УДК 517.919.2

Динамические системы с особыми траекториями

Н. Н. Ладис

Введение. В этой заметке рассматриваются динамические системы, все траектории которых особые, т. е. периодические траектории и особые точки. Такие системы будем называть *особыми*, а особые системы без особых точек — *периодическими*.

Всюду далее будем пользоваться следующими определениями. Динамическая система на метрическом пространстве X называется *вполне устойчивой в точке* $x \in X$, если она устойчива по Ляпунову в обоих направлениях в точке x, и просто *вполне устойчивой*, если она устойчива в каждой точке.

Нетрудно видеть, что для определения орбитальной устойчивости для особых систем не требуется никакой равномерной структуры, поэтому определяем орбитальную устойчивость особых систем на произвольном топологическом пространстве X следующим образом. Особая система называется *орбитально устойчивой в точке* $x \in X$, если для произвольной окрестности V траектории $M(x)$ найдется инвариантная окрестность $W(M(x)) \subset V$. Здесь и всюду далее $M(x)$ обозначает траекторию, проходящую через точку x.

Следуя Немыцкому [1], динамическую систему на сепарабельном метрическом пространстве X назовем *интегрируемой*, если существует счетное семейство непрерывных на X и постоянных на каждой траектории функций $(F_n(x))_{n \in N}$ таких, что всякая совместная система уравнений $(F_n(x) = c_n)_{n \in N}$ определяет дискретное множество траекторий.

В § 1 рассматриваются периодические системы, для которых отметим предложение 1.3 и его следствие 1.2, утверждающие орбитальную устойчивость особых систем на локально компактном пространстве почти везде.

В § 2 изучается строение локально ограниченной период-функции, сопоставляющей каждой точке x периодической системы период $\omega(x)$ проходящей через нее траектории.

И, наконец, в § 3 получено необходимое и достаточное условие (орбитальная устойчивость) интегрируемости особой системы на локально компактном сепарабельном метрическом пространстве. Это является ответом на вопрос, поставленный Немыцким в [1, гл. III, § 5, 8].

Условимся по поводу обозначений. Динамическую систему будем записывать в виде $f: X \times R \to X$. $M(A)$ для $A \subset X$ обозначает инвариантную оболочку множества A, а $M_t(A) = f(A, [0, t])$ трубку длины t над A.

§ 1. Периодические системы. В этом параграфе рассматриваются периодические системы на отделимом топологическом пространстве X.

Прежде всего имеем очевидное предложение.

Предложение 1.1. *Функция $\omega(x)$ полунепрерывна снизу.*

Действительно, в противном случае в каждой окрестности точки x нашлась бы точка с периодом, не превосходящим $\omega_0 < \omega(x)$, чего не может быть по непрерывности динамической системы.

Предложение 1.2. *Если в периодической системе функция $\omega(x)$ локально ограничена, то система орбитально устойчива.*

В самом деле, пусть V — произвольная окрестность траектории $M(x)$. По локальной ограниченности $\omega(x)$ найдется окрестность W точки x, в которой $\omega(x)$ ограничена каким-нибудь числом ω_0. Для всякой окрестности $V(x) \subset W$ имеем $M(U) = M_{\omega_0}(U)$. Отсюда видно, что $U(x)$ можем выбрать такой, что $M(U) = M_{\omega_0}(U) \subset V$, т. е. выполняется условие орбитальной устойчивости.

Предложение 1.3. *Множество Ω точек локально компактной периодической системы на X, в которых функция $\omega(x)$ локально ограничена, есть открытое всюду плотное в X множество.*

Доказательство. Очевидно Ω открыто в X. Предположим, что оно неплотно в X, и пусть V — компактное множество с непустой внутренностью, во всех точках которого $\omega(x)$ не является локально ограниченной. По предложению 1.1, множество $V_n = \{x \in \overline{V}, \omega(x) > n\}$ открыто в $\overline{V}$ и непусто по предположению. Для каждого $n \in N$ возьмем компактное множество с непустой внутренностью $C_n \subset V_n$ такое, что $C_n \subset C_m$ при $n > m$. По компактности каждого C_n пересечение $C = \bigcap\limits_{n \in N} C_n$ непусто. Получили противоречие, так как $\omega(x)$ больше любого $n \in N$ в точках $x \in C$, чего быть не может.

Так как, по предложению 1.2, множество точек, в которых система орбитально устойчива, содержит Ω, то получаем следствие.

Следствие 1.1. *Локально компактная периодическая система почти везде орбитально устойчива.*

То же верно и для особой системы, так как множество N особых точек замкнуто, а на N система может быть орбитально неустойчивой лишь в граничных точках. Отсюда такое следствие.

Следствие 1.2. *Особая локально компактная система почти везде орбитально устойчива.*

Простейший пример компактной орбитально неустойчивой периодической системы дает следующая система.

Пример 1.1. Возьмем круглый тор T_0^2 в R^3 и последовательность $(T_n^2)_{n \in N}$ круглых торов, сходящуюся к T_0^2. Положим на каждом торе T_n^2

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{n}, \tag{1}$$

где φ изменяется по меридианам, а ψ — по параллелям. При $n = \infty$ получаем тор T_0^2. Легко видеть, что полученная система не является орбитально устойчивой в точках T_0^2.

Рассмотрим пример (обычный в теории гладких действий компактных групп на многообразии) периодической системы с разрывной период-функцией.

Пример 1.2. Возьмем заполненный тор и две координаты φ и ψ по mod 1 на каждом торе из их непрерывного семейства, стягивающегося к периодической траектории. Добавим еще параметр r семейства, $0 \leqslant r \leqslant 1$, и рассмотрим систему

$$\dot{\varphi} = 1, \quad \dot{\psi} = \frac{1}{n}, \quad \dot{r} = 0, \tag{2}$$

где n — целое и больше 1. Построенная система является периодической, причем период траектории $r = 0$ равен 1, а периоды всех остальных траекторий равны n. Очевидно, система (2) вполне устойчива. Рассмотрим наряду с ней систему

$$\dot{\varphi} = 1 + r, \quad \dot{\psi} = \frac{1+r}{n}, \quad \dot{r} = 0. \tag{3}$$

Системы (2) и (3) имеют одинаковые траектории, но орбитально устойчивая система (3) не является вполне устойчивой, что приводит к следующему определению.

Определение 1.1. Орбитально устойчивая динамическая система называется синхронизируемой, если существует непрерывная замена времени на траекториях, приводящая к вполне устойчивой системе. Более точно, система $f : X \times R \to X$ синхронизируема, если существует гомеоморфизм $g : X \times R \to X \times R$, тождественный на $X \times 0$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \\ X \times R \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна и система h вполне устойчива.

Возникает естественный вопрос: при каких условиях орбитально устойчивая система синхронизируема? В следующем параграфе мы покажем, что периодическая система с локально ограниченной период-функцией локально синхронизируема.

§ 2. Строение $\omega(x)$. В этом параграфе рассматриваются периодические системы с локально ограниченной период-функцией на отделимом пространстве.

Предложение 2.1 (локальное строение $\omega(x)$). *Функция $\omega(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 представляется в виде произведения $\omega(x) = \omega_0(x) k_0(x)$, где $\omega_0(x)$ непрерывна, а $k_0(x)$ — полунепрерывная снизу целочисленная конечнозначная функция с мультипликативно целочисленными скачками и $k_0(x_0) = 1$.*

Доказательство. Пусть в окрестности W точки x_0 функция $\omega(x)$ ограничена числом c. По любому малому $\left(\text{меньше } \dfrac{\omega(x_0)}{2}\right)$ $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $V \subset W$ точки x_0, что из $V \cap f(V, t) \neq \varnothing$ при $0 < \varepsilon \leqslant t \leqslant c$ следует

$$|t - k(t)\,\omega(x_0)| < \varepsilon \tag{4}$$

для некоторого целого $k(t)$, $1 \leqslant k(t) \leqslant \dfrac{c}{\omega(x_0)}$. Действительно, в противном случае существовала бы направленность $(x_i)_{i \in I}$, сходящаяся к x_0, такая, что направленность $(f(x_i, t_i))_{i \in I}$ сходится к x_0, где $\varepsilon \leqslant t_i \leqslant c$, и направленность $(t_i)_{i \in I}$ сходится к t_0, причем $|t_0 - k\omega(x_0)| \geqslant \varepsilon$ при $1 \leqslant k \leqslant \dfrac{c}{\omega(x_0)}$. Так как такого не может быть, то из (4) получаем при $t = \omega(x)$ для $x \in V$ неравенство

$$|\omega(x) - k(\omega(x))\,\omega(x_0)| < \varepsilon, \tag{5}$$

где $k(\omega(x))$ — минимальное целое число, при котором выполняется (4). Обозначив $k(\omega(x)) = k_0(x)$ и $\frac{\omega(x)}{k_0(x)} = \omega_0(x)$, из (5) получаем $|\omega_0(x) - \omega(x_0)| < \varepsilon$. Легко видеть, что $k_0(x)$ не зависит от ε и, следовательно, на V определяется функция $\omega_0(x)$. Последнее неравенство показывает непрерывность $\omega_0(x)$ в точке x_0. Так как в любой точке $x_1 \in V$ имеем $\omega(x_1) = k_0(x_1)\,\omega_0(x_1)$, то, применив подобное рассуждение в точке x_1, покажем непрерывность в x_1 функции $k_0(x_1)\,\omega_0(x)$, а следовательно, и функции $\omega_0(x)$. Таким образом, $\omega_0(x)$ непрерывна на V, а все утверждения нашего предложения относительно $k_0(x)$ проверяются непосредственно.

Предложение 2.2. *Пусть период-функция $\omega(x)$ периодической системы на метрическом пространстве X локально ограничена в точке x_0. Тогда* (*орбитально устойчивая по предложению* 1.2) *эта система синхронизируема в точке x_0, т. е. существует замена времени на траекториях такая, что получаемая система становится вполне устойчивой в некоторой окрестности точки x_0.*

Доказательство. Из орбитальной устойчивости системы в некоторой окрестности точки x_0 следует непрерывность в этой окрестности функции $d^*(x) = d(M(x_0), M(x))$. По предыдущему предложению, на множестве $\overline{V}_\varepsilon = \{x \in X, d^*(x) \leqslant \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$ имеем представление $\omega(x) = \omega_0(x)\,k_0(x)$, где $\omega_0(x)$ непрерывна на $\overline{V}_\varepsilon$, а $k_0(x)$ — полунепрерывная снизу целочисленная конечнозначная функция и $k_0(x_0) = 1$. Возьмем произвольное $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon$, и определим на X непрерывную функцию

$$\omega^*(x) = \begin{cases} \dfrac{\omega_0(x)}{\omega_0(x_0)} & \text{при} \quad 0 \leqslant d^*(x) \leqslant \delta, \\[2ex] \dfrac{\omega_0(x)}{\omega_0(x_0)} + \dfrac{d^*(x) - \delta}{\varepsilon - \delta}\left(1 - \dfrac{\omega_0(x)}{\omega_0(x_0)}\right) & \text{при} \quad \delta \leqslant d^*(x) \leqslant \varepsilon, \\[2ex] 1 & \text{при} \quad d^*(x) \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что произведя замену времени $h(x, t) = f\left(x, \dfrac{t}{\omega^*(x)}\right)$, получаем вполне устойчивую на $V_\delta = \{x \in X, d^*(x) < \delta\}$ систему h.

§ 3. Интегрируемость особых систем. Если в определении интегрируемости выражение «дискретное множество траекторий» заменить на «одну траекторию», то такую систему будем называть *сильно интегрируемой*.

Предложение 3.1. *Пусть f — особая динамическая система на локально компактном сепарабельном метрическом пространстве X. Следующие свойства системы равносильны:*

1°) *f интегрируема;*
2°) *f сильно интегрируема;*
3°) *f орбитально устойчива.*

Доказательство. Пусть выполняется 3°). По сепарабельности выбираем счетное плотное в X семейство точек $(x_n)_{n \in N}$. Положим $F_n(x) = d(M(x), M(x_n))$. Из орбитальной устойчивости следует непрерывность каждой F_n, а из плотности семейства $(x_n)_{n \in N}$ следует, что семейство $(F_n(x))_{n \in N}$ является семейством сильных интегралов. Отсюда 3°) $\Rightarrow$ 2°).

Так как всегда 2°) $\Rightarrow$ 1°), то остается доказать импликацию 1°) $\Rightarrow$ 3°). Итак, пусть $(F_n(x))_{n \in N}$ — семейство интегралов, и предположим, что система орбитально неустойчива в точке x_0. Тогда найдутся последовательность $(x_n)_{n \in N}$ точек из X, сходящаяся к x_0, и последовательность времен $(t_n)_{n \in N}$ такие, что $d(f(x_n, t_n), M(x_0)) = \varepsilon$, где ε считаем настолько малым, что замкнутая ε-окрестность $\overline{V}(M(x_0), \varepsilon)$ траектории $M(x_0)$ компактна и $\delta\overline{V}$ не содержит точек с интегральными координатами $(F_n(x_0))_{n\in N}$. Последовательность $(f(x_n, t_n))_{n\in N}$ по компактности границы $\delta\overline{V}$ считаем сходящейся к точке $y\in\delta\overline{V}$. Тогда, с одной стороны, для некоторого $n_0\in N$ $F_{n_0}(y)\neq F_{n_0}(x_0)$, но, с другой стороны, $F_{n_0}(y)=\lim\limits_{n\to\infty}F_{n_0}(x_n)=F_{n_0}(x_0)$. Полученное противоречие и доказывает орбитальную устойчивость.

Замечание 3.1. Из самого хода доказательства предыдущего предложения видно, что при выполнении одного из условий 1°) — 3°) пространство траекторий естественным образом метризуемо.

Замечание 3.2. Сепарабельность в предыдущем предложении не является существенным условием в том смысле, что для пространств веса α при выполнении условия 3°) существует семейство интегралов мощности α.

Отметим, наконец, что простейшим примером неинтегрируемой системы наряду с системой (3) является следующая система на плоскости

$$\frac{dr}{dt}=0, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=1-r, \tag{6}$$

где (r, φ) — полярные координаты.

Интересно было бы показать, что системы (1) и (6) типичны в том смысле, что во всякую неинтегрируемую систему вкладывается либо неинтегрируемая подсистема системы (1), либо неинтегрируемая подсистема системы (6), либо, более общим образом, для всякой неинтегрируемой системы существует естественное непрерывное отображение двумерного тора в множество орбитально неустойчивых точек, при котором меридианы тора переходят в траектории (возможно в особые точки).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, Топологические вопросы теории динамических систем, УМН, вып. 6 (5—6), 1949.

Поступила 10.II 1970 г.

Институт математики АН БССР