\cdot\|$ понимаем норму Люксембурга, см. [3, гл. 2]).

Заметим, что если $\|x\| \leqslant M$, то, положив $F = \left\{t \left\| \frac{x(t)}{2M} \right| \geqslant 1\right\}$, получим:

$$\int_a^b \varphi(x(t))\, dt = \int_F \varphi\left(2M\frac{x(t)}{2M}\right) dt + \int_{[a,b] \setminus F} \varphi\left(2M\frac{x(t)}{2M}\right) dt \leqslant$$

$$\leqslant C^{[\log_2 2M]+1} \int_F \varphi\left(\frac{x(t)}{2M}\right) dt + \int_{[a,b] \setminus F} \varphi(2M)\, dt \leqslant C^{2+[\log_2 M]} + \varphi(2M)(b-a)^* \tag{14}$$

---

* Об этом см. также в [3, стр. 94].

$\left(\text{здесь использовано то, что для любого } \varepsilon > 0 \int\limits_a^b \varphi\left(\frac{x(t)}{\|x\|+\varepsilon}\right) \leqslant 1\right)$.

Отсюда следует, что $\int\limits_E \varphi(x_{i_n}(t))\,dt \leqslant K$, где K зависит лишь от M, C и $b-a$.

Из (12), (13) и последнего неравенства следует существование постоянной D такой, что

$$\int\limits_E \varphi(s_n(t))\,dt \leqslant \int\limits_E \varphi(s_{n-1}(t))\,dt + D. \tag{15}$$

Далее в силу (14) имеем

$$\int\limits_{[a,b]\setminus E} \varphi(s_n(t))\,dt = \int\limits_{[a,b]\setminus E} \varphi(s_{n-1}+x_{i_n})\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_a^b \varphi(1+|x_{i_n}|)\,dt \leqslant L = C^{2+[\log_2 N]} + \varphi(2N)(b-a), \tag{16}$$

где $N = \|1\| + M \geqslant \|1+|x_{i_n}|\|$.

Из (15) и (16), положив $\varepsilon = D+L$, получаем: $\Phi(s_n) \leqslant \Phi(s_{n-1}) + \varepsilon$.

Применяя последовательно последнее неравенство, получаем требуемый результат.

3°. Доказательство теоремы 2. Пусть $x_i = \{\xi_r^i\}$, $x_i \xrightarrow{\text{сл.}} 0$, тогда

$$\lim_{i\to\infty} \xi_r^i = 0 \quad \text{для } r = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

$$\|x_i\| \leqslant M \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

Положим $i_1 = 1$. Пусть выбраны i_k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Положив $\{\xi_j\} = s_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} x_{i_k}$, найдем N из условия

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \varphi(\xi_j) \leqslant 1, \tag{19}$$

а затем обозначим через i_n такой номер $> i_{n-1}$, что

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi(\xi_j + \xi_j^{i_n}) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \varphi(\xi_j) + 1 \tag{20}$$

(такое i_n существует в силу (17) и непрерывности φ).

Отсюда с помощью (19) и (20) и в силу выполнения Δ_2-условия на всей оси $\left(\varphi(\xi+\eta) \leqslant C\varphi\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) \leqslant \frac{C}{2}\{\varphi(\xi)+\varphi(\eta)\}\right)$ получаем

$$\Phi(s_n) = \sum_{j=1}^{N} \varphi(\xi_j + \xi_j^{i_n}) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \varphi(\xi_j + \xi_j^{i_n}) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \varphi(\xi_j) + 1 +$$

$$+ \frac{C}{2}\left\{\sum_{j=N+1}^{\infty} \varphi(\xi_j) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \varphi(\xi_j^{i_n})\right\} \leqslant \Phi(s_{n-1}) + 1 + \frac{C}{2}(1 + C^{2+[\log_2 M]})$$

(для получения последнего слагаемого в правой части неравенства нужно провести выкладку, аналогичную (14)).

Из соотношения $\Phi(s_n) \leqslant \Phi(s_{n-1}) + E$, где E не зависит от n, следует (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, «Радянська школа», К., 1948.
2. З. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, «Мир», М., 1965.
3. М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958.
4. S. Banach et S. Saks, Sur la convergence dans les champs L^p, Studia mathematika, **II**, 1930, 51—57.
5. С. Качмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М., 1958.

Поступила. 28.V 1970 г.,
после переработки — 27.XI 1970 г.

Днепропетровский химико-технологический институт